Analyse 2

Naslagtekst

E.P. van den Ban

Hoofdstuk 1

Functies van meer veranderlijken

1.1 Inleiding

In het college Analyse 1 werden functies van één veranderlijke bestudeerd, d.w.z. functies f : R æ R, en ook daarmee samenhangende begrippen als limiet, continuïteit, differentieerbaarheid en integreerbaarheid.

Voor allerlei toepassingen is het van groot belang te kunnen werken met functies f die afhankelijk zijn van meer dan één veranderlijke. Denk bijvoorbeeld aan de functie die voor ieder punt van de ruimte de temperatuur in dat punt beschrijft. Beschrijven we de punten van die ruimte door middel van coördinaten (x, y, z) (of (x_1, x_2, x_3)) dan wordt de temperatuur gegeven door een reëelwaardige functie $f(x, y, z)$ (of $f(x_1, x_2, x_3)$) van die coördinaten. Een andere functie waaraan men kan denken is een functie die de kosten van een te vervaardigen produkt uitdrukt in parameters als 'loonkosten', 'afschrijving van machines', 'kosten van grondstoffen', 'kosten van brandstof' enzovoort. Geven we de waarden van de betreffende parameters aan met de symbolen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dan komen we ertoe een functie $f(x_1, \ldots, x_n)$ van n verandelijken te beschouwen.

Uit het laatste voorbeeld wordt duidelijk dat het onverstandig is een beperking aan de waarde van n op te leggen. Met andere woorden, het is natuurlijk om een algemene theorie van functies f : R^n æ R te ontwikkelen, met n een (vast maar willekeurig) positief geheel getal. Om een theorie van limieten en continuïteit van zulke functies te ontwikkelen is het noodzakelijk eerst de structuur van de *lineaire ruimte* R^n nader te onderzoeken.

De elementen van R^n zijn geordende rijtjes $(x_1, \ldots, x_n)$ van n reële getallen, *vectoren* (of punten) genaamd. In R^n is een *optelling* gedefinieerd: als $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_n)$, dan is $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$. Verder is een *vermenigvuldiging met reële scalairen* gedefinieerd: als $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\lambda \in$ R, dan is $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$. Hierbij wordt voldaan aan de bekende axioma's voor een lineaire ruimte met het grondlichaam R, die u kent uit het college Lineaire Algebra.

Opmerking 1.1.1 Behoudens uitzonderingen is het niet mogelijk, op R^n een vermenigvuldiging te definiëren zo dat voldaan wordt aan de axioma's (L1) tot en met (L9) van een lichaam (zie Analyse 1, §3.7). De uitzonderingen zijn het lichaam R ($n = 1$) en het lichaam C ($n = 2$). Op R^4 kan men een vermenigvuldiging definiëren zo dat voldaan is aan alle lichaamsaxioma's behalve de commutativiteit van de vermenigvuldiging (L6). Men noemt R^4 voorzien van deze vermenigvuldigingsstructuur het *scheve lichaam* van de *quaternionen*, notatie H.

1.2 Inprodukt en norm

Voor de introductie van een limietbegrip zullen we een *afstandsbegrip* op R^n nodig hebben. Zo'n afstandsbegrip kan gedefinieerd worden met behulp van het *standaardinproduct*. Het standaardinproduct op R^n is per definitie de afbeelding $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ die aan het tweetal vectoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_n)$ het getal

$$\langle\, x, y \,\rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

toevoegt. Men gaat gemakkelijk na dat deze afbeelding inderdaad voldoet aan de (in de lineaire algebra geïntroduceerde) eigenschappen die een inprodukt karakteriseren; voor alle $x, y, z \in \mathrm{R}^n$, $\lambda \in \mathrm{R}$ geldt:

(a) $\langle\, x, y \,\rangle = \langle\, y, x \,\rangle$,
(b) $\langle\, \lambda x + y, z \,\rangle = \lambda \langle\, x, z \,\rangle + \langle\, y, z \,\rangle$,
(c) $\langle\, x, x \,\rangle \geq 0$,
(d) $\langle\, x, x \,\rangle = 0 \iff x = 0$.

De vectoren

$$e_i := (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

waarbij $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$, vormen de *standaard-basis* van R^n. Ten opzichte van het standaard-inproduct op R^n is dit een *orthonormale* basis, d.w.z. $\langle\, e_i, e_j \,\rangle = \delta_{ij}$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$.

Als $x \in \mathrm{R}^n$, dan definiëren we de *Euclidische norm* van x door

$$\|x\| = \sqrt{\langle\, x, x \,\rangle}.$$

Merk op dat deze definitie geoorloofd is wegens de derde eigenschap van het inprodukt.

Het volgende resultaat zal een belangrijke rol spelen bij de ontwikkeling van het afstandsbegrip.

Lemma 1.2.1 **(Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz)** *Voor ieder tweetal $x, y \in \mathrm{R}^n$ geldt:*

$$|\langle\, x, y \,\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

De bovenstaande ongelijkheid is een gelijkheid dan en slechts dan als x en y lineair afhankelijk zijn (dus $x \in \mathrm{R}y$ of $y \in \mathrm{R}x$).

Bewijs: Laten $x, y \in \mathrm{R}^n$ gegeven zijn. Als $x = 0$ of $y = 0$ dan valt er niets te bewijzen, dus we mogen veronderstellen $x \neq 0, y \neq 0$. Beschouw de functie $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $\varphi(t) = \langle\, x + ty, x + ty \,\rangle$. Uit de positiviteit van het inprodukt (derde eigenschap) volgt dat $\varphi(t) \geq 0$ voor alle $t \in \mathrm{R}$. Anderzijds levert uitwerken dat φ een kwadratische functie is: $\varphi(t) = at^2 + bt + c$, met $a = \|y\|^2$, $b = 2\langle\, x, y \,\rangle$, $c = \|x\|^2$. Uit $\varphi \geq 0$ volgt voor de bij φ behorende discriminant dat $b^2 - 4ac \leq 0$. Invullen en uitwerken levert de ongelijkheid $\langle\, x, y \,\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$. Dit levert de gewenste schatting. De schatting is een identiteit precies dan als de bovenstaande discriminant gelijk aan 0 is. In dat geval heeft de kwadratische functie φ precies één nulpunt t_0. Daarvoor geldt: $\varphi(t_0) = 0$, dus $\|x + t_0 y\| = 0$, waaruit de lineaire afhankelijkheid van x en y volgt. $\square$

De Euclidische norm heeft de volgende eigenschappen:

Lemma 1.2.2 *Voor alle* $x, y \in \mathrm{R}^n,\ \lambda \in \mathrm{R}$ *geldt:*

(a) $||x|| \geq 0$ *en* $||x|| = 0 \iff x = 0$
(b) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$;
(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (driehoeksongelijkheid).

Bewijs: De eerste twee bewijst men zonder moeite uit de eigenschappen van het inprodukt. Voor het bewijs van de derde eigenschap (de driehoeksongelijkheid) gebruikt men de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= \langle\, x+y, x+y \,\rangle \\ &= \langle\, x, x \,\rangle + \langle\, x, y \rangle\langle\, y, x \,\rangle + \langle\, y, y \rangle \\ &= ||x||^2 + 2\langle\, x, y \,\rangle + ||y||^2 \\ &\leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

□

Opmerking 1.2.3
(a) Verklaar zelf de naam driehoeksongelijkheid.
(b) De Euclidische norm is een speciaal geval van een algemener begrip van *norm.* Is E een (wellicht oneindig dimensionale) reële lineaire ruimte dan verstaat men onder een norm op E een afbeelding $|| \cdot || : E \to \mathrm{R}$ met de eigenschappen (a) t/m (c) uit het bovenstaande lemma (voor alle $x, y \in E,\ \lambda \in \mathrm{R}$).

Corollarium 1.2.4

(a) ('Herhaalde driehoeksongelijkheid') *Voor alle* $m \geq 2,\ x_1, \ldots, x_m \in \mathrm{R}^n$ *geldt:*

$$||x_1 + \cdots + x_m|| \leq ||x_1|| + \cdots + ||x_m||.$$

(b) ('Omgekeerde driehoeksongelijkheid') *Voor alle* $x, y \in \mathrm{R}^n$ *geldt:*

$$||x - y|| \geq |\,||x|| - ||y||\,|.$$

Bewijs: De eerste ongelijkheid volgt door herhaald toepassen van de driehoeksongelijkheid. Voor de tweede ongelijkheid merken we op dat $||x|| = ||(x-y)+y|| \leq ||x-y||+||y||$, waaruit volgt dat $||x-y|| \geq ||x||-||y||$. Op soortgelijke wijze ziet men in dat $||x-y|| \geq ||y||-||x|| = -(||x||-||y||)$. De omgekeerde driehoeksongelijkheid volgt door combinatie van de twee gevonden ongelijkheden. Merk op dat in deze redenering alleen algemene eigenschappen van de norm gebruikt worden; de ongelijkheden (a) en (b) gelden derhalve voor iedere norm. □

Tenslotte zullen we de volgende ongelijkheden vaak gebruiken als we de norm van een vector met zijn componenten vergelijken.

Lemma 1.2.5 (Relaties tussen norm en coördinaten) *Voor elke* $x \in \mathrm{R}^n$ *geldt:*

(a) $|x_i| \leq ||x||$ *voor alle* $1 \leq i \leq n$.

(b) $||x|| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Bewijs: De eerste ongelijkheid volgt uit

$$||x||^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \geq |x_i|^2.$$

De tweede ongelijkheid volgt uit de herhaalde driehoeksongelijkheid. Immers

$$||x|| = ||x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n|| \leq |x_1| ||e_1|| + \cdots + |x_n| ||e_n|| = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

□

Met behulp van de norm kunnen we als volgt een afstandsbegrip op R^n definiëren.

Definitie 1.2.6 Als $x, y \in \mathrm{R}^n$ dan definiëren we de (Euclidische) *afstand* van x tot y door

$$d(x, y) := ||x - y||.$$

Merk op dat de norm $||x||$ van een vector $x \in \mathrm{R}^n$ gelijk is aan zijn afstand $d(0, x)$ tot de oorsprong. Merk verder op dat de volgende eigenschappen van het afstandsbegrip direkt volgen uit de eigenschappen van de norm:

- $d(x, y) \geq 0, \quad$ en $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Met behulp van dit afstandsbegrip kunnen we nu zeggen wat het betekent dat een rij $(a_k)_{k \geq 1}$ van vectoren R^n een vector $a \in \mathrm{R}^n$ als limiet heeft: dit betekent in woorden dat de afstand $d(a_k, a)$ tot 0 'nadert' als k 'naar oneindig gaat'. Preciezer:

Definitie 1.2.7 Zij $(a_k)_{k \geq 1}$. De rij (a_k) heet *convergent* met limiet a, waarbij $a \in \mathrm{R}^n$, als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathrm{N}$ bestaat zo dat: $k \geq N \Rightarrow ||a_k - a|| < \varepsilon$. Notatie:

$$a = \lim_{k \to \infty} a_k.$$

Merk op dat uit de definitie volgt dat $\lim_{k \to \infty} a_k = a$ dan en slechts dan als $\lim_{k \to \infty} ||a_k - a|| = 0$. (De laatste limiet is de limiet van de rij $(||a_k - a||)_{k \geq 1}$ in R en is dus reeds in het college Analyse 1 gedefinieerd.)

Merk op dat de definitie van limiet van een rij in R^n uit die voor een rij in R verkregen kan worden door in de laatstgenoemde definitie overal de absolute waarde strepen $|\cdot|$ te vervangen door de norm strepen $||\cdot||$. Een soortgelijke opmerking geldt voor tal van andere begrippen. Zo noemen we een verzameling $V \subset \mathrm{R}^n$ *begrensd* als er een $M > 0$ bestaat zo dat $||v|| \leq M$ voor alle $v \in V$. Analoog heet een rij $(a_k)_{k \geq 1}$ in R^n begrensd als er een $M > 0$ bestaat zo dat $||a_k|| \leq M$ voor alle $k \geq 1$.

Lemma 1.2.8 *Een convergente rij in* R^n *is begrensd.*

Bewijs: Het bewijs verkrijgt men uit het overeenkomstige bewijs voor rijen in R door overal R door R^n te vervangen, en $|\cdot|$ door $\|\cdot\|$. □

Uit het onderstaande lemma blijkt dat men in principe kan beslissen of een rij in R^n convergent is door dit voor elk van de vectorcomponenten te bepalen.

Lemma 1.2.9 *Zij* $(a_k)_{k\geq 1}$ *een rij in* R^n. *De rij* $(a_k)_{k\geq 1}$ *is convergent dan en slechts dan als voor iedere* $1 \leq j \leq n$ *geldt dat de rij* $(a_{kj})_{k\geq 1}$ *van de* j*-de componenten convergent is in* R. *Bovendien geldt in dat geval dat de* j*-de component van de limiet gegeven wordt door:*

$$(\lim_{k\to\infty} a_k)_j = \lim_{k\to\infty} a_{kj}.$$

Bewijs: Veronderstel eerst dat de rij $(a_k)_{k\geq 1}$ convergent is, en noem de limiet b. Voor de j–de componenten geldt:

$$0 \leq |a_{kj} - b_j| \leq \|a_k - b\|$$

(zie Lemma 1.2.5 (a)). Door toepassing van de insluitstelling voor rijen in R (zie Analyse 1, Stelling 5.7.6) concluderen we hieruit dat $\lim_{k\to\infty} a_{kj} = b_j$.

Veronderstel nu omgekeerd dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de rij $(a_{kj})_{k\geq 1}$ convergeert, en noem de limiet b_j. Zij $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Dan geldt wegens Lemma 1.2.5 (b) dat

$$0 \leq \|a_k - b\| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj} - b_j|.$$

Door toepassing van de somregel en de insluitstelling voor rijen in R concluderen we hieruit dat $\lim_{k\to\infty} \|a_k - b\| = 0$, dus de rij (a_k) convergeert met limiet b. □

Lemma 1.2.10 **(Rekenregels)** *Laat* $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ *een convergente rij in* R *zijn, en veronderstel dat* $(a_k)_{k\geq 1}$ *en* $(b_k)_{k\geq 1}$ *convergente rijen in* R^n *zijn. Dan convergeren de rijen* $(\lambda_k a_k)_{k\geq 1}$ *en* $(a_k + b_k)_{k\geq 1}$ *in* R^n *en er geldt:*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k a_k = \lim_{k\to\infty} \lambda_k \lim_{k\to\infty} a_k \qquad \text{en} \qquad \lim_{k\to\infty} (a_k + b_k) = \lim_{k\to\infty} a_k + \lim_{k\to\infty} b_k.$$

Bewijs: Dit volgt direkt uit het voorgaande lemma en de rekenregels voor rijen in R. □

1.3 Limieten van functies van meer veranderlijken

In het vervolg beschouwen we functies f gedefinieerd op een deelverzameling van R^n en met waarden in R^p, waarbij $n \geq 1$ en $p \geq 1$; dus $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p. Zo'n functie f is een functie van de veranderlijke x in R^n. Omdat $x = (x_1, \ldots, x_n)$ met $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{R}$, kan men ook zeggen dat f een functie is van de n reële veranderlijken $x_1, \ldots, x_n$. Als $n \geq 2$ noemt men daarom $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p

een functie van meer veranderlijken. Verder noemt men een functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R een *scalaire functie* en een functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p met $p \geq 2$ een *vectorwaardige functie.*

De begrippen limiet, continuïteit en uniforme continuïteit voor functies $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p worden gedefinieerd als in Analyse 1 met behulp van het in §1.2 besproken afstandsbegrip in R^n en in R^p. We geven de preciese definities.

Definitie 1.3.1 (Limiet) Zij $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p een functie, zij $a \in \mathrm{R}^n$ en $b \in \mathrm{R}^p$. Dan betekent $\lim_{x \to a} f(x) = b$: bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f)$ met $\|x - a\| < \delta$ geldt $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Definitie 1.3.2 (Continuïteit) Zij $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p een functie en $a \in \mathrm{dom}(f)$. De functie heet *continu in* a als $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; anders gezegd, als bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f)$ met $\|x - a\| < \delta$ geldt $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Zij $W \subset \mathrm{dom}(f)$. De functie f heet *continu op* W als f continu is in a voor iedere $a \in W$. De functie f heet *continu* als f continu is op $\mathrm{dom}(f)$.

Definitie 1.3.3 (Uniforme continuïteit) Een functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p heet *uniform continu op* W (waarbij $W \subset \mathrm{dom}(f)$) als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zo dat voor alle $x \in W$ en $y \in W$ met $\|x - y\| < \delta$ geldt $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. De functie f heet *uniform continu* als f uniform continu is op $\mathrm{dom}(f)$.

We bespreken nu enige rekenregels voor limieten en continuïteit. Deze rekenregels zullen het ons mogelijk maken continuïteit van functies in de praktijk te herkennen. Is $f : V \to \mathrm{R}^p$ (waarbij $V \subset \mathrm{R}^n$) een vectorwaardige functie, dan zullen we de componentnotatie

$$f = (f_1, \ldots, f_p)$$

gebruiken. Hierbij zijn de $f_j : V \to \mathrm{R}$ $(1 \leq j \leq p)$ de scalaire functies die bepaald zijn door $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ voor alle $x \in V$. We behandelen eerst het analogon van Lemma 1.2.9.

Lemma 1.3.4 *Zij* $f : V \to \mathrm{R}^p$ (waarbij $V \subset \mathrm{R}^n$), *en zij* $a \in \mathrm{R}^n$, $\in \mathrm{R}^p$.

(a) *Er geldt*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ 1 \leq j \leq p : \quad \lim_{x \to a} f_j(x) = b_j.$$

(b) *Veronderstel dat* $a \in V$. *Dan is* f *continu in* a *dan en slechts dan als iedere component* f_j $(1 \leq j \leq p)$ *continu is in* a.

Bewijs: (b) volgt gemakkelijk uit (a). We volstaan daarom met een bewijs van (a). De implicatie '$\Rightarrow$' volgt uit de schatting

$$0 \leq |f_j(x) - b_j| \leq \|f(x) - b\| \qquad (1 \leq j \leq p,\ x \in V)$$

(zie Lemma 1.2.5). Immers veronderstel $\lim_{x\to a} f(x) = b$ en zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat voor $x \in V$ geldt: $\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-b\| < \varepsilon$, dus ook $\|x-a\| < \delta \Rightarrow |f_j(x) - b_j| < \varepsilon$.

De omgekeerde implicatie volgt uit de schatting

$$0 \leq \|f(x) - b\| \leq \sum_{j=1}^{p} |f_j(x) - b_j| \qquad (x \in V)$$

(zie Lemma 1.2.5). Immers veronderstel dat voor elke $1 \leq j \leq p$ geldt dat: $\lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$, en zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Als $1 \leq j \leq p$ dan is er een $\delta_j > 0$ zo dat voor $x \in V$ geldt $\|x - a\| < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - b_j| < \varepsilon/p$. Noem $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_p\}$. Dan geldt voor $x \in V$ met $\|x-a\| < \delta$ dat $|f_j(x) - b_j| < \varepsilon/p$ voor iedere $1 \leq j \leq p$, dus $\|f(x) - b\| < p\varepsilon/p = \varepsilon$. □

Zij $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ en $g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ en $\lambda \in \mathrm{R}$. Dan definieert men de *som* $f + g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ en het *scalaire veelvoud* $\lambda f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ op de gebruikelijke manier :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad (x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)), \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \quad (x \in \operatorname{dom}(f)). \end{aligned}$$

Voor deze bewerkingen gelden de volgende rekenregels.

Lemma 1.3.5 **(Rekenregels I)** *Laten f en g functies $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ zijn, zij $a \in \mathrm{R}^n$ en $\lambda \in \mathrm{R}$. Dan geldt het volgende.*

(a) *Als $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ en $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ $(b, c \in \mathrm{R}^p)$ dan is $\lim\limits_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$.*

(b) *Als $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ $(b \in \mathrm{R}^p)$ dan is $\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b$.*

(c) *Als $a \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$ en de functies f en g zijn beiden continu in a, dan is ook $f+g$ continu in a.*

(d) *Als $a \in \operatorname{dom}(f)$ en f is continu in a dan is ook λf continu in a.*

(e) *Zij $V \subset \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$. Als f en g uniform continu zijn op V dan zijn λf en $f + g$ dat ook.*

Bewijs: Het bewijs is geheel analoog aan dat van de overeenkomstige stellingen in Analyse 1. We laten het daarom achterwege. □

Scalaire functies $f, g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ kan men met elkaar vermenigvuldigen: het product fg is gedefinieerd door

$$fg(x) = f(x)g(x) \qquad (x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)).$$

Voorts definieert men de reciproke functie $\frac{1}{f}$ van f door:

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad (x \in \operatorname{dom}(f),\ f(x) \neq 0).$$

In dit verband gelden de volgende rekenregels.

Lemma 1.3.6 **(Rekenregels II)** *Laten f, g functies $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ zijn, en zij $a \in \mathrm{R}^n$.*

(a) *Als* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *en* $\lim_{x\to a} g(x) = c$ $(b, c \in \mathrm{R})$, *dan is* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = bc$.

(b) *Als* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ $(b \in \mathrm{R})$ *en* $b \neq 0$ *dan geldt:* $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$.

(c) *Als* $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ *en de functies* f *en* g *zijn continu in* a *dan is de productfunctie* fg *dat ook.*

(d) *Zij* $a \in \mathrm{dom}(f)$. *Als* f *continu is in* a *en* $f(a) \neq 0$, *dan is ook de reciproke functie* $\frac{1}{f}$ *continu in* a.

De bewijzen zijn weer geheel analoog aan die van de overeenkomstige stellingen in Analyse 1. We laten ze daarom achterwege.

Opmerking 1.3.7 Ook als $f : \mathrm{R}^n$ æ R een scalaire en $g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ een vectoriële functie op R^n is kan men het product fg op voor de hand liggende wijze definiëren. Er gelden analoge rekenregels als (a) en (c) in het bovenstaande lemma. Dit ziet men in door het bovenstaande lemma te combineren met Lemma 1.3.4.

Door combinatie van de bovenstaande rekenregels met het volgende voor de hand liggende lemma ziet men in dat veeltermfuncties en rationale functies continu zijn (op hun domein).

Lemma 1.3.8 *Zij* $1 \leq j \leq n$. *Dan is de* j*-de coördinaatfunctie* $\varphi_j : x \mapsto x_j$, $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ *uniform continu.*

Bewijs: Dit volgt direkt uit de schatting $|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| = |x_j - y_j| \leq ||x - y||$ door de definitie van uniforme continuïteit te gebruiken. □

Definitie 1.3.9 Onder een *monoom* op R^n verstaan we een functie $p : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ van de vorm

$$p(x) = cx_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \tag{1.1}$$

met $c \in \mathrm{R}$ en $k_1, \ldots, k_n \in \mathrm{Z}_{\geq 0}$.

Onder een *veelterm* (of polynoom) op R^n (of een veelterm in n veranderlijken) verstaan we een eindige som van monomen op R^n.

Onder een *rationale* functie op R^n verstaan we een functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R van de vorm $f = p/q$, met p, q veeltermen op R^n, $q \neq 0$.

Formule (1.1) kan herschreven worden als $p = c\varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n}$. Door herhaald toepassen van Lemma's 1.3.5 en 1.3.6 zien we dat p continu is; dus monomen zijn continu. Door toepassen van de somregel leiden we hieruit af dat iedere veelterm continu is. Is p een veelterm, dan is de functie $\frac{1}{p}$ continu op zijn domein $\mathrm{dom}(\frac{1}{p}) = \{x \in \mathrm{R}^n \mid p(x) \neq 0\}$, wegens Lemma 1.3.6. Door toepassing van Lemma's 1.3.5 en 1.3.6 volgt tenslotte:

Lemma 1.3.10 *Iedere rationale functie is continu op zijn domein.*

Voorbeeld 1.3.11 De functies $(x, y, z) \mapsto x$, $(x, y, z) \mapsto y$ en $(x, y, z) \mapsto z$ zijn continu. Derhalve zijn de monomen $(x, y, z) \mapsto 1$, $(x, y, z) \mapsto x$, $(x, y, z) \mapsto yz^3$ het ook en daaruit volgt weer dat de veeltermfunctie $(x, y, z) \mapsto 1 + xy + yz^3$ het ook is. Door soortgelijke toepassing van de rekenregels volgt dat de veeltermfunctie $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ continu op R^3 is. Tenslotte is de rationale functie

$$r(x) = \frac{1 + xy + yz^3}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

continu op zijn domein $\mathrm{dom}(r) = \{(x, y, z) \in R^3 | x^2 + y^2 + z^2 \neq 1\}$. De laatste verzameling is het complement van de *sfeer* (boloppervlak) met centrum 0 en straal 1 in R^3 (ga na).

Tenslotte breiden we de rekenregels voor limieten uit met substitutieregels. Als $f : R^n$ æ R^p en $g : R^p$ æ R^q, dan definieert men de *compositie* of *samenstelling* $g \circ f$ door

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Hierbij is $\mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{dom}(g)\}$. In dit verband geldt de volgende substitutiestelling:

Lemma 1.3.12 **(Substitutieregels)** *Laten* $f : R^n$ æ R^p *en* $g : R^p$ æ R^q *zijn en* $a \in R^n$.

(a) *Als* $b \in R^p$ *en* $c \in R^q$ *dan geldt:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{en} \qquad \lim_{y \to b} g(y) = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} g(f(x)) = c.$$

(b) *Zij* $a \in \mathrm{dom}(f)$, $f(a) \in \mathrm{dom}(g)$. *Als* f *continu is in* a *en als bovendien* g *continu is in* $f(a)$, *dan is de samenstelling* $g \circ f$ *continu in* a.

Het bewijs is weer geheel analoog aan het bewijs van de overeenkomstige stelling in Analyse 1. We verwijzen dan ook naar het Analyse 1 diktaat.

Opmerking 1.3.13 De substitutiestelling geeft ons een middel in handen om vele continue functies in n variabelen te behandelen. Voorbeeld: de functie $(x, y, z) \mapsto 1 + x^2 + y^2 + xyz$ is een veeltermfunctie, dus continu. De functie $\sin : R \to R$ is continu. Met de substitutieregel zien we nu direct dat door $(x, y, z) \mapsto \sin(1 + x^2 + y^2 + xyz)$ een continue functie gedefinieerd wordt. Op deze wijze kunnen we verder gaan. Zo is de functie

$$f(x, y, z) = \frac{e^{xz \sin(1 + x^2 + y^2 + xyz)}}{2 + \cos\left(\frac{x^2 y}{1 + e^z}\right)}$$

continu op R^3 (ga na, let in het bijzonder op de noemer).

Alles wat we tot nu toe behandeld hebben is een tamelijk voor de hand liggende generalisatie van hetgeen eerder voor functies op R aan de orde is geweest. Toch moeten we de volgende subtiliteit niet onvermeld laten: het is mogelijk dat een functie $f : R^n \to R$ continu is in elk van de variabelen afzonderlijk, maar niet continu in de zin van Definitie 1.3.2. We illustreren dit met het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 1.3.14 We beschouwen de scalaire functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ als } (x,y) \neq (0,0) \text{ en } f(0,0) = 0.$$

Op $\mathrm{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ is f een rationale functie en dus is f daar continu. In het punt $(0,0)$ laten de rekenregels ons in de steek: we behandelen het apart.

De functie $x \mapsto f(x,0)$ is identiek gelijk aan 0, dus continu in $x = 0$. Eenzelfde opmerking geldt voor de functie $y \mapsto f(0,y)$. Combineren we dit met de continuïteit van de functie f buiten $(0,0)$ dan zien we dat voor elke $(x_0,y_0) \in \mathrm{R}^2$ geldt dat de functies $x \mapsto f(x,y_0)$ en $y \mapsto f(x_0,y)$ continu zijn; m.a.w. de functie f is continu in elk van de variabelen afzonderlijk.

Zij $m \in \mathrm{R}$ en zij $L_m = \{(x,y)|y = mx\}$, de lijn door $(0,0)$ met richtingscoëfficiënt m. Dan is, voor vaste $m \in \mathrm{R}$,

$$\lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0} \frac{m^2 t}{1+m^4t^2} = 0.$$

Dus zelfs langs elke rechte door $(0,0)$ nadert $f(x,y)$ tot nul als $(x,y) \to (0,0)$.

Toch is f in $(0,0)$ niet continu! Want stel dat f dat wel was. Dan zou gelden

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Met de substitutieregel zou dan volgen $\lim_{t\to 0} f(t^2,t) = 0$. Echter, voor elke $t \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$ is $f(t^2,t) = \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}$, tegenspraak.

Om meer inzicht in de structuur van f te krijgen, zoeken we verzamelingen waarop f constant is. Langs de x-as en de y-as heeft f de waarde nul. Voor iedere $\lambda \in \mathrm{R}$ definiëren we de verzameling P_λ als volgt: $P_\lambda = \{(x,y) \mid y \in \mathrm{R}, x = \lambda y^2\}$. Voor $\lambda \neq 0$ is P_λ een parabool, terwijl P_0 de y-as is. Op elke verzameling $P_\lambda \setminus \{(0,0)\}$ is f constant en heeft daar de waarde $\frac{\lambda}{\lambda^2+1}$. De vereniging van al deze verzamelingen is gelijk aan R^2 met weglating van de x-as. De mogelijke waarden van f zijn dus de waarden van de functie $w(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$. Door differentiëren ziet men in dat de functie w het interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ als waardenverzameling heeft. De extreme waarde $\frac{1}{2}$ wordt aangenomen voor $\lambda = 1$; langs $P_1 \setminus \{(0,0)\}$ heeft f de waarde $w(1) = \frac{1}{2}$, zoals we boven reeds zagen. Merk op dat $f(x,y)$ tot $w(\lambda)$ nadert als (x,y) langs P_λ tot $(0,0)$ nadert. Meetkundig zien we in dat f wel langs *rechte* lijnen door $(0,0)$ tot nul nadert.

1.4 Het visualiseren van functies van meer veranderlijken

Functies $f : \mathrm{R}$ æ R kunnen we visualiseren door het schetsen van hun grafiek in het vlak. Voor functies $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p kunnen we nog steeds de grafiek graf f definiëren als deelverzameling van $\mathrm{R}^{n+p} = \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^p$:

$$\operatorname{graf} f = \{(u,v) \in \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^p \mid u \in \operatorname{dom}(f),\ \ v = f(u)\}. \tag{1.2}$$

Het schetsen van deze grafiek is uiteraard lastig als $n + p > 3$; de methode wordt dan ook vooral gebruikt als $n = 2, p = 1$. We geven een voorbeeld.

Voorbeeld 1.4.1 We beschouwen de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = x^2 + y^2$. De grafiek van deze functie wordt gegeven door

$$\operatorname{graf} f = \{(x, y, x) \in \mathrm{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\},$$

of, korter gezegd, door de vergelijking $z = x^2 + y^2$ in R^3. Herschrijven we deze vergelijking als $z = \|(x, y)\|^2$, dan zien we dat de grafiek invariant is onder rotaties rond de z-as. De doorsnijding van de grafiek met het vlak $y = 0$ wordt gegeven door $z = x^2$ en is een parabool. De grafiek van f vinden we door deze parabool rond de z-as te wentelen.

Voorbeeld 1.4.2 We beschouwen de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, gedefinieerd door $f(x, y) = y^2 - x^2$. De grafiek van f wordt gegeven door de vergelijking $z = y^2 - x^2$ in R^3. De doorsnijding van deze grafiek met het vlak $y = c$ (met $c \in \mathrm{R}$ een constante) is een 'bergparabool' met top in het punt $(0, c, c^2)$. Deze toppen liggen op een 'dalparabool' in het (y, z)–vlak. De grafiek heeft dus de vorm van een zadel: zie Figuur 1. We komen later op dit voorbeeld terug.

Figuur 1: $z = y^2 - x^2$

Het gedrag van scalaire functies op R^2 of R^3 kan men dikwijls inzichtelijk maken door het schetsen van hun *niveauverzamelingen.*

Is $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ een scalaire functie en $c \in \mathrm{R}$ een constante dan definiëren we de niveauverzameling N_c voor het niveau c door

$$N_c = f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathrm{R}^n \mid x \in \operatorname{dom}(f), \;\; f(x) = c\}.$$

Is $n = 2$ dan spreken we van een *niveaulijn*; is $n = 3$ dan spreken we van een *niveauoppervlak.*

Voorbeeld 1.4.3 We beschouwen nogmaals de functie uit Voorbeeld 1.4.1: $f(x, y) = x^2 + y^2$. De niveauverzameling N_c wordt gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 = c$, en is dus leeg als $c < 0$, een punt als $c = 0$, en een cirkel met straal $\sqrt{c}$ als $c > 0$. Merk op dat de niveauverzameling N_c verkregen wordt door de doorsnijding van $\operatorname{graf} f$ met het vlak $z = c$ loodrecht te projecteren op het (x, y)-vlak (uiteraard is dit een algemeenheid).

Voorbeeld 1.4.4 We beschouwen nogmaals de functie $f(x, y) = y^2 - x^2$ uit Voorbeeld 1.4.2. De niveaulijn N_c wordt gegeven door $y^2 - x^2 = c$. Voor $c = 0$ is dit de vereniging van de lijnen $y = \pm x$. Voor $c > 0$ is N_c een hyperbool in het gebied $|x| < |y|$ (zie de schets in Figuur 2), en voor $c < 0$ is N_c een hyperbool in het gebied $|x| > |y|$. In het bijzonder ziet men dat f strikt groter dan nul is in op de verzameling $|x| < |y|$, en strikt kleiner dan nul op de verzameling $|x| > |y|$.

Figuur 2: niveaulijnen $y^2 - x^2 = c$

Voorbeeld 1.4.5 We beschouwen de functie $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$, met gegeven constanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Het niveauoppervlak N_c wordt gegeven door de vergelijking $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = c$. Het is leeg als $c < 0$, bestaat uit de oorsprong als $c = 0$, en is een ellipsoïde als $c > 0$. Meer inzicht in de structuur van N_c voor $c > 0$ verkrijgt men door de lineaire afbeelding $L : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ te beschouwen die gegeven wordt door de volgende diagonaalmatrix ten aanzien van de standaardbases:

$$\operatorname{mat} L = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c}{\beta}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{c}{\gamma}} \end{pmatrix}.$$

Men gaat gemakkelijk na dat N_c gegeven door $||L^{-1}(x, y, z)|| = 1$; m.a.w. N_c is het beeld van de eenheidssfeer $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onder de lineaire afbeelding L.

Tenslotte beschouwen we nog het geval van een afbeelding $f : \mathrm{R}^2$ æ R^2. Het gedrag van zo'n afbeelding kan soms inzichtelijk gemaakt worden door de beelden van de lijnen $x = a$ en $y = b$ (of andere –eventueel gekromde– lijnen) te bestuderen. Als voorbeeld beschouwen we een afbeelding die later een belangrijke rol zal spelen bij de behandeling van de complexe exponentiële functie.

Voorbeeld 1.4.6 Laat $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd zijn door $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Deze afbeelding beeldt de lijn $x = a$ af op de verzameling

$$C_a = \{e^a \cos y, e^a \sin y) \mid y \in \mathrm{R}\}.$$

Dit is de cirkel met middelpunt 0 en straal e^a. Laat men y de gehele $\mathbb{R}$ in positieve richting doorlopen, dan doorloopt het beeld $f(a, y)$ de cirkel C_a oneindig vaak in positieve zin. Daarbij wordt ieder lijnstuk $[b, b + 2\pi[$ $(b \in \mathbb{R})$ bijectief op C_a afgebeeld.

De afbeelding f beeldt de lijn $y = b$ af op de verzameling:

$$R_b = \{e^x(\cos b, \sin b) \mid x \in \mathbb{R}\};$$

dit is de open halfrechte vanuit de oorspong door het punt $(\cos b, \sin b)$ van de eenheidscirkel. Merk op dat f de lijn $y = b$ bijectief afbeeldt op R_b. Zie Figuur 3.

Figuur 3: $\quad f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

1.5 Open en gesloten in $\mathbb{R}^n$

Uit het college Analyse 1 kent u de volgende stellingen over continue functies, die het fundament van de analyse vormen.

Laat $I \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval zijn. Dan neemt iedere continue functie $f : I \to \mathbb{R}$ op I zijn maximum aan.

Laat $I \subset \mathbb{R}$ een gesloten en begrensd interval zijn. Dan is iedere continue functie $I \to \mathbb{R}$ ook uniform continu op I.

In de volgende paragraaf zullen we de uitbreidingen van deze stellingen naar functies van meer variabelen behandelen. Een van de complicaties daarbij is dat op $\mathbb{R}^n$ geen ordening bestaat die zich goed gedraagt ten aanzien van de operaties 'optelling' en 'scalarvermenigvuldiging'. Daarom kunnen we bijvoorbeeld geen intervallen in $\mathbb{R}^n$ definiëren die de eigenschappen hebben die we uit de analyse op $\mathbb{R}$ gewend zijn.

Een andere complicatie is dat de meetkunde van $\mathbb{R}^n$ gecompliceerder is dan die van $\mathbb{R}$. Voor allerlei problemen is het nodig om functies te kunnen definiëren op verzamelingen van verschillende vorm, denk bijvoorbeeld aan functies gedefinieerd op een rechthoek of een cirkelschijf in $\mathbb{R}^2$, of aan functies gedefinieerd op een blok, een bol, een boloppervlak, etc. in $\mathbb{R}^3$. Voor de analyse zal daarbij vooral van belang zijn de structuur van die verzamelingen die te maken heeft met het nemen van limieten. Dit is de motivatie voor de onderstaande definities.

We beginnen met het begrip bolomgeving.

Definitie 1.5.1 Als $a \in \mathrm{R}^n$ en $r > 0$, dan wordt de (open) *bol* met middelpunt a en straal r gedefinieerd door:

$$B(a;r) := \{x \in \mathrm{R}^n \mid \quad \|x - a\| < r\}.$$

Het limietbegrip kan in termen van bolomgevingen geherformuleerd worden. Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p een functie zijn, en veronderstel dat $a \in \mathrm{R}^n, b \in \mathrm{R}^p$. Dan geldt $\lim_{x \to a} f(x) = b$ dan en slechts dan als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat:

$$f(\, B(a;\delta) \cap \mathrm{dom}(f)\,) \subset B(b;\varepsilon)$$

(zie Figuur 4).

Figuur 4: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

In de bovenstaande formule is de eerste bol in R^n en de tweede bol in R^p gelegen. Dit is in de huidige context de enige zinvolle interpretatie; we brengen het daarom niet tot uitdrukking in de notaties.

Uiteraard kan ook het continuïteitsbegrip in termen van bolomgevingen geformuleerd worden: een functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p is continu in een punt $a \in \mathrm{dom}(f)$ dan en slechts dan als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$f(\, B(a;\delta) \cap \mathrm{dom}(f)\,) \subset B(f(a);\varepsilon).$$

In het vervolg is V steeds een deelverzameling van R^n.

Definitie 1.5.2 **(Open verzameling)** Een punt $a \in V$ heet *inwendig punt* van V als er een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $B(a;\varepsilon) \subset V$. De verzameling van inwendige punten van V heet het *inwendige* van V en wordt genoteerd als V^{inw}. Merk op dat $V^{\mathrm{inw}} \subset V$. De verzameling V heet *open* als ieder punt van V inwendig is, m.a.w. als $V = V^{\mathrm{inw}}$.

Als voorbeeld van toepassing van deze definitie behandelen we het volgende lemma.

Lemma 1.5.3 *Zij $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Dan is de bol $B(a;r)$ open in $\mathbb{R}^n$.*

Bewijs: Het bewijs berust op de driehoeksongelijkheid voor de Euclidische norm.

Laat b een punt in $B(a;r)$ zijn, en schrijf $d = d(a,b) = ||b-a||$. Dan is $0 \leq d < r$. Derhalve bestaat er een $\varepsilon > 0$ met $\varepsilon < r - d$. Voor alle $x \in B(b;\varepsilon)$ geldt: $||x-b|| < \varepsilon$, dus ook:

$$||x-a|| \leq ||x-b|| + ||b-a|| < \varepsilon + d < r.$$

Dus $B(b;\varepsilon) \subset B(a;r)$ en er volgt dat b een inwendig punt van $B(a;r)$ is. Omdat b een willekeurig punt was is het bewijs voltooid. □

Definitie 1.5.4 **(Gesloten verzameling)** Een punt $a \in \mathbb{R}^n$ heet *verdichtingspunt* van V als voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt: $V \cap B(a;\varepsilon) \neq \emptyset$. De verzameling van verdichtingspunten van V heet de *afsluiting* van V en wordt genoteerd als $\overline{V}$. Merk op dat $V \subset \overline{V}$. De verzameling V heet *gesloten* als ieder verdichtingspunt van V tot V behoort, m.a.w. als $V = \overline{V}$.

Voor $a \in \mathbb{R}^n$ $r \geq 0$ definiëren we de 'gesloten' bol met middelpunt a en straal r door:

$$\bar{B}(a;r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x-a|| \leq r\}$$

De 'gesloten' bol is inderdaad gesloten:

Lemma 1.5.5 *Zij $a \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$. Dan is de verzameling $\bar{B}(a;r)$ gesloten. In het bijzonder is de verzameling $\{a\}$ gesloten.*

Bewijs: Laat b een verdichtingspunt van $\bar{B}(a;r)$ zijn. Dan kunnen we bij iedere $k \in \mathbb{N}$ een $b_k \in \bar{B}(a;r) \cap B(b,1/k)$ vinden. Met de driehoeksongelijkheid zien we nu dat geldt: $||a-b|| = ||(a-b_k)+(b_k-b)|| < r + 1/k$. Dus $||a-b|| < r + 1/k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$ en we concluderen dat $||a-b|| \leq r$, dus $b \in \bar{B}(a;r)$. Ieder verdichtingspunt van $\bar{B}(a;r)$ behoort derhalve tot $\bar{B}(a;r)$, waaruit het gesloten zijn vogt. De laatse bewering van het lemma volgt nu door $r = 0$ te nemen. □

Opmerking 1.5.6 **(Waarschuwing)** Een verzameling die niet open is, hoeft beslist niet gesloten te zijn. De deelverzameling $]0,1]$ van $\mathbb{R}$ is bijvoorbeeld niet open, maar ook niet gesloten.

De begrippen open en gesloten zijn complementair in de volgende zin:

Lemma 1.5.7 *Een verzameling $V \subset \mathbb{R}^n$ is open dan en slechts dan als zijn complement $\mathbb{R}^n \setminus V$ gesloten is.*

Bewijs: Schrijf $W = \mathbb{R}^n \setminus V$. Laat V open zijn, en veronderstel dat $a \in V$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon) \subset V$, dus $B(a;\varepsilon) \cap W = \emptyset$. Hieruit blijkt dat a geen verdichtingspunt van W is. We concluderen dat de verdichtingspunten van W tot het complement van V moeten behoren, dus tot W. Dus W is gesloten.

Voor de omgekeerde implicatie veronderstellen we dat W gesloten is. Laat a een punt van V zijn. Dan behoort a niet tot W, dus is ook geen verdichtingspunt van W. Daarom is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon) \cap W = \emptyset$. Maar dit betekent dat $B(a;\varepsilon)$ bevat is in het complement van W, dus in V. Dus $a \in V^{\text{inw}}$. Ieder punt van V is derhalve inwendig. □

Voorbeeld 1.5.8 Zij $V = \{x \in \mathrm{R}^n \mid ||x|| > 1\}$. Dan is V het complement van de gesloten verzameling $\bar{B}(0;1)$, dus open. We kunnen dit ook direkt vanuit de definitie inzien, door gebruik te maken van de driehoeksongelijkheid. Zij $b \in V$. Dan is $||b|| > 1$. Kies $\varepsilon > 0$ zo dat $||b|| - \varepsilon > 1$. Dan geldt voor alle $x \in B(b;\varepsilon)$ dat $||x|| \geq ||b|| - ||x - b|| > ||b|| - \varepsilon > 1$; derhalve is $B(b;\varepsilon) \subset V$. Ieder punt van V is dus inwendig.

Lemma 1.5.9 *De doorsnede van eindig veel open deelverzamelingen van* R^n *is open. De vereniging van een willekeurig stel open deelverzamelingen van* R^n *is open.*

Bewijs: Laat $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ een willekeurige collectie van open deelverzamelingen van R^n zijn. Is a een punt van hun vereniging $U = \cup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$, dan is er een $\alpha \in \mathcal{A}$ zo dat $a \in U_\alpha$. Omdat U_α open is, bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon) \subset U_\alpha$. Dus ook $B(a;\varepsilon) \subset U$. Derhalve is U open.

Veronderstel nu dat $\mathcal{A}$ eindig is, en zij $V = \cap_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$. Zij $a \in V$. Voor iedere $\alpha \in \mathcal{A}$ is $a \in U_\alpha$, dus er is een $\varepsilon_\alpha > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon_a) \subset U_\alpha$. Uit de eindigheid van $\mathcal{A}$ volgt dat $\varepsilon = \min\{\varepsilon_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ bestaat en positief is. Het is evident dat $B(a;\varepsilon) \subset U_\alpha$ voor ieder α, dus $B(a;\varepsilon) \subset V$. Hieruit volgt dat a inwendig punt van V is. Dus V is open. □

Voorbeeld 1.5.10 Zij $0 \leq r_1 < r_2$ een tweetal positieve reële getallen. Dan is de verzameling $R = \{x \in \mathrm{R}^n \mid r_1 < ||x|| < r_2\}$ open. Dit kan men direkt vanuit de definitie inzien, maar ook met behulp van het bovenstaande lemma. Immers $V = B(0;r_2) \cap U$ met $U = \{x \in \mathrm{R} \mid ||x|| > r_1\}$. De bol $B(0;r_2)$ is open, terwijl U het complement is van de gesloten bol $\bar{B}(0;r_1)$ dus ook open.

In verband met Lemma 1.5.7 gedragen gesloten verzamelingen zich complementair bij het nemen van doorsnedes en verenigingen:

Lemma 1.5.11 *De vereniging van eindig veel gesloten deelverzamelingen van* R^n *is gesloten. De doorsnede van een willekeurig stel gesloten deelverzamelingen van* R^n *is gesloten.*

Definitie 1.5.12 Zij $V \subset \mathrm{R}^n$. De verzameling $\partial V := \overline{V} \setminus V^{\mathrm{inw}}$ heet de *rand* van V.

Voorbeeld 1.5.13 Zij $a \in \mathrm{R}^n$, $r > 0$ en zij $V = B(a;r)$. Dan is V open, dus $V^{\mathrm{inw}} = V$.

We zullen nu aantonen dat $\bar{V} = \bar{B}(a;r)$. Zij $b \in \bar{B}(a;r)$. Beschouw het lijnstuk L in R^n met beginpunt a en eindpunt b. Het bestaat uit de punten $b_t = a + t(b - a)$ $(t \in [0,1])$. Voor alle $0 \leq t < 1$ geldt $b_t \in B(a;r)$. Voorts is $\lim_{t\to 1} b_t = b$, dus voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $t \in [0,1[$ met $b_t \in B(b;\varepsilon)$. Hieruit blijkt dat $B(a;r) \cap B(b;\varepsilon) \neq \emptyset$ voor elke $\varepsilon > 0$. Derhalve is b een verdichtingspunt van V. We concluderen dat $\bar{B}(a;r) \subset \bar{V}$. Anderzijds is iedere $v \in \bar{V}$ verdichtingspunt van V, dus zeker van de grotere verzameling $\bar{B}(a;r)$; de laatste verzameling is gesloten dus $v \in \bar{B}(a;r)$. We concluderen dat $\bar{V} \subset \bar{B}(a;r)$. De omgekeerde inclusie was al aangetoond, dus $\bar{V} = \bar{B}(a;r)$.

Tenslotte wordt de rand van V gegeven door $\partial V = \bar{V} \setminus V^{\mathrm{inw}} = \bar{B}(a;r) \setminus B(a;r) = \{x \in \mathrm{R}^n \mid ||x - a|| = r\}$, dat is, de sfeer met middelpunt a en straal r.

We eindigen deze paragraaf met een nuttige karakterisering van continuïteit.

Lemma 1.5.14 *Laat $f : V \to \mathbb{R}^p$ een functie zijn met als domein een open deelverzameling V van $\mathbb{R}^n$. De functie f is continu dan en slechts dan als voor iedere open deelverzameling $U \subset \mathbb{R}^p$ geldt dat het volledig origineel $f^{-1}(U) = \{x \in V \mid f(x) \in U\}$ open is in $\mathbb{R}^n$.*

Bewijs: Veronderstel eerst dat f continu is, en dat $U \subset \mathbb{R}^p$ een open deel is. We zulen aantonen dat $f^{-1}(U)$ open is. Veronderstel daartoe dat $a \in f^{-1}(U)$. Dan is $f(a) \in U$, en omdat U open is, is $f(a)$ een inwendig punt van U, d.w.z. er bestaat een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(f(a);\varepsilon) \subset U$. Hierbij bestaat een $\delta_1 > 0$ zo dat $f(B(a;\delta_1) \cap V) \subset B(f(a);\varepsilon)$. Uit het open zijn van V volgt het bestaan van een $\delta_2 > 0$ zo dat $B(a;\delta_2) \subset V$. Zij nu $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dan is $\delta > 0$ terwijl $B(a;\delta) \subset V$ en $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset U$. Hieruit volgt dat $B(a;\delta) \subset f^{-1}(U)$, dus a is een inwendig punt van $f^{-1}(U)$. Omdat a een willekeurig punt van $f^{-1}(U)$ was concluderen we dat $f^{-1}(U)$ open is.

Veronderstel nu omgekeerd dat $f^{-1}(U)$ open is voor iedere open $U \subset \mathbb{R}^p$. Zij $a \in V$. We zullen bewijzen dat f continu is in a. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $B(f(a);\varepsilon)$ een open deel van $\mathbb{R}^p$ (gebruik Lemma 1.5.3). Derhalve is $f^{-1}(B(f(a);\varepsilon)$ een open deel van V. Dit open deel bevat het punt a, dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset f^{-1}(B(f(a);\varepsilon))$. Dit laatste betekent precies dat $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon)$. We concluderen dat f continu is in a. □

Voorbeeld 1.5.15 We beschouwen de deelverzameling V van $\mathbb{R}^2$ bestaande uit de punten (x,y) met $0 < y^2 - x^2 < 1$. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y^2 - x^2$ is een veeltermfunctie, dus continu. De verzameling V is het volledig origineel $f^{-1}(]0,1[)$; het interval $]0,1[$ is open in $\mathbb{R}$, dus V is open in $\mathbb{R}^2$.

Gevolg 1.5.16 *Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ een continue functie met domein $\mathbb{R}^n$ zijn. Dan is het volledig origineel $f^{-1}(S)$ van iedere gesloten deelverzameling $S \subset \mathbb{R}^p$ gesloten in $\mathbb{R}^n$. In het bijzonder is iedere niveauverzameling $N_c = f^{-1}(\{c\})$ $(c \in \mathbb{R}^p)$ gesloten in $\mathbb{R}^n$.*

Als voorbereiding op het bewijs bespreken we eerst een algemeen verzamelingstheoretisch resultaat voor afbeeldingen.

Lemma 1.5.17 *Zij f een afbeelding van een verzameling A naar een verzameling B. Dan geldt voor iedere deelverzameling $V \subset B$ dat $f^{-1}(B \setminus V) = A \setminus f^{-1}(V)$.*

Bewijs: Zij $a \in A$. Dan geldt:

$$a \in f^{-1}(B \setminus V) \iff f(a) \in B \setminus V \iff f(a) \notin V \iff a \notin f^{-1}(V) \iff a \in A \setminus f^{-1}(V).$$

□

Bewijs van Gevolg 1.5.16: Laat S een gesloten deel van $\mathbb{R}^p$ zijn. Dan is $\mathbb{R}^p \setminus S$ open in $\mathbb{R}^p$. Wegens Lemma 1.5.7 is de verzameling $f^{-1}(\mathbb{R}^p \setminus S)$ open in $\mathbb{R}^n$. De laatste verzameling is echter gelijk aan $\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(S)$ wegens het bovenstaande lemma. Met Lemma 1.5.7 volgt nu weer dat $f^{-1}(S)$ gesloten is in $\mathbb{R}^n$.

Voor de laatste bewering merken we op dat de puntverzameling $\{c\}$ gesloten is in $\mathbb{R}^p$, wegens Lemma 1.5.5 □

Voorbeeld 1.5.18 Voor een gegeven constante $c \in \mathbb{R}$ is de verzameling $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^2 = c\}$ gesloten in $\mathbb{R}^2$. Het is immers een niveauverzameling van een continue functie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zie ook Voorbeeld 1.5.15 en Figuur 2.

1.6 De stelling van Bolzano-Weierstrass

De twee in het begin van §1.5 genoemde stellingen over continue functies berusten op de volledigheid van R. We brengen het volledigheidsaxioma nog eens in herinnering:

Iedere niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van R *heeft een kleinste bovengrens (sup).*

In de formulering van dit axioma speelt de ordening $<$ een rol. (Ga zelf na waarom.) Omdat we in R^n niet over een dergelijke ordening beschikken is het volledigheidsaxioma niet zonder meer uit te breiden naar R^n.

Gelukkig is het volledigheidsaxioma equivalent met de stelling van Bolzano-Weierstrass (Analyse 1, Stelling 5.10.7) (bij het in Analyse 1 gegeven bewijs van deze stelling werd gebruik gemaakt van het volledigheidsaxioma; laat zelf zien dat het volledigheidsaxioma op zijn beurt uit de stelling van Bolzano-Weierstrass volgt). In de stelling van Bolzano-Weierstrass komt de ordening niet voor en deze stelling is *wel* uit te breiden naar R^n.

Stelling 1.6.1 **(Bolzano-Weierstrass)** *Iedere begrensde rij in* R^n *heeft een deelrij die convergeert naar een punt van* R^n.

Bewijs: Het bewijs van deze stelling bestaat uit een coördinaatsgewijze reductie naar de stelling voor R (het geval $n = 1$) die in Analyse 1 bewezen is.

Zij (x_k) een begrensde rij in R^n. Schrijf $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$. Dan geldt voor iedere $1 \leq j \leq n$ dat $|x_{kj}| \leq \|x_k\|$, dus $(x_{kj})_{k\geq 1}$ is een begrensde rij in R. Uit de stelling van Bolzano-Weierstrass voor R volgt nu dat er een rij $k(1) < k(2) < \ldots$ van natuurlijke getallen bestaat, zo dat de deelrij $(x_{k(\nu)1})_{\nu\geq 1}$ van $(x_{k1})_{k\geq 1}$ convergent is met limiet $a_1 \in \mathrm{R}$. De rij $(x_{k(\nu)2})_{\nu\geq 1}$ is begrensd in R, en heeft daarom een convergente deelrij. Door uitdunning van de rij $k(1), k(2), \ldots$ kunnen we dus voor elkaar krijgen dat ook $\lim_{\nu\to\infty} x_{k(\nu)2} = a_2$ bestaat. Door dit argument achtereenvolgens voor $j = 1, \ldots, n$ toe te passen op de verkregen rijen $(x_{k(\nu)j})_{\nu\geq 1}$ zien we dat we een stijgende rij $(k(\nu))_{\nu\geq 1}$ van indices kunnen vinden zo dat voor elke $1 \leq j \leq n$ de limiet $a_j := \lim_{\nu\to\infty} x_{k(\nu)j}$ bestaat. Met behulp van Lemma 1.2.9 zien we nu dat de rij $(x_{k(\nu)})_{\nu\geq 1}$ het punt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ als limiet heeft. □

Als eerste toepassing van de stelling van Bolzano-Weierstrass behandelen we een nuttige karakterisering van begrensde gesloten deelverzamelingen van R^n.

Stelling 1.6.2 *Zij* $V \subset \mathrm{R}^n$. *Dan zijn de volgende beweringen equivalent:*

(a) *de verzameling* V *is gesloten en begrensd;*

(b) *iedere in* V *gelegen rij heeft een convergente deelrij met een in* V *gelegen limiet.*

Bewijs: (a) $\Rightarrow$ (b): Stel dat (a) geldt, en laat $(x_k)_{k\geq 1}$ een rij in V zijn. Deze rij is begrensd, dus heeft een convergente deelrij $(x_{k(j)})_{j\geq 1}$, wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass. Zij a de limiet van deze deelrij. Dan is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathrm{N}$ zo dat $j \geq N \Rightarrow x_{k(j)} \in B(a;\varepsilon)$, dus $B(a;\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$. Hieruit volgt dat $a \in \overline{V} = V$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Laat (b) gelden. Veronderstel dat V niet begrensd is. Dan bestaat er een rij (x_k) met $x_k \in V$ en $\|x_k\| \geq k$. Iedere deelrij van (x_k) is onbegrensd, en kan dus niet convergent zijn, tegenspraak. Derhalve is V begrensd. Laat a een verdichtingspunt van V zijn. Dan kan men voor iedere $k \geq 1$ een $x_k \in \mathrm{R}^n$ kiezen met $x_k \in B(a; 1/k) \cap V$. Uit $\|x_k - a\| \leq 1/k$ volgt dat $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Er is een deelrij van (x_k) die een in V gelegen limiet b heeft. Die deelrij moet a als limiet hebben, dus $a = b \in V$. Ieder verdichtingspunt van V behoort dus tot V, en we concluderen dat (a) geldt. □

Opmerking 1.6.3 In het bewijs van de bovenstaande stelling speelt de stelling van Bolzano-Weierstrass een belangrijke rol. Merk omgekeerd op dat voor iedere $R > 0$ de verzameling $\bar{B}(0; R) = \{x \in \mathrm{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$ gesloten en begrensd is. Derhalve geldt de bewering (b) uit Stelling 1.6.2 met $V = \bar{B}(0; R)$: dit is precies de stelling van Bolzano-Weierstrass voor een in $\bar{B}(0; R)$ gelegen rij.

We komen nu bij een tweede belangrijke toepassing van de stelling van Bolzano-Weierstrass. Het volgende resultaat is het analogon van Stelling 6.6.3 uit het Analyse 1 diktaat.

Stelling 1.6.4 *Laat $V \subset \mathrm{R}^n$ een gesloten en begrensde verzameling zijn, en $f : V \to \mathrm{R}^p$ een continue functie. Dan is $f(V)$ gesloten en begrensd.*

Bewijs: Laat (y_k) een rij in $f(V)$ zijn. Dan bestaat er voor iedere y_k een $x_k \in V$ zo dat $y_k = f(x_k)$. De rij (x_k) heeft een convergente deelrij $(x_{k(j)})$ met limiet $a \in V$. Uit de continuïteit van f in a volgt dat

$$f(a) = \lim_{j\to\infty} f(x_{k(j)}) = \lim_{j\to\infty} y_{k(j)}.$$

De rij (y_k) heeft dus een deelrij die convergent is met een in $f(V)$ gelegen limiet. Gebruik nu de karakterisering uit de bovenstaande stelling. □

Gevolg 1.6.5 *Laat $V \subset \mathrm{R}^n$ een gesloten en begrensde niet-lege verzameling zijn, en $f : V \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan neemt f op V een minimum en een maximum aan, dwz. er zijn $a, b \in V$ zo dat:*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad (x \in V).$$

Bewijs: Zie het bewijs van Gevolg 6.6.4 in het Analyse 1 diktaat. □

De derde belangrijke toepassing van Stelling 1.6.2 is de volgende generalisatie van Stelling 6.7.3 uit Analyse 1 (uniforme continuïteit van een continue functie op een begrensde gesloten verzameling).

Stelling 1.6.6 *Laat V een gesloten en begrensd deel van R^n zijn. Dan is iedere continue functie $f : V \to \mathrm{R}^p$ uniform continu op V.*

Bewijs: Veronderstel dat er een functie $f : V \to \mathrm{R}^p$ bestaat die continu is maar niet uniform continu. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ met de volgende eigenschap: bij iedere $\delta > 0$ is er een tweetal punten $x, y \in V$ te vinden met $\|x - y\| < \delta$, maar $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$. In het bijzonder is er bij iedere $k \geq 1$ een tweetal punten $x_k, y_k \in V$ te vinden met $\|x_k - y_k\| < 1/k$, en $\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \varepsilon$.

De rij $(x_k) \in V$ bezit een convergente deelrij $(x_{k(j)})$ met $a = \lim_{j\to\infty} x_{k(j)} \in V$. De rij $(y_{k(j)})$ bezit eveneens een convergente deelrij, dus door de rij van indices $k(1) < k(2) < \ldots$ eventueel te vervangen door een deelrij kunnen we bereiken dat $a = \lim_{j\to\infty} x_{k(j)}$ en $b = \lim_{j\to\infty} y_{k(j)}$ bestaan en tot V behoren. Uit $\|x_k - y_k\| < 1/k$ volgt door limietovergang dat $a = b$. Uit de continuïteit van f in a volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f(B(a;\delta) \cap V) \subset B(f(a);\varepsilon/2)$. Voor j voldoende groot (zeg $j \geq N$) geldt $x_{k(j)}, y_{k(j)} \in B(a;\delta)$, dus:

$$\|f(x_{k(j)}) - f(y_{k(j)})\| \leq \|f(x_{k(j)}) - f(a)\| + \|f(a) - f(y_{k(j)})\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dit is in tegenspraak met de keuzes van de x_k, y_k. $\square$

Hoofdstuk 2

Partieel differentiëren

2.1 Partiële afgeleiden

In het vervolg veronderstellen we steeds dat f een scalaire functie is, gedefinieerd op een deelverzameling $V \subset \mathrm{R}^n$.

De variabele in R^n noteren we met $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Als we alle variabelen op de j-de na vasthouden $(1 \le j \le n)$, dan kunnen we $f(x_1, \ldots, x_n)$ beschouwen als functie van de overgebleven reële variabele x_j. Als V en f redelijk zijn kunnen we de ontstane functie differentiëren. De beschreven procedure heet: *partieel differentiëren* naar de variabele x_j. Laten we de procedure preciezer analyseren.

Laat a een vast punt van V zijn, en beschouw de functie $g : \mathrm{R}$ æ R gedefinieerd door

$$g(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Dan behoort a_j tot het domein van g. We proberen de functie g nu in het punt a_j te differentiëren. Daartoe is het nodig dat g in ieder geval gedefinieerd is op een interval dat a_j bevat. Uit het volgende lemma blijkt dat dit zeker het geval is als a een inwendig punt van de verzameling V is.

Lemma 2.1.1 *Laat a een inwendig punt van de verzameling $V \subset \mathrm{R}^n$ zijn. Dan bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat de verzameling*

$$V(a; \varepsilon) := \{x \in \mathrm{R}^n \mid |x_j - a_j| < \varepsilon \quad (\forall 1 \le j \le n)\}$$

bevat is in V.

Opmerking 2.1.2 Merk op dat $V(a;\varepsilon)$ het Cartesisch produkt is van de open intervallen $]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[$ $(1 \le j \le n)$. Als $n = 2$ dan is $V(a;\varepsilon)$ dus het open vierkant in R^2 met middelpunt a en zijden evenwijdig aan de coördinaatassen en met lengte 2ε. Als $n = 3$, dan is $V(a;\varepsilon)$ de open kubus met middelpunt a en ribben evenwijdig aan de coordinaatassen en met lengte 2ε. Houd dit in gedachten bij de bestudering van het onderstaande bewijs.

Bewijs: Omdat a inwendig punt is, bestaat er een $\varepsilon' > 0$ zo dat $B(a;\varepsilon') \subset V$. Zij nu $\varepsilon = \varepsilon'/n$. Dan geldt voor $x \in V(a;\varepsilon)$ dat

$$\|x - a\| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| < n\varepsilon'/n = \varepsilon'.$$

Dus $V(a;\varepsilon) \subset B(a;\varepsilon') \subset V$. □

Keren we terug naar de situatie beschreven voor het lemma, dan zien we dat g gedefinieerd is op $]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[$, met ε als in het bovenstaande lemma.

Definitie 2.1.3 Laat f : R^n æ R een scalaire functie zijn, en a een inwendig punt van zijn domein $\mathrm{dom}(f)$. De functie f heet in a partieel differentieerbaar naar de k-de variable $(1 \leq k \leq n)$ als de functie $g : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, R æ R differentieerbaar is in a_k. In dat geval heet

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := g'(a_k) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=a_k} f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

de *partiële afgeleide* van f in a naar de k-de variabele.

De functie f heet partieel differentieerbaar in a als f in a partieel differentieerbaar is naar iedere variabele. Is $U \subset \mathrm{dom}(f)$ een open verzameling, dan heet f partieel differentieerbaar op U als f partieel differentieerbaar is in ieder punt $a \in U$.

Opmerking 2.1.4 In de bovenstaande definitie hebben we stilzwijgend verondersteld dat de variabele in R^n genoteerd wordt met $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Uiteraard kan men ook andere notaties voor de variabelen gebruiken, zoals $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Voor de k-de partiële afgeleide wordt in dat geval de overeenkomstige notatie $\partial f / \partial y_k$ gebruikt.

Een andere veelgebruikte notatie voor de partiële afgeleide naar de k-de variabele is:

$$D_k f(a) := \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Het voordeel van deze notatie is dat hij, net als de partiële afgeleide zelf, onafhankelijk is van enige naamgeving van de variabelen.

Voorbeeld 2.1.5 We beschouwen de veeltermfunctie $f(x, y, z) = 1 + x^2 y + x y^2 z$ op R^3. Laat $a = (a_1, a_2, a_3)$ een gegeven punt in R^3 zijn. Dan is

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=a_2} 1 + a_1^2 t + a_1 t^2 a_3 = \left(a_1^2 + 2a_1 t a_3\right)_{t=a_2} = a_1^2 + 2a_1 a_2 a_3.$$

Merk op dat we in het voorgaande de gebruikelijke rekenregels voor differentiëren naar een reële variabele gebruikt hebben. Met behulp van deze rekenregels ziet men snel in dat de functie f in elk punt partieel differentieerbaar is. De partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ kan men daarom opvatten als functies $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$. Uit de bovenstaande berekening volgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + 2xyz.$$

De bovenstaande berekening weerspiegelt de precieze definitie, maar is nogal omslachtig. In de praktijk berekent men de partiële afgeleide naar een bepaalde variabele door naar die variabele te differentiëren, waarbij de andere variabelen als constant beschouwd worden. Uiteraard kunnen daarbij de gebruikelijke rekenregels toegepast worden. Zo vindt men:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy + y^2 z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy^2.$$

Voorbeeld 2.1.6 Als tweede voorbeeld beschouwen we de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = \sin(xy^2)$. Door toepassing van de rekenregels voor gewone differentiatie (in het bijzonder de kettingregel) zien we dat f partieel differentieerbaar is. De partiële afgeleiden worden gegeven door:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2\cos(xy^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\cos(xy^2).$$

2.2 Toepassing: extrema

Definitie 2.2.1 Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R een scalaire functie zijn. Men zegt dat f een *lokaal maximum* heeft in het punt $a \in \mathrm{dom}(f)$ als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$f(x) \leq f(a) \qquad \text{voor alle} \qquad x \in B(a;\delta) \cap \mathrm{dom}(f).$$

Op soortgelijke wijze definieert men het begrip *lokaal minimum*. De functie f heeft een *extremum* in $a \in \mathrm{dom}(f)$ als f in a een lokaal maximum of een lokaal minimum heeft.

Een belangrijke toepassing van partiële differentiatie is geformuleerd in het volgende lemma.

Lemma 2.2.2 *Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R een scalaire functie zijn, en veronderstel dat a een inwendig punt van* $\mathrm{dom}(f)$ *is waarin f partieel differentieerbaar is. Als f in a een extremum heeft, dan geldt:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0 \qquad (1 \leq k \leq n).$$

Bewijs: We veronderstellen dat f in a een lokaal maximum heeft. Het geval van een lokaal minimum kan op soortgelijke wijze behandeld worden.

Omdat a een inwendig punt is bestaat er een $\delta_1 > 0$ zo dat $B(a;\delta_1) \subset \mathrm{dom}(f)$. Voorts bestaat er een $\delta_2 > 0$ zo dat $f \leq f(a)$ op $B(a;\delta_2) \cap \mathrm{dom}(f)$. Er bestaat een $\varepsilon > 0$ zo dat $V(a;\varepsilon) \subset B(a;\min(\delta_1,\delta_2))$. Nu geldt $V(a;\varepsilon) \subset \mathrm{dom}(f)$ en $f \leq f(a)$ op $V(a;\varepsilon)$. Fixeer $1 \leq k \leq n$ en beschouw de functie $g :]a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon[\to \mathrm{R}$ gedefinieerd als in Definitie 2.1.3. Uit de partiële differentieerbaarheid van f in a volgt per definitie dat g differentieerbaar is in a_k met afgeleide $g'(a_k) = D_k f(a)$. Anderzijds geldt dat $g \leq f(a) = g(a_k)$ op zijn domein; g heeft derhalve een maximum in a_k en er volgt $g'(a_k) = 0$. Dus $D_k f(a) = 0$. $\square$

Definitie 2.2.3 Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R een scalaire functie zijn, en a een inwendig punt van zijn domein $\mathrm{dom}(f)$. Als f partieel differentieerbaar is in a, dan is de *gradiënt* van f in a de vector in R^n gedefinieerd door:

$$\mathrm{grad}\, f(a) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)).$$

Een inwendig punt $a \in \mathrm{dom}(f)$ waarvoor $\mathrm{grad}\, f(a) = 0$ heet een *stationair* (of ook wel een *kritiek*) punt van f.

Het bovenstaande lemma wordt in de praktijk meestal in de volgende vorm gebruikt:

Gevolg 2.2.4 *Laat $U \subset \mathrm{R}^n$ een open deel zijn, en $f : U \to \mathrm{R}$ een partieel differentieerbare functie. Heeft f een extremum in het punt $a \in U$, dan is a een stationair punt van f.*

Is $U \subset \mathrm{R}^n$ een open deelverzameling en $f : U \to \mathrm{R}^n$ een partieel differentieerbare functie, dan wordt door $\mathrm{grad}\, f$ een vectorwaardige functie $U \to \mathrm{R}^n$ gedefinieerd. De mogelijke extrema van de functie f vindt men nu door de nulpunten van de functie $\mathrm{grad}\, f$ te bepalen. (N.B. een punt kan stationair zijn zonder dat sprake is van een extremum, zie Voorbeeld 2.2.8.)

Voorbeeld 2.2.5 $f(x, y) = x^2 + y^2$ (zie Voorbeeld 1.4.1). Dan is $(\mathrm{grad}\, f)(x, y) = (0, 0)$ dan en slechts dan als $(x, y) = (0, 0)$. Inderdaad heeft f alleen een extremum (een minimum) in $(0, 0)$.

Voorbeeld 2.2.6 $f(x, y) = xy$. Dan is $(\mathrm{grad}\, f)(x, y) = (y, x)$. Dus $(\mathrm{grad}\, f)(0, 0) = (0, 0)$. Toch heeft f in $(0, 0)$ geen extremum, zoals men direct inziet door het tekenverloop van f te bekijken. We zien dat $(\mathrm{grad}\, f)(a) = 0$ geen voldoende voorwaarde is voor het bestaan van een lokaal extremum.

Voorbeeld 2.2.7 $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2)$. Uitwerken levert: $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + 2y^2 - y^4$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4y - 4y^3 = 4y(1 - y^2). \end{aligned}$$

We zien dat $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ op de lijnen $x = -1$, $x = 0$ en $x = 1$, terwijl $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ op de lijnen $y = -1, y = 0$ en $y = 1$. Hieruit volgt dat f negen stationaire punten heeft:

$$(0, 0), \quad (0, \pm 1), \quad (\pm 1, 0), \quad (\pm 1, \pm 1).$$

De niveaulijn $N_0 = f^{-1}(\{0\})$ bestaat uit de vereniging van de lijnen $y = x$ en $y = -x$ met de cirkel $x^2 + y^2 = 2$. Het complement van N_0 bestaat uit samenhangende delen; op elk daarvan is f ofwel strikt negatief, ofwel strikt positief. De delen waarop f strikt positief is zijn in Figuur

5 gearceerd weergegeven.

Figuur 5: gearceerd is positief

Aan het tekenverloop zien we dat f in $(0,0)$ en in de vier punten $(\pm 1, \pm 1)$ geen extremum heeft.

In de overige vier stationaire punten moet f extrema hebben. Dit volgt uit een tamelijk subtiele redenering die we zullen geven voor het stationaire punt $(1,0)$. De overgebleven stationaire punten worden op soortgelijke wijze behandeld. We beschouwen de gesloten verzameling D van punten $(x,y) \in \mathrm{R}^2$ met $x \geq |y|$ en $x^2 + y^2 \leq 2$ (in de figuur: D is de afsluiting van het niet gearceerde open stuk dat $(1,0)$ bevat). Merk op dat het inwendige van D gegeven wordt door $D^{\mathrm{inw}} = D \setminus N_0$. De rand van D wordt dus gegeven door $\partial D = D \cap N_0$.

Omdat D een gesloten en begrensde verzameling is neemt de continue functie f een minimum aan in een punt $a \in D$ (Gevolg 1.6.5). Nu is $f = 0$ op de rand van D, en strikt kleiner dan nul op het inwendige D^{inw} van D. Derhalve moet a in de open verzameling D^{inw} liggen. Omdat f partieel differentieerbaar is op D^{inw} moet a een stationair punt van f zijn. Slechts één der stationaire punten van f is in D^{inw} gelegen, namelijk het punt $(1,0)$. Hieruit blijkt dat $a = (1,0)$, dus f heeft een lokaal minimum in $(1,0)$ ter grootte $f(1,0) = -1$.

Uit Analyse 1 weet u dat het verdwijnen van de afgeleide van een functie van één variable geen maximum of minimum garandeert, er kan bijvoorbeeld ook sprake zijn van een buigpunt. Bij functies van meer variabelen doet zich een nieuw verschijnsel voor: er kan sprake zijn van een zogenaamd zadelpunt.

Voorbeeld 2.2.8 We beschouwen nogmaals de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$, gedefinieerd door $f(x,y) = y^2 - x^2$; zie ook Voorbeeld 1.4.2. Men gaat gemakkelijk na dat $\operatorname{grad} f\,(x,y) = (-2x, 2y)$. Hieruit volgt dat $(0,0)$ het enige kritieke punt van f is. De functie $x \mapsto f(x,0) = -x^2$ heeft een strikt maximum in 0, terwijl $y \mapsto f(0,y) = y^2$ een strikt minimum in 0 heeft. De functie f heeft dus noch een maximum, noch een minimum in 0. Dit blijkt op iets andere wijze als we de niveaulijnen van f beschouwen; in Voorbeeld 1.4.4 zagen we dat f strikt positief is op de verzameling $|x| < |y|$, en strikt negatief op de verzameling $|x| > |y|$. Omdat $(0,0)$ tot de afsluiting van beide verzamelingen behoort, kan f in $(0,0)$ geen extremum hebben.

In Voorbeeld 1.4.2 zagen we dat de grafiek van f de vorm van een zadel heeft. Om deze reden noemt men het kritieke punt $(0,0)$ wel een *zadelpunt*.

2.3 Het differentiëren van vectorwaardige functies

In deze paragraaf breiden we het begrip partiële afgeleide uit van scalaire naar vectorwaardige functies. We beginnen met de afgeleide van een vectorwaardige functie van één variabele. Laat in het vervolg $I \subset \mathrm{R}$ een interval zijn, en $p \geq 1$ een positief geheel getal.

Definitie 2.3.1 Laat $f : I \to \mathrm{R}^p$ een (vectorwaardige) functie zijn, en zij $a \in I$. De functie f heet differentieerbaar in het punt a als de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

bestaat. De bovenstaande limiet heet de afgeleide van f in a en wordt genoteerd met $f'(a)$.

Merk op dat $f(a+h) - f(a) \in \mathrm{R}^p$ voor alle $h \in \mathrm{R}$ met $a + h \in I$. Met het bovenstaande 'quotiënt' bedoelen we de vector $h^{-1}[f(a+h) - f(a)]$. Als de limiet van dit quotiënt bestaat dan is zijn waarde $f'(a)$ dus een vector in R^p. Uit Lemma 1.3.4 (a) leiden we direkt af:

Lemma 2.3.2 **(Componentsgewijs differentiëren)** *De functie $f : I \to \mathrm{R}^p$ is differentieerbaar in het punt $a \in I$ dan en slechts dan als iedere component f_j $(1 \leq j \leq p)$ differentieerbaar in a is. Bovendien geldt in geval van differentieerbaarheid dat:*

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_p'(a)).$$

Laat f weer een vectorwaardige functie $I \to \mathrm{R}^p$ zijn, en veronderstel dat f differentieerbaar is in het punt $a \in I$. Voor $h \in \mathrm{R}$ met $a + h \in I$ definiëren we $\varepsilon(h) := f(a+h) - f(a) - hf'(a)$. Dan is ε een functie R æ R^p. Er geldt:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \varepsilon(h), \qquad \lim_{h \to 0} h^{-1}\varepsilon(h) = 0. \tag{2.1}$$

Hieruit blijkt dat $f(a+h)$ voor h voldoende dicht in de buurt van a benaderd wordt door $f(a) + hf'(a)$; de restterm $\varepsilon(h)$ is voor $h \to 0$ van kleinere orde dan $hf'(a)$.

Is $f : I \to \mathrm{R}^p$ een functie, en laten we de variabele x het interval I doorlopen dan doorloopt de waarde $f(x)$ een 'gekromd traject' in R^p. Vandaar de volgende definitie:

Definitie 2.3.3 Onder een *kromme* in R^p verstaan we een *continue* functie $f : I \to \mathrm{R}^p$, met $I = [c, d]$ een gesloten en begrensd interval. De punten $f(c)$ en $f(d)$ heten respectievelijk het *begin-* en het *eindpunt* van de kromme f.

Opmerking 2.3.4 Merk op dat we in de bovenstaande definitie de term kromme gebruikt hebben voor de *afbeelding* f en niet voor zijn beeld $f(I)$, hetgeen in eerste instantie wellicht meer voor de hand lijkt te liggen. Twee krommen kunnen daarom verschillen, maar toch hetzelfde beeld hebben. De nu gebruikte terminologie zal in het vervolg zijn nut bewijzen.

Opmerking 2.3.5 In de fysica komt men krommen tegen als men de baan van een 'puntdeeltje' in R^p beschrijft. De variabele $x \in I$ wordt dan geïnterpreteerd als tijd, en $f(x)$ als plaats van het puntdeeltje op het tijdstip x. Is f differentieerbaar, dan blijkt uit (2.1) dat men $f'(a)$ kan interpreteren als de snelheid van het puntdeeltje op het tijdstip $x = a$ (zie ook de onderstaande figuur).

Figuur 6: snelheidsvector

Geïnspireerd door deze interpretatie zullen wij de vector $f'(a)$ in het vervolg soms dan ook de *snelheidsvector* van de kromme f ten tijde a noemen.

Bij de bovengenoemde interpretatie vervangt men de variable x meestal door de t van tijd. Bovendien wordt dan vaak de notatie

$$\dot{f}(t) := f'(t)$$

gebruikt.

We beschouwen nu algemener een afbeelding $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$. Is a een inwendig punt van $\mathrm{dom}(f)$, dan kunnen we partiële differentieerbaarheid van f in a definiëren, precies als in Definitie 2.1.3, met overal het bereik R^p in plaats van R en met verwijzing naar Definitie 2.3.1.

Definitie 2.3.6 Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p een (vectorwaardige) functie zijn, en a een inwendig punt van zijn domein $\mathrm{dom}(f)$. De functie f heet in a partieel differentieerbaar naar de k-de variable $(1 \leq k \leq n)$ als de functie $g : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, R æ R^p differentieerbaar is in a_k. In dat geval heet

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := g'(a_k) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=a_k} f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

de partiële afgeleide van f in a naar de k-de variabele.

Wegens Lemma 2.3.2 volgt nu direkt:

Lemma 2.3.7 (Componentsgewijs partieel differentiëren) *Laat $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ zijn, a een inwendig punt van* $\mathrm{dom}(f)$, *en $1 \leq k \leq n$. De functie f is in a partieel differentieerbaar naar de k-de variabele dan en slechts als iedere component f_j $(1 \leq j \leq p)$ dat is. Bovendien geldt in dat geval:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a), \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(a) \right).$$

Voorbeeld 2.3.8 Zij $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd door $f(x, y, z) = (xy^2z^3, \sin xyz)$. Dan is

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= (y^2z^3, yz \cos xyz), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (2xyz^3, xz \cos xyz), \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (3xy^2z^2, xy \cos xyz).
\end{aligned}$$

2.4 Richtingsafgeleiden

De in §2.1 gedefinieerde partiële afgeleiden beschrijven de groei van $f : \mathrm{R}^n$ æ R in elk van de coördinaatrichtingen. In veel situaties is het wenselijk iets te kunnen zeggen over de groei van f in een willekeurige richting. Anders gezegd, zij a een inwendig punt van $U := \mathrm{dom}(f)$, en zij $v \in \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$. Dan zijn we geïnteresseerd in het groeigedrag van f in a in de richting v, d.w.z. langs de lijn $L = a + \langle v \rangle$. De lijn L is het beeld van de functie $c : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ gedefinieerd door:

$$c(t) = a + tv.$$

De functie $g = f \circ c$: R æ R beschrijft f beperkt tot de lijn L. De groei van f in a langs L wordt nu beschreven door de afgeleide $g'(0)$ van g in 0 (mits deze bestaat). Hierbij merken we op dat g gedefinieerd is op een open interval dat 0 bevat. Immers, omdat a inwendig punt is van U bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a; \varepsilon) \subset U$; daarbij bestaat een $\varepsilon' > 0$ zo dat $\varepsilon' \|v\| < \varepsilon$; de functie g is gedefinieerd op $]-\varepsilon', \varepsilon'[$.

We zijn nu gemotiveerd voor de volgende definitie, waarbij we algemener veronderstellen dat de functie f vectorwaardig is.

Definitie 2.4.1 Zij a inwendig punt van het domein van een functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p. Zij $v \in \mathrm{R}^n$. De functie f heet in a *richtingsdifferentieerbaar* in de *richting* v als de functie $g : t \mapsto f(a + tv)$, R æ R^p differentieerbaar is in $t = 0$. In dat geval heet de afgeleide $g'(0)$ de *richtingsafgeleide* van f in het punt a in de richting v. Notatie:

$$D_v f(a) := \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} f(a + tv).$$

Opmerking 2.4.2 Merk op dat in de definitie toegelaten wordt dat $v = 0$. Uiteraard geldt $D_0 f(a) = 0$.

Opmerking 2.4.3 Door in de bovenstaande formule de afgeleide $g'(0)$ te herschrijven als limiet van een differentiequotiënt (zie Definitie 2.3.1) zien we dat:

$$D_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Bestaat omgekeerd de limiet in het rechterlid, dan is de functie f in a richtingsdifferentieerbaar in de richting v met richtingsafgeleide gegeven door de bovenstaande formule.

De richtingsafgeleide $D_v f(a)$ hangt niet alleen van de richting van v af, maar ook van de grootte van v. Dit blijkt uit het volgende lemma.

Lemma 2.4.4 *Zij $f : \mathrm{R}^n \supset U \to \mathrm{R}^p$ een functie, zij a een inwendig punt van U en $v \in \mathrm{R}^n$. Als f in a richtingsdifferentierbaar is in de richting v, dan is voor elke $\lambda \in \mathrm{R}$ de functie f in a ook richtingsdifferentieerbaar in de richting λv, en er geldt:*

$$D_{\lambda v} f(a) = \lambda D_v f(a).$$

Bewijs: Als $\lambda = 0$ dan volgt het gestelde uit Opmerking 2.4.2. Veronderstel dus dat $\lambda \neq 0$. Dan is

$$\frac{f(a + t\lambda v) - f(a)}{t} = \lambda \frac{f(a + t\lambda v) - f(a)}{t\lambda}.$$

Het rechterlid heeft limiet $\lambda D_v f(a)$ voor $t \to 0$ (pas de substitutie- en de produktregel voor limieten toe). Hieruit volgt dat de limiet van het linkerlid bestaat en gelijk is aan $\lambda D_v f(a)$. Het gestelde volgt nu door toepassing van Opmerking 2.4.3. □

Voorbeeld 2.4.5 We beschouwen nogmaals de scalaire functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \text{ als } (x, y) \neq (0, 0) \text{ en } f(0, 0) = 0$$

(zie ook Voorbeeld 1.3.14). Ditmaal onderzoeken we of de functie f in $(0, 0)$ richtingsdifferentieerbaar is. Omdat f niet door één formule in een omgeving van $(0, 0)$ gedefinieerd is gebruiken we de karakterisering uit Opmerking 2.4.3. Zij $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. We berekenen:

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^4 v_2^4} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}.$$

Dus $\partial_v f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4} = \frac{v_2^2}{v_1}$ als $v_1 \neq 0$ en $\partial_v f(0) = 0$ als $v_1 = 0$. Dus f is in het punt $(0, 0)$ in alle richtingen richtingsdifferentieerbaar, hoewel f in dat punt niet continu is. (Maar de restrictie van f tot iedere rechte door $(0, 0)$ is wèl continu, zoals we gezien hebben).

Merk nog op dat inderdaad

$$\partial_{\lambda v} f(0) = \frac{\lambda^2 v_2^2}{\lambda v_1} = \lambda \partial_v f(0).$$

Richtingsdiffentieerbaarheid van een vectorwaardige functie is te herleiden tot richtingsdifferentieerbaarheid van zijn componenten.

Lemma 2.4.6 (Componentsgewijs richtingsdifferentiëren) *Laat f een functie $\mathrm{R}^n \supset U \to \mathrm{R}^p$ zijn, a een inwendig punt van U, en $v \in \mathrm{R}^n$. De functie f is in a richtingsdifferentieerbaar in de richting v dan en slechts dan als iedere component f_j $(1 \leq j \leq p)$ dat is. Bovendien geldt in dat geval dat:*

$$D_v f(a) = (D_v f_1(a), \ldots, D_v f_p(a)).$$

Bewijs: Dit is een direkt gevolg van Lemma 2.3.2 en de definitie van richtingsafgeleide. □

Partieel differentiëren is een speciaal geval van richtingsdifferentiëren.

Lemma 2.4.7 *Laat f een functie $\mathrm{R}^n \supset U \to \mathrm{R}^p$ zijn en a en inwendig punt van U. Zij $1 \leq k \leq n$. De functie f is in a partieel differentieerbaar naar de k-de variabele dan en slechts dan als f in a richtingsdifferentieerbaar is in de richting e_k (de k-de standaardbasis vector). Als dit laatste het geval is, dan geldt:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = D_{e_k} f(a).$$

Bewijs: Definieer $g : \mathrm{R}$ æ R^p als in Definitie 2.3.6. Dan bestaat $D_k f(a) = \partial f / \partial x_k(a)$ dan en slechts dan als g differentieerbaar is in a_k. Dit is gelijkwaardig met het bestaan van de afgeleide van $h(t) = g(a_k + t)$ in $t = 0$. Maar $h(t) = f(a + te_k)$, dus de laatste bewering is per definitie gelijkwaardig met het bestaan van $D_{e_k} f(a)$. Als één van de genoemde afgeleiden bestaat, dan geldt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = g'(a_k) = h'(0) = D_{e_k} f(a).$$

□

Voorbeeld 2.4.8 We beschouwen nogmaals de functie $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ uit Voorbeeld 2.3.8. De functie wordt gegeven door $f(x, y, z) = (xy^2 z^3, \sin xyz)$. De richtingsafgeleide in een willekeurige richting $v = (a, b, c)$ bepalen we door de functie

$$t \mapsto ((x + ta)(y + tb)^2 (z + tc)^3, \sin((x + ta)(y + tb)(z + tc)))$$

te differentiëren en vervolgens $t = 0$ in te vullen. Resultaat:

$$D_v f(x, y, z) = (ay^2 z^3 + 2bxyz^3 + 3cxy^2 z^2, \cos xyz(ayz + bxz + cxy)).$$

Door achtereenvolgens voor v de standaardbasisvectoren in te vullen vinden we weer de in Voorbeeld 2.3.8 bepaalde partiële afgeleiden. Later komen we op dit voorbeeld terug.

2.5 Hogere orde partiële afgeleiden

Laat V een open deelverzameling van R^2 zijn, en $f : V \to \mathrm{R}$ een functie. Als f partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele x, dan is ook $\frac{\partial f}{\partial x}$ een functie $V \to \mathrm{R}$ die op zijn beurt weer partieel differentieerbaar kan zijn. De partiële afgeleide naar x wordt in dat geval genoteerd met:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right)$$

en heet de tweede orde partiële afgeleide van f naar de eerste variable. De partiële afgeleide van $\partial f/\partial x$ naar de tweede variabele y, notatie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right)$$

heet de gemengde tweede orde afgeleide van f naar eerste en de tweede variabelen. Op analoge wijze verkrijgt men de tweede orde partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right).$$

Definitie 2.5.1 Veronderstel dat $V \subset \mathrm{R}^2$ een open deelverzameling is. Onder een C^2-functie $V \to \mathrm{R}$ verstaan we een continue functie $f : V \to \mathrm{R}$ waarvan alle eerste en tweede orde partiële afgeleiden bestaan en continu zijn.

Stelling 2.5.2 **(Verwisseling van partiële afgeleiden)** *Laat V een open deel van R^2 zijn, en $f : V \to \mathrm{R}$ een C^2-functie. Dan geldt voor alle $a \in V$ dat:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a). \tag{2.2}$$

Bewijs: Laat $a = (a_1, a_2) \in V$ een vast punt zijn. We gaan bewijzen dat linker- en rechterlid van (2.2) allebei gelijk zijn aan de limiet voor $(x,y) \to (a_1,a_2)$ van

$$Q(x,y) = \frac{f(x,y) - f(a_1,y) - f(x,a_2) + f(a_1,a_2)}{(x-a_1)(y-a_2)}$$

In het bijzonder zullen we dus bewijzen dat de limiet van $Q(x,y)$ bestaat voor $(x,y) \to (a_1,a_2)$. Merk op dat teller en noemer dan beide naar nul gaan; de noemer kan geïnterpreteerd worden als de oppervlakte van de rechthoek met hoekpunten $(x,y), (a_1,y), (a_1,a_2)$ en (x,a_2). De teller is de alternerende som van de waarden van de functie f in deze hoekpunten.

Er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $V(a;\delta) \subset V$ (zie Lemma 2.1.1). Fixeer nu even $(x,y) \in V(a;\delta)$ met $x \neq a_1$, $y \neq a_2$. Beschouw de functie $\varphi :]a_1 - \delta, a_1 + \delta[\to \mathrm{R}$ gedefinieerd door:

$$\varphi(t) = f(t,y) - f(t,a_2).$$

Dan is
$$Q(x,y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a_1)}{(x-a_1)(y-a_2)}.$$
De functie φ is differentieerbaar op het interval $]a_1 - \delta, a_1 + \delta[$, dus door toepassing van de middelwaardestelling zien we dat er een strikt tussen a_1 en x gelegen $\xi = \xi(x,y)$ bestaat, zo dat:
$$Q(x,y) = \frac{\varphi'(\xi)}{y-a_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, a_2)}{y-a_2},$$
De functie $\psi : t \to \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, t)$ is differentieerbaar op $]a_2 - \delta, a_2 + \delta[$, en door toepassing van de middelwaardestelling op deze functie leiden we af dat er een strikt tussen a_2 en y gelegen $\eta = \eta(x,y)$ bestaat, zo dat
$$Q(x,y) = \psi'(\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta).$$
Merk op dat voor alle (x,y) als boven geldt dat $||(\xi_{x,y}, \eta_{x,y}) - (a_1, a_2)|| \leq ||(x,y) - a||$. Uit de continuïteit van $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in a volgt derhalve dat
$$\lim_{(x,y)\to a} Q(x,y) = \lim_{(x,y)\to a} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi_{x,y}, \eta_{x,y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2).$$

Anderzijds kunnen we schrijven
$$Q(x,y) = \frac{\bar{\varphi}(y) - \bar{\varphi}(a_2)}{(x-a_1)(y-a_2)}, \qquad \text{met} \qquad \bar{\varphi}(t) := f(x,t) - f(a_1, t).$$
Door op $\bar{\varphi}$ de middelwaardestelling toe te passen en op het resultaat als functie van de eerste variabele wederom de middelwaardestelling toe te passen, zien we dat er een tussen y en a_2 gelegen $\bar{\eta}$ en een tussen x en a_1 gelegen $\bar{\xi}$ bestaan zo dat
$$Q(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta}).$$
Uit de continuïteit van $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in a volgt nu dat
$$\lim_{(x,y)\to a} Q(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a).$$

$\square$

Opmerking 2.5.3 Door het bovenstaande bewijs nauwkeurig door te lezen ziet men in dat Stelling 2.5.2 geldig is onder zwakkere condities. Voor de geldigheid van (2.2) is het voldoende te eisen dat $f : V \to \mathrm{R}$ een functie is waarvoor de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ bestaan, en waarvoor de genoemde tweede orde partiële afgeleiden continu zijn in a.

We beschouwen nu algemener hogere orde partiële afgeleiden van een functie $f : U \to \mathrm{R}^p$, waarbij U een open deel is van R^n. Als $1 \leq i, j \leq n$, dan definiëren we
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(a) \qquad (a \in U),$$

zodra het rechterlid gedefinieerd is. Als $i = j$, dan noteren we de bovenstaande tweede orde partiële afgeleide ook met $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$. We zeggen dat f een C^1–functie op U is als f continu op U is en als bovendien alle partiële afgeleiden $\partial f/\partial x_j$ bestaan en continu zijn op U. We zeggen dat f een C^2–functie op U is als f C^1 is en bovendien alle tweede orde partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

bestaan en continu zijn op U.

Stelling 2.5.2 laat zich nu generaliseren tot:

Stelling 2.5.4 *Laat U een open deel van R^n zijn, en $f : U \to \mathrm{R}^p$ een C^2-functie. Dan geldt voor alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ dat*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}. \tag{2.3}$$

Bewijs: Wegens Lemma 2.3.7 is het voldoende de stelling te bewijzen voor de componentnen van f. Derhalve mogen we veronderstellen dat f scalair is, dus $p = 1$. In dit geval is de stelling een direkt gevolg van Stelling 2.5.2 omdat bij partiële differentiatie naar de variabelen x_i en x_j de overige variabelen als constanten behandeld worden. □

Opmerking 2.5.5 Als bij Stelling 2.5.2 merken we weer op dat de voorwaarden van de stelling verzwakt kunnen worden. Is $f : U \to \mathrm{R}^p$ een functie en $a \in U$, dan geldt (2.3) in het punt a zodra de daarin voorkomende tweede orde partiële afgeleiden bestaan in een omgevinmg van a en continu zijn in a.

Met inductie definiëren we algemener voor $k \geq 2$: $f : U \to \mathrm{R}^p$ is een C^k–functie op U als f een C^{k-1}–functie is en als bovendien alle k–de orde partiële afgeleiden

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}} \tag{2.4}$$

bestaan en continu zijn op U. De verzameling van alle C^k–functies $U \to \mathrm{R}^p$ noteren we met $C^k(U, R^p)$. Merk op dat deze verzameling met de gebruikelijke scalar vermenigvuldiging en de gebruikelijke puntsgewijze optelling van functies een reële lineaire ruimte is. Het is gebruikelijk de notatie $C(U, R^p) = C^0(U, R^p)$ te gebruiken voor de ruimte van continue functies $f : U \to \mathrm{R}^p$. Verder gebruikt men de notatie $C^\infty(U, \mathrm{R}^p)$ voor de ruimte van continue functies $f : U \to \mathrm{R}^p$ waarvan alle partiële afgeleiden bestaan en continu zijn op U. Dus:

$$C^\infty(U, \mathrm{R}^p) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(U, \mathrm{R}^p),$$

terwijl voor alle $k \geq 0$ geldt: $C^k(U, \mathrm{R}^p) \supset C^{k+1}(U, \mathrm{R}^p)$. Tenslotte schrijft men wel

$$C^k(U) = C^k(U, \mathrm{R}) \qquad (1 \leq k \leq \infty).$$

Door Stelling 2.5.4 herhaald toe te passen zien we tenslotte: is $f \in C^k(U)$, dan is (2.4) onafhankelijk van de volgorde waarin de partiële differentiaties toegepast worden. Iedere k-de orde partiële afgeleide is daarom te herschrijven als

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

met $\alpha_j \geq 0$ en $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$.

Hoofdstuk 3

De gradiënt van een functie

3.1 Intermezzo: de symbolen van Landau

In de analyse spelen schattingen vaak een belangrijke rol. Daarbij is het handig over de *symbolen o en $\mathcal{O}$ van Landau* te beschikken.

Definitie 3.1.1 **(Symbolen van Landau)** Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p een functie zijn, en $\varphi : \mathrm{R}^n$ æ $[0, \infty[$ een niet-negatieve reëelwaardige functie. Zij voorts $a \in \mathrm{R}^n$.

(a) De notatie

$$f(x) = \mathcal{O}(\varphi(x)) \qquad (x \to a) \tag{3.1}$$

(spreek uit: '$f(x)$ is grote oh van $\varphi(x)$ als x nadert tot a') betekent: er bestaan een $C > 0$ en een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f) \cap B(a; \delta)$ geldt: $\|f(x)\| \leq C\varphi(x)$.

(b) De notatie

$$f(x) = o(\varphi(x)) \qquad (x \to a) \tag{3.2}$$

(spreek uit: 'kleine oh') betekent: voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f) \cap B(a; \delta)$ geldt: $\|f(x)\| \leq \varepsilon\varphi(x)$.

Opmerking 3.1.2 De bovenstaande definitie wordt op voor de hand liggende wijze uitgebreid naar het geval $n = 1$, $a = \infty$. In dat geval betekent (3.1) dat er een $C > 0$ en een $r \in \mathrm{R}$ bestaan zo dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f)$ met $x > r$ de schatting $\|f(x)\| \leq C\varphi(x)$ geldt. Voorts betekent (3.2) in dat geval dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $r \in \mathrm{R}$ bestaat zo dat voor alle $x \in \mathrm{dom}(f)$ met $x > r$ de schatting $\|f(x)\| \leq \varepsilon\varphi(x)$ geldt.

Op soortgelijke wijze wordt de definitie uitgebreid naar het geval $n = 1$, $a = -\infty$.

Opmerking 3.1.3 Uit Definitie 3.1.1 volgt direct:

$$f(x) = o(\varphi(x)) \ \ (x \to a) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathcal{O}(\varphi(x)) \ \ (x \to a).$$

Opmerking 3.1.4 Intuïtief betekent (3.1) dat $|f(x)|$ ten hoogste de orde van grootte van $\varphi(x)$ heeft als $x \to a$. Formule (3.2) betekent intuïtief dat $|f(x)|$ een kleinere orde van grootte heeft dan $\varphi(x)$ als $x \to a$.

We geven enige voorbeelden van situaties waarbij de symbolen van Landau op natuurlijke wijze optreden.

Voorbeeld 3.1.5 Met behulp van het grote o symbool kan men het *majorantie criterium* voor de convergentie van oneigenlijke integralen (Analyse 1, Stelling 10.7.3) als volgt herformuleren.

Zij $a \in \mathrm{R}$, en $f, g : [a, \infty[\to \mathrm{R}$ functies die Riemann-integreerbaar zijn op ieder interval van de vorm $[a, b]$, $b > a$. Veronderstel voorts dat $g \geq 0$. Dan geldt:

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^\infty g(x)\,dx \quad \text{convergent} \\ f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \to \infty) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{convergent}$$

Voorbeeld 3.1.6 We passen het bovenstaande toe op de oneigenlijke integraal

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x^2}\,dx. \tag{3.3}$$

De integrand is continu, dus Riemann-integreerbaar op ieder interval van de vorm $[0, b]$, $b > 0$. Voorts geldt dat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} x^{3/2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-2}+1} = 1.$$

Hieruit volgt dat er een $r \in \mathrm{R}$ bestaat zo dat voor alle $x > r$ de schatting $x^{3/2}\sqrt{x}/(1+x^2) \leq 2$ geldt. Derhalve is $\sqrt{x}/(1+x^2) = \mathcal{O}(x^{-3/2})$ $(x \to \infty)$. Nu is $|\cos x| \leq 1$ voor alle $x \in \mathrm{R}$, dus er geldt ook:

$$\frac{\sqrt{x}\cos x}{1+x^2} = \mathcal{O}(x^{-\frac{3}{2}}) \qquad (x \to \infty).$$

De oneigenlijke integraal $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ is convergent; met het hierboven geformuleerde majorantie criterium volgt nu dat de integraal (3.3) convergeert.

Voorbeeld 3.1.7 Laat $I \subset \mathrm{R}$ een interval zijn, $f : I \to \mathrm{R}$ een functie en $a \in I$. Als f differentieerbaar is in a dan geldt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Definieer de functie $\rho : \mathrm{R}$ æ R door $\rho(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a)$; dan is de bovenstaande formule gelijkwaardig met $\lim_{h\to 0} h^{-1}\rho(h) = 0$. Dit is weer gelijkwaardig met $\rho(h) = o(|h|)$ $(h \to 0)$. We zien dat

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \rho(h) \qquad \text{met} \qquad \rho(h) = o(|h|) \;\; (h \to 0). \tag{3.4}$$

De bewering dat er een functie ρ bestaat zo dat (3.4) geldt, wordt ook wel kortweg geschreven als:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(|h|) \qquad (h \to 0).$$

Voorbeeld 3.1.8 (Taylor met rest) Laat $I \subset \mathrm{R}$ een interval zijn, $f : I \to \mathrm{R}$ een $n+1$ keer differentieerbare functie ($n \geq 0$) en $a \in I$. Dan geldt voor elke $x \in I \setminus \{a\}$ dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{3.5}$$

met ξ een tussen a en x gelegen punt (zie Analyse 1, Stelling 8.2.6). Is de functie $f^{(n+1)}$ begrensd in een omgeving van a (dit geldt bijvoorbeeld als $f^{(n+1)}$ continu is in a), dan zien we dat uit het bovenstaande volgt dat:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathcal{O}(|x-a|^{n+1}) \qquad (x \to a). \tag{3.6}$$

Merk op dat we met de laatste formulering informatie verliezen. In (3.5) wordt de restterm expliciet gegeven door

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

hetgeen op een omgeving van de vorm $I \cap \bar{B}(a;\delta)$ leidt tot de schatting:

$$|R_n(x)| \leq M_\delta |x-a|^{n+1} \qquad (x \in I,\ |x-a| \leq \delta)$$

waarin

$$M_\delta = \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\substack{\xi \in I \\ |\xi - a| \leq \delta}} |f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Uit (3.6) blijkt slechts dat er een $M > 0$ bestaat, zo dat de schatting $|R_n(x)| \leq M|x-a|^{n+1}$ geldt voor $x \in I$ in een voldoend kleine omgeving van a, zonder dat de grootte van M of van de omgeving nader gespecificeerd worden.

In situaties waarbij het voldoende is inzicht in de orde van grootte te hebben kan men handig met de symbolen van Landau rekenen. We illustreren dit aan de hand van het onderstaande voorbeeld, waarin een limiet bepaald wordt.

Voorbeeld 3.1.9 We zullen aantonen dat

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{(e^x - 1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Uiteraard kan dit met de in Analyse 1 behandelde regel van de l'Hôpital. Hieronder bepalen we de limiet door gebruik te maken van de formule van Taylor met rest en de symbolen van Landau.

Uit Taylor met rest volgt dat

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(|x|^3) \qquad (x \to 0).$$

Tevens geldt voor $x \to 0$ dat

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^2 &= [x + \mathcal{O}(|x|^2)]^2 \\
&= x^2 + 2x\mathcal{O}(|x|^2) + \mathcal{O}(|x|^2)^2 \\
&= x^2 + \mathcal{O}(|x|^3) + \mathcal{O}(|x|^4) \\
&= x^2 + \mathcal{O}(|x|^3).
\end{aligned}$$

Het lezen van de bovenstaande identiteiten vergt enige interpretatie. Zo wordt met de uitdrukking in het tweede lid bedoeld: hier staat een functie van de vorm $[x + f(x)]^2$, waarbij $f(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$. Met de uitdrukking in het derde lid wordt bedoeld: een functie van de vorm $x^2 + 2xg(x) + h(x)^2$, waarbij $g(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$ en $h(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$. In de voorlaatste identiteit is de volgende rekenregel gebruikt: $\mathcal{O}(|x|^2)^2 = \mathcal{O}(|x|^4)$. Deze moet gelezen worden als: is φ een functie met $\varphi(x) = \mathcal{O}(|x|^2)$, dan voldoet zijn kwadraat aan $\varphi(x)^2 = \mathcal{O}(|x|^4)$ (controleer dit aan de hand van de definitie). In de laatste identiteit is de rekenregel $\mathcal{O}(|x|^3) + \mathcal{O}(|x|^4) = \mathcal{O}(|x|^3)$ gebruikt; deze moet gelezen worden als

$$\alpha(x) = \mathcal{O}(|x|^3) \quad \text{en} \quad \beta(x) = \mathcal{O}(|x|^4) \quad \Rightarrow \quad \alpha(x) + \beta(x) = \mathcal{O}(|x|^3).$$

(Ga na dat deze rekenregel inderdaad geldt.) Combineren we de bovenstaande berekeningen dan volgt:

$$\frac{\cos x - 1}{(e^x - 1)^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(|x|^3)}{x^2 + \mathcal{O}(|x|^3)} = \frac{-\frac{1}{2} + \mathcal{O}(|x|)}{1 + \mathcal{O}(|x|)} \tag{3.7}$$

Met de laatste uitdrukking wordt bedoeld: een functie van de vorm $[-1/2 + r(x)]/[1 + s(x)]$, waarbij $r(x) = \mathcal{O}(|x|)$ en $s(x) = \mathcal{O}(|x|)$ $(x \to 0)$; in het bijzonder geldt dus $\lim_{x\to 0} r(x) = 0$ en $\lim_{x\to 0} s(x) = 0$ en met de rekenregels voor limieten concluderen we tenslotte dat (3.7) limiet $-1/2$ heeft.

Opmerking 3.1.10 Laten f en φ functies als in Definitie 3.1.1 zijn, met als domein een verzameling $V \subset \mathrm{R}^n$ die a niet bevat. We merken op: is $\varphi(x) \neq 0$ voor alle $x \in V$ in een omgeving van a, dan volgt uit de definities dat:

(a) $f(x) = \mathcal{O}(\varphi(x))\ (x \to a) \iff x \mapsto f(x)/\varphi(x)$ is begrensd op een omgeving van a.
(b) $f(x) = o(\varphi(x))\ (x \to a) \iff \lim\limits_{x\to a} f(x)/\varphi(x) = 0$.

In het bijzonder geldt:
(c) $f(x) = \mathcal{O}(1)\ (x \to a) \iff f$ is begrensd op een omgeving van a.
(d) $f(x) = o(1)\ (x \to a) \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Voorbeeld 3.1.11 We kunnen de limietformules uit Analyse 1, Stelling 7.3.8, als volgt herformuleren ($\alpha \in \mathrm{R}$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$) :

(a) $x^\alpha = o(e^{\beta x}) \qquad (x \to \infty)$;
(b) $\log x = o(x^\varepsilon) \qquad (x \to \infty)$;
(c) $\log x = o(x^{-\varepsilon}) \qquad (x \downarrow 0)$.

De symbolen van Landau kunnen ook gebruikt worden voor rijen. Immers, een rij $(a_k)_{k\geq 1}$ in R^n kan opgevat worden als de functie $a : \mathrm{R} \supset \mathrm{N} \to \mathrm{R}^n$, $k \mapsto a_k$. Met deze opmerking krijgen de volgende notaties betekenis, voor $(b_k)_{k\geq 1}$ een rij van niet-negatieve reële getallen:

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \qquad (n \to \infty), \tag{3.8}$$

$$a_n = o(b_n) \qquad (n \to \infty). \tag{3.9}$$

We formuleren de betekenis van de bovenstaande formules nog eens apart.

(a) (3.8) *betekent: er zijn getallen* $C > 0$ *en* $N \in \mathrm{N}$ *zo dat voor alle* $k \geq N$ *geldt:* $||a_k|| \leq Cb_k$;

(b) (3.9) *betekent: voor iedere* $\varepsilon > 0$ *bestaat een* $N \in \mathrm{N}$ *zo dat voor alle* $k \geq N$ *geldt:* $||a_k|| \leq \varepsilon b_k$.

Voorbeeld 3.1.12 (Formule van Stirling) Men kan bewijzen dat de volgende interessante *asymptotische* formule voor $n!$ geldt als $n \to \infty$:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,(1 + o(1)) \qquad (n \to \infty).$$

Een equivalente formulering is formule (10.5.4) in het Analyse 1 dictaat.

3.2 Gradiënt en benadering van de groei

Is $I \subset \mathrm{R}$ een interval, en $f : I \to \mathrm{R}$ een functie die differentieerbaar is in een punt $a \in I$, en schrijven we $\rho(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ voor alle $h \in \mathrm{R}$ met $a + h \in I$, dan volgt direct uit de definitie van differentieerbaarheid in a dat $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}\rho(h) = 0$. Anders gezegd:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \rho(h) \quad \text{met} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{h} = 0. \tag{3.10}$$

De groei $f(a+h) - f(a)$ wordt dus beschreven door $f'(a)h + \rho(h)$, waarbij $\rho(h)$ klein wordt ten aanzien van h als $h \to 0$. In deze zin kan men $hf'(a)$ opvatten als eerste orde benadering van de groei $f(a+h) - f(a)$. Maak zelf een plaatje waaruit de betekenis van de functie ρ blijkt.

Door de substitutie $x = a + h$ zien we dat de bovenstaande formule equivalent is met

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad (x \to a).$$

Hieruit lezen we af dat de functie $x \mapsto f(x)$ in de buurt van a benaderd wordt door $l : x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$ met een restterm die $o(x - a)$ is als $x \to a$. Dit is een rechtvaardiging om de grafiek van de functie l (een lijn) *de raaklijn* aan graf f in het punt $(a, f(a))$ te noemen.

Soortgelijke resultaten gelden voor scalaire functies van meer veranderlijken met *continue* partiële afgeleiden. Onder een *omgeving* van een punt $a \in \mathrm{R}^n$ verstaan we een verzameling $v \subset \mathrm{R}^n$ waarvan a een inwendig punt is, dwz. er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \subset V$. Merk op dat iedere open verzameling die a bevat een omgeving van a is; een dergelijke verzameling noemen we dan ook een *open omgeving* van a.

Stelling 3.2.1 *Laat* $f : \mathrm{R}^n$ æ R *een functie zijn, en* $a \in \mathrm{R}^n$. *Veronderstel dat* f *partieel differentieerbaar is op een open omgeving van* a, *terwijl alle partiële afgeleiden* $\partial f/\partial x_j$ $(1 \leq j \leq n)$ *continu zijn in* a. *Laat de functie* $\rho : \mathrm{R}^n$ æ R *gedefinieerd zijn door*

$$f(a+h) = f(a) + \langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle + \rho(h); \tag{3.11}$$

dan geldt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{||h||} = 0. \tag{3.12}$$

Opmerking 3.2.2 (a) Merk op dat in de bovenstaande limiet gedeeld wordt door $||h||$; uiteraard kan men niet door de vector h delen. Is $n = 1$, dan is $\lim_{h\to 0} ||h||^{-1}\rho(h) = 0$ gelijkwaardig met $\lim_{h\to 0} |h^{-1}\rho(h)| = 0$, hetgeen weer gelijkwaardig is met $\lim_{h\to 0} h^{-1}\rho(h) = 0$; (3.10) is dus een bijzonder geval van Stelling 3.2.1.

(b) Formules (3.11) en (3.12) kan men met behulp van het symbool o van Landau ook samenvatten als

$$f(a+h) = f(a) + \langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle + o(||h||) \qquad (h \to 0).$$

(c) De uitdrukking $\langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle$ is lineair in de variabele h en kan als volgt uitgeschreven worden:

$$\langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Bewijs: Het bewijs berust op de middelwaardestelling voor differentieerbare functies van één veranderlijke.

Allereerst merken we op dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $V(a;\varepsilon) \subset \mathrm{dom}(f)$ (zie Lemma 2.1.1); immers a is een inwendig punt van $\mathrm{dom}(f)$. Laat h een (voorlopig vast) element van $V(0;\varepsilon)$ zijn. Dan is $a + h \in V(a;\varepsilon)$. We herschrijven de toename $f(a+h) - f(a)$ als som van n 'partiële' toenamen van functiewaarden, waarbij in iedere partiële toename slechts één der coördinaten gevarieerd wordt:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} f(a+h^{(j)}) - f(a+h^{(j-1)}), \tag{3.13}$$

met

$$h^{(0)} = 0, \qquad h^{(j)} = (h_1, h_2, \ldots, h_j, 0, \ldots, 0) \quad (1 \le j \le n).$$

Merk op dat $h^{(j)}$ en $h^{(j-1)}$ slechts in de j-de coordinaat van elkaar verschillen: $h^{(j)} = h^{(j-1)} + h_j e_j$, met e_j de j-de standaardbasisvector.

Definieer de functie g_j : R æ R door

$$g_j(t) = f(a_1 + h_1, \ldots, a_{j-1} + h_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Dan is $f(a+h^{(j)}) - f(a+h^{(j-1)}) = g(a_j + h_j) - g(a_j)$. Omdat f partieel differentieerbaar is op $V(a;\varepsilon)$, is de functie g_j differentieerbaar op $]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[$. Door toepassing van de middelwaardestelling op de functie g_j zien we dat er een tussen a_j en $a_j + h_j$ gelegen $a_j + \theta_j(h)$ bestaat zo dat

$$\begin{aligned} f(a+h^{(j)}) - f(a+h^{(j-1)}) &= g_j'(a_j + \theta_j(h))\, h_j \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h^{(j-1)} + \theta_j(h)e_j)\, h_j \end{aligned} \tag{3.14}$$

(de laatste identiteit is een direkt gevolg van de definitie van de j-de partiële afgeleide). Ter afkorting noteren we $d_j(h) = h^{(j-1)} + \theta_j(h)e_j$. De ligging van de punten $a + h^{(j)}, a + d_j(h)$ wordt voor het geval $n = 3$ geïllustreerd door de schets in Figuur 7.

Het getal $\theta_j(h)$ ligt tussen 0 en h_j. Met de insluitstelling concluderen we nu dat $\lim_{h\to 0} \theta_j(h) = 0$, en met de somregel dat

$$\lim_{h\to 0} d_j(h) = 0.$$

Uit (3.13) en (3.14) vinden we dat:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + d_j(h))\, h_j.$$

Anderzijds is

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_j + \rho(h);$$

door beide uitdrukkingen van elkaar af te trekken vinden we:

$$\rho(h) = \sum_{j=1}^{n} [\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + d_j(h)) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)] h_j.$$

Voor elke j geldt: $|h_j| \leq ||h||$. Na deling door $||h||$ vinden we derhalve door toepassing van de driehoeksongelijkheid dat:

$$\frac{|\rho(h)|}{||h||} \leq \sum_{j=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + d_j(h)) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)|. \tag{3.15}$$

De partiële afgeleide $\partial f/\partial x_j$ is continu in a; door toepassing van de substitutiestelling vinden we daarom dat:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a + d_j(h)) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

We zien dat het rechterlid van (3.15) limiet 0 heeft voor $h \to 0$, en met de insluitstelling concluderen we tenslotte dat (3.12) geldt. □

Figuur 7: Bij het bewijs van Stelling 3.2.1

Formules (3.11) en (3.12) kunnen ook samengevat worden als

$$f(x) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x - a \rangle + o(\|x - a\|) \qquad (x \to a).$$

De functie $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, $x \mapsto f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), x - a \rangle$ is dus een benadering van f in de buurt van a. Haar grafiek V is een n-dimensionale lineaire deelvariëteit van R^{n+1}. We noemen V de (geometrische) *raakruimte* aan graf f in het punt $(a, f(a))$. In het geval $n = 1$ noemen we V de raaklijn, in het geval $n = 2$ noemen we V het raakvlak. In het college Analyse 3 zal uitgebreider op de definitie van raakruimte ingegaan worden.

Voorbeeld 3.2.3 Zij $a = (a_1, a_2) \in \mathrm{R}^2$ inwendig punt van het domein van $f : \mathrm{R}^2$ æ R, en veronderstel dat de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ en $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ in een omgeving van a bestaan en in a continu zijn. We onderzoeken in meer detail het raakvlak in a aan de grafiek van f.

De geometrische raakruimte aan graf f in het punt $(a, f(a)) \in \mathrm{R}^3$ is gelijk aan de grafiek van de functie $l : x \mapsto f(a) + L(x - a)$, met $L : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ de lineaire afbeelding gedefinieerd door $L(h) = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle$. Men ziet gemakkelijk in dat men graf l verkrijgt door de grafiek van L over $(a_1, a_2, f(a))$ te verschuiven:

$$\operatorname{graf} l = (a_1, a_2, f(a)) + \operatorname{graf} L.$$

De grafiek van L is het deel van R^3 dat bestaat uit de punten $h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathrm{R}^3$ met $h_3 = \langle \operatorname{grad} f(a), (h_1, h_2) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2$. Derhalve is graf L de twee dimensionale lineaire deelruimte van R^3 opgespannen door de vectoren:

$$u_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)) \qquad \text{en} \qquad u_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)).$$

Hieraan zien we dat de raakruimte graf l gelijk is aan het vlak door de twee lijnen:

$$m_1 = (a_1, a_2, f(a)) + \langle u_1 \rangle, \qquad m_2 = (a_1, a_2, f(a)) + \langle u_2 \rangle.$$

Deze twee lijnen hebben de volgende interpretatie. De lijn m_1 is gelegen in het vlak $x_2 = a_2$, en wordt in dat vlak gegeven door de vergelijking $x_3 = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1)$. De hierin voorkomende partiële afgeleide is de afgeleide van de functie $x_1 \to f(x_1, a_2)$ in a_1; op grond van de theorie van functies van één veranderlijke is m_1 dus de raaklijn aan de (in het vlak $x_2 = a_2$ gelegen) grafiek van de functie $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$.

Op analoge wijze ziet men in dat de lijn m_2 gelijk is aan de raaklijn in $(a_1, a_2, f(a))$ aan de (in het vlak $x_1 = a_1$ gelegen) grafiek van de functie $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$. Zie Figuur 8.

Figuur 8: Raakvlak van $f : \mathrm{R}^2$ æ R

Voorbeeld 3.2.4 We beschouwen de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = y^2 - x^2,$$

zie ook Voorbeeld 1.4.4. De gradient van f in een punt (a, b) wordt gegeven door

$$\operatorname{grad} f(a, b) = (-2a, 2b).$$

De raakruimte aan graf f in het punt $(a, b, b^2 - a^2)$ is per definitie het vlak in R^3 gegeven door:

$$z = f(a, b) + \langle \operatorname{grad} f(a, b), (x, y) - (a, b) \rangle = a^2 - b^2 - 2ax + 2by.$$

In het bijzonder wordt het raakvlak in $(0, 0, 0)$ gegeven door $z = 0$, terwijl het raakvlak in $(2, 1, -3)$ gegeven wordt door $z = 3 - 4x + 2y$.

3.3 Kettingregel voor differentiëren langs een kromme

Als toepassing van Stelling 3.2.1 bespreken we eerst het volgende nuttige verband tussen de gradiënt en de richtingsafgeleiden van een functie.

Gevolg 3.3.1 *Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R een scalaire functie zijn, en $a \in \mathrm{R}^n$. Als f partieel differentieerbaar is op een open omgeving van a, terwijl de partiële afgeleiden van f continu zijn in a, dan is f in a richtingsdifferentieerbaar in iedere richting $v \in \mathrm{R}^n$; de richtingsafgeleiden worden gegeven door*

$$D_v f(a) = \langle\, \mathrm{grad}\, f(a), v\,\rangle \tag{3.16}$$

Opmerking 3.3.2 In het bijzonder blijkt uit het bovenstaande dat de richtingsafgeleide $D_v f(a)$ lineair van de vector v afhangt.

Bewijs: De identiteit is triviaal als $v = 0$; veronderstel daarom dat $v \neq 0$. Zij ρ als in de voorgaande stelling. Dan geldt voor $t \in \mathrm{R}$ in een geschikte omgeving van 0 dat

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = t^{-1}\langle\, \mathrm{grad}\, f(a), tv\,\rangle + t^{-1}\rho(tv) = \langle\, \mathrm{grad}\, f(a), v\,\rangle + t^{-1}\rho(tv). \tag{3.17}$$

Er geldt dat

$$\lim_{t\to 0} ||t^{-1}\rho(tv)|| = \lim_{t\to 0} ||v|| \frac{||\rho(tv)||}{||tv||} = 0.$$

Derhalve is $\lim_{t\to 0} t^{-1}\rho(tv) = 0$. Hieraan zien we dat het laatste (en dus het eerste) lid van (3.17) limiet $\langle\, \mathrm{grad}\, f(a), v\,\rangle$ heeft; dit geeft de richtingsdifferentieerbaarheid en de formule voor de richtingsafgeleide, zie Definitie 2.4.1. □

Merk op dat de richtingsafgeleide opgevat kan worden als afgeleide van f langs een kromme. Immers zij $c : [-1, 1] \to \mathrm{R}^n$ gedefinieerd door $c(t) = a+tv$, dan is $D_v f(a) = (f \circ c)'(0)$. Anderzijds is $c(0) = a$, $v = c'(0)$, dus uit (3.16) volgt dat $(f \circ c)'(0) = \langle\, \mathrm{grad}\, f(c(0)), c'(0)\,\rangle$. Dit resultaat geldt algemener voor *iedere* differentieerbare kromme.

Stelling 3.3.3 **(Kettingregel voor differentiëren langs een kromme)** *Zij $c : I \to \mathrm{R}^n$ een kromme, die differentieerbaar is in een punt $t_0 \in I$, en veronderstel dat de functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R partieel differentieerbaar is in een open omgeving van $c(t_0)$, terwijl de partiële afgeleiden van f continu zijn in $c(t_0)$. Dan is de functie $f \circ c : I$ æ R differentieerbaar in t_0 en er geldt:*

$$(f \circ c)'(t_0) = \langle\, \mathrm{grad}\, f(c(t_0)), c'(t_0)\,\rangle.$$

Opmerking 3.3.4 (a) Door uitschrijven van het inprodukt zien we dat de bovenstaande identiteit gelijkwaardig is met de volgende:

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t_0)) \frac{c_j}{dt}(t_0).$$

(b) In het geval $n = 1$ is de bovenstaande identiteit juist de kettingregel voor functies van één variabele. De kettingregel geldt reeds als f differentieerbaar is in $c(t_0)$; de eis dat de afgeleide van f continu is in $c(t_0)$ is dan ook zwaarder dan nodig in dat geval. Later zullen we zien dat de hierboven geformuleerde kettingregel ook geldt onder een zwakkere voorwaarde op de functie f.

Bewijs: Het bewijs berust op hetzelfde idee als dat van het voorgaande resultaat. Ter afkorting schrijven we $a = c(t_0)$ en $h(\tau) = c(t_0 + \tau) - c(t_0)$. Door de definitie van gewone afgeleide als limiet van een differentiequotiënt te gebruiken zien we dat

$$h'(0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{h(\tau)}{\tau} = c'(t_0). \tag{3.18}$$

Definiëren we ρ als in Stelling 3.2.1, dan geldt voor $\tau \in \mathrm{R}$ met $t_0 + \tau \in I$ dat:

$$\begin{aligned} \frac{f(c(t_0+\tau)) - f(c(t_0)))}{\tau} &= \frac{f(a + h(\tau)) - f(a)}{\tau} \\ &= \tau^{-1}\langle \operatorname{grad} f(a), h(\tau) \rangle + \tau^{-1}\rho(h(\tau)) \\ &= \langle \operatorname{grad} f(a), \frac{h(\tau)}{\tau} \rangle + \tau^{-1}\rho(h(\tau)) \end{aligned} \tag{3.19}$$

We zullen het bewijs voltooien door te laten zien dat het laatste lid (en daarmee het eerste lid) een limiet heeft voor $\tau \to 0$. We behandelen de twee termen van het laatste lid apart.

Hierboven zagen we dat $\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1} h(\tau) = c'(t_0)$. De afbeelding $v \mapsto \langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle, \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ is lineair, dus continu, en met de substitutiestelling concluderen we:

$$\lim_{\tau \to 0} \langle \operatorname{grad} f(a), \frac{h(\tau)}{\tau} \rangle = \langle \operatorname{grad} f(a), c'(t_0) \rangle.$$

De limiet van de tweede term in (3.19) bepalen we als volgt. Uit (3.18) volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $\|\tau^{-1}h(\tau)\|$ begrensd is op $\mathrm{dom}(h) \cap [-\delta, \delta]$, zeg door een constante $M > 0$. Derhalve is:

$$\rho(h(\tau)) = o(\|h(\tau)\|) = o(M\|\tau\|) = o(\|\tau\|) \quad (\tau \to 0).$$

We concluderen dat $\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}\rho(h(\tau)) = 0$. □

Voorbeeld 3.3.5 We beschouwen de kromme $c : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $[0, 2\pi] \to \mathrm{R}^2$. (Het beeld van c is de eenheidscirkel in R^2.) De kromme c is in ieder punt van zijn domein differentieerbaar, met als afgeleide: $c'(t) = (-\sin t, \cos t)$.

Zij $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = xy^2 + ye^{-x}$. Dan volgt uit de rekenregels voor differentiatie dat f partieel differentieerbaar is op R^2; de gradiënt wordt gegeven door:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (y^2 - ye^{-x}, 2xy + e^{-x}).$$

Hieraan zien we dat f een C^1-functie is op R^2. Er geldt:

$$\operatorname{grad} f(c(t)) = \operatorname{grad} f(\cos t, \sin t) = (\sin^2 t - \sin t e^{-\cos t}, 2\cos t \sin t + e^{-\cos t}).$$

Met behulp van de bovenstaande stelling vinden we dus, voor iedere $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) &= \langle \operatorname{grad} f(c(t)), c'(t) \rangle \\ &= 2\cos^2 t \sin t - \sin^3 t + (\cos t - \sin^2 t)e^{-\cos t}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

We kunnen ook direkt $f \circ c$ bepalen en dan diffentiëren. Er geldt:

$$f(c(t)) = \cos t \sin^2 t + \sin t e^{-\cos t}.$$

Differentiëren van deze uitdrukking naar t levert inderdaad (3.20).

Voorbeeld 3.3.6 Zij $f(t) = (\cos t)^{\sin t}$ (waarbij $\mathrm{dom}(f) = \{t \in \mathrm{R} \mid \cos t > 0\}$). We berekenen de afgeleide van f op twee manieren.

(a) klassiek: $f(t) = e^{\sin t \log \cos t}$, dus

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\sin t \log \cos t)' e^{\sin t \log \cos t} \\ &= \left(\cos t \log \cos t + \frac{\sin t}{\cos t}(-\sin t)\right)(\cos t)^{\sin t} \\ &= (\cos t)^{1+\sin t} \log \cos t - (\sin t)^2 (\cos t)^{-1+\sin t}. \end{aligned}$$

(b) met de kettingregel: definieer

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \text{ en } g(x,y) = x^y.$$

Dan is $f = g \circ \varphi$, dus

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(t))\frac{dy}{dt}(t).$$

Nu is

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^y \log x,$$

en

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\sin t, \qquad \frac{dy}{dt}(t) = \cos t.$$

Dus

$$\frac{df}{dt}(t) = \sin t (\cos t)^{-1+\sin t}(-\sin t) + (\cos t)^{\sin t}(\log \cos t)(\cos t).$$

We vinden dezelfde uitkomst.

3.4 Eigenschappen van de gradiënt

Zij $U \subset \mathrm{R}^n$ een open deel, en f een C^1-functie $U \to \mathrm{R}$. Dan definiëert de gradiënt

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

een continue functie $U \to \mathrm{R}^n$. Deze vectorwaardige functie verschaft ons inzicht in het groeigedrag van de functie f op U.

Zij $a \in U$, en veronderstel dat a geen stationair punt is van f (dus $\mathrm{grad}\, f(a) \neq 0$, zie Definitie 2.2.3). De richtingsafgeleiden van f in a worden gegeven door de formule (3.16). Combineren we de genoemde formule met de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (Lemma 1.2.1) voor het inprodukt, dan zien we dat voor alle vectoren $v \in \mathrm{R}^n$ geldt: $|D_v f(a)| \leq \|v\| \|\mathrm{grad}\, f(a)\|$. In het vervolg beperken we ons tot vectoren v met lengte één. Dan geldt:

$$D_v f(a) \leq \|\mathrm{grad}\, f(a)\| \qquad (\|v\| = 1).$$

De waarde in het rechterlid wordt door precies één eenheidsvector $v_{\max}$ aangenomen, namelijk door degene die een positief scalair veelvoud van $\mathrm{grad}\, f(a)$ is (gebruik weer Lemma 1.2.1), dus door $v_{\max} = \|\mathrm{grad}\, f(a)\|^{-1}\, \mathrm{grad}\, f(a)$. Aangezien de richtingsafgeleide $D_v f(a)$ de groei van f in a in de richting v meet concluderen we:

(a) De *richting* van grad $f(a)$ is de richting van grootste groei van de functie f vanuit het punt a.

(b) De *lengte* van grad $f(a)$ geeft de mate van groei van f vanuit a in die richting aan.

Door voor een groot aantal punten a van U de vector grad $f(a)$ te schetsen *met als aangrijppunt het punt* a, kunnen we ons derhalve een beeld vormen van de groei van f.

Voorbeeld 3.4.1 Zij $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = (x^2 + y^2)/4$. Dan is

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y).$$

De hierboven gesuggereerde schets ziet er als volgt uit:

Figuur 9: Het gradiëntenveld van $f(x, y) = (x^2 + y^2)/4$

De gradiënt van f heeft een nulpunt in $(0, 0)$. Men ziet direkt dat f in dit punt een (zelfs globaal) minimum heeft. De sterkste groei van f treedt op langs halfrechten vanuit de oorspong, de grootte van de sterkste groei van f in het punt (x, y) wordt gegeven door $\|\operatorname{grad} f\| = \frac{1}{2}\|(x, y)\|$: deze groei is evenredig aan de afstand tot de oorsprong.

De situatie dat er in ieder punt a van een verzameling $S \subset \mathrm{R}^n$ een vector $\xi(a)$ gedefinieerd is formaliseren we in de volgende definitie.

Definitie 3.4.2 Zij S een deelverzameling van R^n. Onder een *vectorveld* op S verstaan we een afbeelding $\xi : S \to \mathrm{R}^n$.

Opmerking 3.4.3 Meestal spreekt men slechts van een vectorveld als de context daartoe aanleiding geeft. Daarbij stelt men zich dan voor dat de vector $\xi(a)$ $(a \in S)$ aangrijpt in het punt a. In de fysica komen zulke situaties veelvuldig voor: men denke aan krachtvelden, en aan snelheidsvelden van stromingen. Verderop in het diktaat zullen we een aantal vectorvelden tegenkomen die op natuurlijke wijze optreden in de analyse in meer veranderlijken. De gradiënt van een functie is een eerste voorbeeld van zo'n vectorveld.

De hierboven genoemde eigenschap van de gradiënt wordt gecompleteerd door een resultaat dat de richtingen van het vectorveld $\operatorname{grad} f$ ten aanzien van de niveauverzamelingen van f beschrijft.

Laat V een deelverzameling van R^n zijn, en $a \in V$. Onder een *raakrichting* aan V in het punt a verstaan we een vector $v \in \mathrm{R}^n$ waarvoor een tij $(x_k)_{k\geq 1}$ van punten in $V \setminus \{a\}$ bestaat, met

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \qquad \text{en} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{x_k - a}{\|x_k - a\|} = v. \tag{3.21}$$

Zie Figuur 10 voor een illustratie van dit begrip.

Lemma 3.4.4 *Zij f een C^1-functie gedefinieerd op een open deel $U \subset \mathrm{R}^n$. Zij $a \in U$, en N de niveauverzameling van f door het punt a, dus:*

$$N = N_{f(a)} = \{x \in U \mid f(x) = f(a)\}.$$

Dan geldt voor iedere raakrichting v aan N in a dat

$$\operatorname{grad} f(a) \perp v.$$

Bewijs: Zij $\rho : \mathrm{R}^n$ æ R gedefinieerd door $f(a+h) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle + \rho(h)$. Dan geldt wegens Stelling 3.2.1 dat $\rho(h) = o(\|h\|)$ $(h \to 0)$.

Er is een rij (x_k) van punten in N met $x_k \neq a$, en (3.21). Er geldt $f(x_k) = f(a)$ voor alle $k \geq 1$, dus $0 = f(x_k) - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), x_k - a \rangle + \rho(x_k - a)$. Hieruit volgt dat:

$$\langle \operatorname{grad} f(a), \frac{x_k - a}{\|x_k - a\|} \rangle = -\frac{\rho(x_k - a)}{\|x_k - a\|}. \tag{3.22}$$

Uit $\rho(h) = o(\|h\|)$ volgt dat het rechterlid van deze gelijkheid limiet 0 heeft voor $k \to \infty$. Anderzijds is $v \mapsto \langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle$ lineair, dus continu, en de tweede limiet in (3.21) gebruikend concluderen we dat het linkerlid van (3.22) limiet $\langle \operatorname{grad} f(a), v\rangle$ heeft. We concluderen dat $\langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle = 0$. □

Opmerking 3.4.5 Intuïtief gesproken kan men het bovenstaande samenvatten als:

De vector $\operatorname{grad} f(a)$ *staat in a loodrecht op de niveauverzameling van f door a.*

Voor een correcte formulering van dit idee zijn de begrippen 'deelvariëteit' en 'raakruimte' (aan een deelvariëteit) onontbeerlijk. Die zullen in het college Analyse 3 aan de orde komen.

Figuur 10: Gradiënt loodrecht op de niveauverzameling

Voorbeeld 3.4.6 Zij f als in Voorbeeld 3.4.1. Dan zijn de niveaulijnen van f concentrische cirkels met middelpunt in de oorsprong. Inderdaad staat $\operatorname{grad} f$ overal loodrecht op deze cirkels.

Voorbeeld 3.4.7 Zij $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ een differentieerbare functie. De grafiek van φ is ook de niveaulijn voor niveau 0 van de functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, (x, y) \mapsto y - \varphi(x)$. Nu is $\operatorname{grad} f(x, y) = (-\varphi'(x), 1)$. Inderdaad staat deze vector loodrecht op de vector $(1, \varphi'(x))$ die de richting van de raaklijn aan $\operatorname{graf} \varphi$ in het punt $(x, \varphi(x))$ aangeeft.

Opmerking 3.4.8 We beschouwen nogmaals de situatie van Lemma 3.4.4. Laat voorts $c : I \to \mathrm{R}^n$ een kromme zijn, terwijl $t_0 \in I$ en $c(t_0) = a$. Als het beeld van c in de niveauverzameling $N = N_{f(a)}$ van f ligt, dan is $f \circ c$ constant (met waarde $f(a)$). In het bijzonder is de samenstelling een differentieerbare functie met afgeleide 0. Is c differentieerbaar in t_0 dan geldt wegens de kettingregel voor differentiëren langs een kromme (Stelling 3.3.3) dat

$$0 = (f \circ c)'(t_0) = \langle \operatorname{grad} f(a), c'(t_0) \rangle.$$

Hieraan zien we nogmaals dat $\operatorname{grad} f$ loodrecht op de niveauverzamelingen van f staat in de volgende zin: $\operatorname{grad} f(a)$ staat loodrecht op de snelheidsvector in a aan iedere differentieerbare kromme door a waarvan het beeld gelegen is in de niveauverzameling van f door a.

Hoofdstuk 4

De totale afgeleide

4.1 Totale differentieerbaarheid

Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R een functie zijn, die voldoet aan de voorwaarden van Stelling 3.2.1. Zij $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de afbeelding gedefinieerd door $Lh = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle$. Dan is L een *lineaire* afbeelding. Bovendien geldt dat

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(||h||) \qquad (h \to 0). \tag{4.1}$$

Is $L' : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ een lineaire afbeelding met dezelfde eigenschap, dan is $L - L'$ een lineaire afbeelding met de eigenschap dat $(L - L')(h) = Lh - L'h = o(||h||)$ $(h \to 0)$. Met het onderstaande lemma volgt hieruit dat $L = L'$. Met andere woorden: *de lineaire afbeelding L is volledig gekarakteriseerd door* (4.1).

Lemma 4.1.1 *Zij $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ een lineaire afbeelding met de eigenschap $Lh = o(||h||)$ $(h \to 0)$. Dan is $L = 0$.*

Bewijs: Fixeer $v \in \mathrm{R}^n$, $v \neq 0$. Dan geldt:

$$0 = \lim_{t \downarrow 0} \frac{L(tv)}{||tv||} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{tL(v)}{|t|\,||v||} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{L(v)}{||v||} = \frac{L(v)}{||v||}.$$

Dus $Lv = 0$ voor alle $v \in \mathrm{R}^n$. □

Door bestudering van het bewijs van de kettingregel langs krommen (Stelling 3.3.3), blijkt dat daarin alleen gebruik gemaakt wordt van (4.1). Stelling 3.3.3 is dus reeds geldig onder de (zwakkere) eis op f dat er een lineaire afbeelding L bestaat zo dat (4.1).

Het bovenstaande verschaft sterke motivatie voor de volgende definitie.

Definitie 4.1.2 **(De totale afgeleide)** Zij $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p een functie en zij a een inwendig punt van $\operatorname{dom}(f)$. Dan heet f *differentieerbaar* (of ook: *totaal differentieerbaar*) in a als er een lineaire afbeelding $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ en een afbeelding $\rho : \mathrm{R}^n$ æ R^p bestaan zo dat geldt:

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \rho(h) \qquad (a + h \in \operatorname{dom}(f)) \qquad \text{en} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\rho(h)}{||h||} = 0.$$

De lineaire afbeelding L (die uniek bepaald is wegens Lemma 4.1.1) heet de *afgeleide* of *totale afgeleide* van f in a, notatie: $L = Df(a)$.

Opmerking 4.1.3 Voor $n = 1$ is de bovenstaande definitie van differentieerbaarheid equivalent met de vroeger gegeven definitie voor een functie $f : \mathbb{R}$ æ $\mathbb{R}^p$. Immers zij a een inwendig punt van het domein van f.

Is f in a differentieerbaar volgens de oude definitie, dan bestaat $f'(a)$. Zij $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding $h \mapsto f'(a)h$ ('vermenigvuldiging met $f'(a)$'), en schrijf $\rho(h) = f(a+h) - f(a) - L(h)$. Dan is

$$\lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0,$$

dus $\rho(h) = o(|h|)$ en f is in a totaal differentieerbaar met afgeleide $Df(a) = L : h \mapsto f'(a)h$.

Is omgekeerd f differentieerbaar in a volgens de nieuwe definitie, schrijf dan $\rho(h) = f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)$. Dan is

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = h^{-1} Df(a)(h) + h^{-1}\rho(h) = Df(a)(1) + h^{-1}\rho(h).$$

Uit $\rho(h) = o(|h|)$ volgt derhalve

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = Df(a)(1).$$

Dus f is in a differentieerbaar volgens de oude definitie en er geldt: $f'(a) = Df(a)(1)$.

Voorbeeld 4.1.4 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x,y) = xe^y$. Uit de Stelling van Taylor met rest volgt dat $e^y = 1 + y + r(y)$, met $r(y) = o(|y|)$ $(y \to 0)$. Dus:

$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = h_1 e^{h_2} = h_1 + h_1 h_2 + h_1 r(h_2).$$

Definieer $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $L(h) = h_1$, en $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door $\rho(h) = h_1 h_2 + h_1 r(h_2)$. Dan is de afbeelding L lineair. Uit $r(h_2) = o(|h_2|)$ volgt $\rho(h) = \mathcal{O}(|h_1 h_2|)$. Uit $0 \leq (|h_1| - |h_2|)^2$ volgt $2|h_1 h_2| \leq h_1^2 + h_2^2 \leq ||h||^2$; hieruit leiden we af dat

$$\frac{\rho(h)}{||h||} = ||h||^{-1} \mathcal{O}(||h||^2) = \mathcal{O}(||h||)$$

voor $h \to 0$, dus $\lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{||h||} = 0$. Volgens Definitie 4.1.2 is f derhalve totaal differentieerbaar in $(0,0)$ met totale afgeleide $Df(0,0) : h \mapsto h_1$.

Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling zijn. Een functie $f : U \to \mathbb{R}^p$ heet (totaal) differentieerbaar op U als f differentieerbaar is in ieder punt $a \in U$.

We noteren de verzameling van alle lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ met $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Zijn $S, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ dan definiëren we hun som $S + T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ door $(S+T)x = Sx + Tx$. Zijn $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dan definiëren we $\lambda S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ door $(\lambda S) : x \mapsto \lambda Sx$. Voorzien van deze optelling en scalaire vermenigvuldiging is $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ een lineaire ruimte.

Is f differentieerbaar op U, dan verstaat men onder de *afgeleide* van f op U de functie

$$Df : x \mapsto Df(x), \quad U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p).$$

Voorbeeld 4.1.5 Laat $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ een lineaire afbeelding zijjn, en $a \in \mathrm{R}^n$ een willekeurig punt. Dan geldt voor alle $h \in \mathrm{R}^n$ dat $f(a+h) - f(a) = f(h)$. Derhalve geldt (4.1) met $L = f$ en $\rho = 0$ en we concluderen dat f in a differentieerbaar is met afgeleide $Df(a) = f$.

De afgeleide van f op R^n is in dit geval dus de constante functie $x \mapsto f$, $\mathrm{R}^n \to L(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^p)$.

Zoals ter motivatie van de definitie van totale differentieerbaarheid al opgemerkt werd, is het volgende resultaat een herformulering van Stelling 3.2.1.

Lemma 4.1.6 **(Herformulering van Stelling 3.2.1)** *Laat $f : \mathrm{R}^n$ æ R een functie zijn, en a een inwendig punt van* $\mathrm{dom}(f)$*. Veronderstel dat f partieel differentieerbaar is in een open omgeving van a, terwijl alle partiële afgeleiden continu zijn in a. Dan is f differentieerbaar in a. De totale afgeleide van f in a wordt gegeven door*

$$Df(a)h = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle.$$

Opmerking 4.1.7 De in Voorbeeld 4.1.4 gebruikte methode om de totale differentieerbaarheid van een functie aan te tonen is nogal omslachtig. In de praktijk gebruikt men dan ook vooral Lemma 4.1.6. Daaruit volgt in het bijzonder: is f een scalaire C^1-functie op een open deel $U \subset \mathrm{R}^n$, dan is f differentieerbaar op U, met afgeleide $Df : x \mapsto \langle \operatorname{grad} f(x), \cdot \rangle$.

Voorbeeld 4.1.8 We beschouwen nogmaals de functie $f(x,y) = xe^y$ uit Voorbeeld 4.1.4. Met de rekenregels voor partieel differentiëren ziet men direkt in dat f overal partieel differentieerbaar is, terwijl $\operatorname{grad} f(x,y) = (e^y, xe^y)$. Gebruik makend van de rekenregels voor continuïteit ziet men vervolgens in dat de partiële afgeleiden van f overal continu zijn; f is derhalve een C^1 functie. Met Lemma 4.1.6 zien we in dat f in elk punt $(a,b) \in \mathrm{R}^2$ totaal differentieerbaar is, met een totale afgeleide die gegeven wordt door

$$Df(a,b) : h \mapsto \langle \operatorname{grad} f(a,b), h \rangle = e^b h_1 + ae^b h_2.$$

In het bijzonder is f totaal differentieerbaar in $(0,0)$, met afgeleide: $Df(0,0) : h \mapsto h_1$.

De opmerkingen ter motivatie van, en voorafgaande aan, de definitie van totale differentieerbaarheid suggereerden reeds het volgende verband tussen totale differentieerbaarheid en richtingsdifferentieerbaarheid.

Stelling 4.1.9 *Veronderstel dat $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p in het punt $a \in \mathrm{R}^n$ totaal differentieerbaar is. Dan is f in a richtingsdifferentieerbaar in iedere richting $v \in \mathrm{R}^n$. De richtingsafgeleiden worden gegeven door:*

$$D_v f(a) = Df(a)v. \tag{4.2}$$

Bewijs: Het bewijs is geheel analoog aan dat van Gevolg 3.3.1.

Zij $v \in \mathrm{R}^n$. Dan volgt uit de totale differentieerbaarheid van f in a dat:

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \frac{1}{t} Df(a)(tv) + \frac{1}{t}\rho(tv) = Df(a)(v) + \frac{1}{t}\rho(tv).$$

Uit $\rho(h) = o(||h||)$ $(h \to 0)$ volgt dat $\lim_{t\to 0} t^{-1}\rho(tv) = 0$, dus het bovenstaande differentiequotiënt heeft limiet $Df(a)(v)$ als $t \to 0$. Hieruit volgen de richtingsdifferentieerbaarheid en de formule voor de richtingsafgeleide. $\square$

Opmerking 4.1.10 (a) In het bijzonder blijkt uit het bovenstaande weer dat de richtingsafgeleide $D_v f(a)$ lineair van de vector v afhangt, zie ook Opmerking 3.3.2.

(b) Voor $n = 1$ volgt uit het bovenstaande weer dat $f'(a) = D_1 f(a) = Df(a)(1)$; zie ook Opmerking 4.1.3.

Voorbeeld 4.1.11 Zij $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad \text{als} \quad (x,y) \neq (0,0) \qquad \text{en} \qquad f(0,0) = 0.$$

Deze f is op de hele R^2 continu: buiten $(0,0)$ op grond van de rekenregels en in $(0,0)$ omdat

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \leq ||(x,y)||,$$

dus $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

We berekenen de richtingsafgeleiden van f in $(0,0)$. Zij $v = (a,b) \neq (0,0)$ en zij $t \neq 0$. Men ziet direct dat

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{a^3}{a^2+b^2}.$$

Dus

$$D_v f(0,0) = \frac{a^3}{a^2+b^2}.$$

In het bijzonder vinden we:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(neem voor (a,b) resp. $(1,0)$ en $(0,1)$). We zien dat alle richtingsafgeleiden in $(0,0)$ bestaan, maar dat $v \mapsto D_v f(0,0)$ niet lineair is. Dus is f in $(0,0)$ niet totaal differentieerbaar (Opmerking 4.1.10).

Wegens Lemma 4.1.6 kunnen de partiële afgeleiden $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$ niet beiden continu zijn in $(0,0)$. We verifiëren dat nog eens op een andere manier. Voor $(x,y) \neq (0,0)$ berekenen we:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 + y^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

We constateren dat langs iedere rechte door de oorsprong de partiële afgeleiden een constante waarde hebben (behalve in de oorsprong):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(t,bt) &= 1 + \frac{b^2(1-b^2)}{(1+b^2)^2} = \frac{1+3b^2}{(1+b^2)^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(t,bt) &= \frac{-2b}{(1+b^2)^2}.
\end{aligned}$$

We concluderen dat $\partial f/\partial x$ en $\partial f/\partial y$ beide in $(0,0)$ niet continu zijn. (Ga na dat in iedere omgeving van $(0,0)$ de functie $\partial f/\partial x$ alle waarden van $[0,\frac{9}{8}]$ aanneemt en $\partial f/\partial y$ alle waarden van $[-\frac{3}{8}\sqrt{3},\frac{3}{8}\sqrt{3}]$.)

Opmerking 4.1.12 Tevens geldt het analogon van Stelling 3.3.3: *Laat de kromme $c : I \to \mathrm{R}^n$ differentieerbaar zijn in $t_0 \in I$, en zij $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p differentieerbaar in $c(t_0)$. Dan is $f \circ c$ differentieerbaar in t_0 met afgeleide:*

$$(f \circ c)'(t_0) = Df(c(t_0))(c'(t_0)). \tag{4.3}$$

Het bewijs is geheel analoog aan het bewijs van Stelling 3.3.3. We komen later op de bovenstaande identiteit terug in het kader van de algemenere ketttingregel voor totale afgeleiden, zie Stelling 4.3.2.

We eindigen deze paragraaf met enkele eenvoudige eigenschappen van de totale afgeleide, die vrijwel direkt uit de definitie volgen.

Uit Analyse 1 is bekend dat een differentieerbare functie van één veranderlijke continu is. Analoog daaraan geldt het volgende.

Lemma 4.1.13 **(Differentieerbaar impliceert continu)** *Als $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p totaal differentieerbaar is in a, dan is f continu in a.*

Bewijs: Noem $Df(a) = L$. Schrijf $f(a+h) = f(a) + L(h) + \rho(h)$. Dan is $\lim_{h\to 0} L(h) = 0$ omdat de lineaire afbeelding L continu is. Verder is $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$, omdat volgens Definitie 4.1.2 zelfs $\lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{||h||} = 0$. We concluderen dat $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$, dus dat f in a continu is. □

Uit de definitie van totale differentieerbaarheid kunnen we direkt de volgende rekenregels afleiden.

Lemma 4.1.14 **(Rekenregels)** *Als de functies $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p en $g : \mathrm{R}^n$ æ R^p totaal differentieerbaar zijn in het punt $a \in \mathrm{R}^n$, dan is de functie $f+g$ dat ook, en er geldt:*

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

Voorts is dan ook voor iedere $\lambda \in \mathrm{R}$ de functie λf totaal differentieerbaar in a, met afgeleide:

$$D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a).$$

Bewijs: Veronderstel dat f en g totaal differentieerbaar zijn in a. Het punt a is dan een inwendig punt van $\mathrm{dom}(f)$ en van $\mathrm{dom}(g)$, dus ook van $\mathrm{dom}(f+g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ en van $\mathrm{dom}(\lambda f) = \mathrm{dom}(f)$.

Uit het gegeven volgt dat er afbeeldingen $\rho_f, \rho_g : \mathrm{R}^n$ æ R^p bestaan zo dat

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a)h + \rho_f(h), \\ g(a+h) &= g(a) + Dg(a)h + \rho_g(h), \end{aligned}$$

terwijl

$$\rho_f(h) = o(\|h\|) \quad \text{en} \quad \rho_g(h) = o(\|h\|) \qquad (h \to 0).$$

Door optellen vinden we

$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + [Df(a) + Dg(a)](h) + \rho(h),$$

met $\rho(h) := \rho_f(h) + \rho_g(h)$. Nu is $Df(a) + Dg(a)$ lineair, terwijl $\rho(h) = o(\|h\|)$ $(h \to 0)$. Hieruit volgt per definitie dat $f+g$ in a totaal differentieerbaar is met afgeleide $Df(a) + Dg(a)$. Het bewijs voor λf gaat analoog. □

Het analogon van Lemma 2.3.2 geldt ook voor totale differentieerbaarheid.

Lemma 4.1.15 **(Componentsgewijs differentiëren)** *Laat een functie f : R^n æ R^p gegeven zijn en schrijf $f = (f_1, ..., f_p)$. Dan is f totaal differentieerbaar in een inwendig punt a van* dom(f) *dan en slechts dan als alle f_i : R^n æ R $(1 \le i \le p)$ in a totaal differentieerbaar zijn, en in dit geval is*

$$Df(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_p(a)). \tag{4.4}$$

Bewijs: '$\Rightarrow$': Veronderstel eerst dat f totaal differentieerbaar is in a, en schrijf $f(a+h) = f(a) + Df(a) + \rho(h)$. Dan is $\rho(h) = o(\|h\|)$ $(h \to 0)$. Nemen we de i-de component dan vinden we: $f_i(a+h) = f_i(a) + (Df(a)(h))_i + \rho_i(h)$. Hierin is de afbeelding $h \mapsto (Df(a)(h))_i$ lineair, terwijl uit $|\rho_i(h)| \le \|\rho(h)\|$ volgt dat $\rho_i(h) = o(\|h\|)$. De functie f_i is derhalve totaal differentieerbaar in a met afgeleide $Df_i(a) : h \mapsto (Df(a)(h))_i$.

'$\Leftarrow$': Veronderstel dat iedere f_i totaal differentieerbaar in a is, en schrijf $f_i(a+h) = f_i(a) + Df_i(a)(h) + \rho_i(h)$. Definieer de lineaire afbeelding $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ door

$$Lh = (Df_1(a)(h), \ldots, Df_p(a)(h)),$$

en schrijf $\rho(h) = (\rho_1(h), \ldots, \rho_p(h))$. Dan is $f(a+h) = f(a) + L(h) + \rho(h)$. Uit $\|\rho(h)\| \le |\rho_1(h)| + \ldots + |\rho_p(h)|$ leiden we af dat $\rho(h) = o(\|h\|)$. Derhalve is f totaal differentieerbaar in a met afgeleide $Df(a) = L$. Hieruit volgt (4.4). □

4.2 De Jacobimatrix

Uit de lineaire algebra kent u de beschrijving van een lineaire afbeelding door middel van een matrix. Doel van deze paragraaf is de matrix van de totale afgeleide van een functie te beschrijven.

Als voorbereiding bespreken we eerst nog eens kort de matrixnotatie. Laat $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ een lineaire afbeelding zijn. We noteren de standaardbasis van R^n met $e_1, \ldots, e_n$, die van R^p met $f_1, \ldots, f_p$. De *matrix* van L ten aanzien van de standaardbases is de $p \times n$ matrix $M = (m_{ij})$, waarbij de m_{ij} bepaald worden door $Le_j = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} f_i$ $(1 \le j \le n)$. Anders gezegd, de j-de kolom van de matrix M wordt gegeven door Le_j, genoteerd als kolomvector.

We hebben nu, voor $h \in \mathrm{R}^n$, dat

$$L(h) = M \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Merk op dat in het linkerlid de lineaire afbeelding L uitgevoerd op h staat; in het rechterlid staat het resultaat van de matrixvermenigvuldiging van M en de *kolomvector* h. In beide leden staat dus een kolomvector uit R^p.

Voor het zojuist beschreven calcuul is het noodzakelijk dat we de elementen van R^n en R^p opvatten als kolomvectoren. Dit zullen we in het vervolg altijd doen, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. Desalniettemin zullen we om typografische redenen de vectoren nog vaak – zoals voorheen– als rijvectoren schrijven.

Definitie 4.2.1 (Jacobimatrix) Zij $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p partieel differentieerbaar in een inwendig punt a van $\mathrm{dom}(f)$. Dan definiëren we de *Jacobimatrix* $J_f(a)$ van f in a als de $p \times n$-matrix met op de plaats in de i-de rij en de j-de kolom het getal $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$:

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Opmerking 4.2.2 Laten $f_1, \ldots, f_p : \mathrm{R}^n$ æ R de componenten van de functie f zijn. Dan geldt:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix};$$

immers de elementen van R^p zijn kolomvectoren. De partiële afgeleiden $\partial f / \partial x_j$ $(1 \leq j \leq n)$ verkrijgt men door in de bovenstaande kolomvector componentsgewijs de overeenkomstige partiële afgeleiden te nemen. Aldus kan men de Jacobimatrix herschrijven als:

$$J_f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)).$$

Dit inzicht maakt het gemakkelijker de definitie van de Jacobimatrix te onthouden.

Voorbeeld 4.2.3 De functie $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^2$ gegeven door $f(x, y, z) = (xy^2z^3, \sin xyz)$ heeft als Jacobimatrix

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \\ yz\cos xyz & xz\cos xyz & xy\cos xyz \end{pmatrix}.$$

De definitie van de Jacobimatrix wordt gemotiveerd door het volgende resultaat.

Stelling 4.2.4 *Veronderstel dat de functie $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p totaal differentieerbaar is in een inwendig punt a van $\mathrm{dom}(f)$. Dan is f in a partieel differentieerbaar. De Jacobimatrix $J_f(a)$ is de matrix van (de lineaire afbeelding) $Df(a)$ ten aanzien van de standaardbases:*

$$J_f(a) = \mathrm{mat}\, Df(a).$$

Bewijs: Zij e_j de j-de standaard basisvector in R^n voor $1 \leq j \leq n$. Volgens Stelling 4.1.9 is f in a richtingsdifferentieerbaar. De richtingsafgeleide in de richting van de j-de standaard basisvector wordt gegeven door $D_{e_j} f(a) = Df(a)(e_j)$. Wegens Stelling 2.4.7 is f in a dus partieel differentieerbaar, met als partiële afgeleide naar de j-de variabele:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = Df(a)(e_j). \tag{4.6}$$

De i-de component van het linkerlid (ten aanzien van de standaardbasis van R^p) is $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Dit betekent precies dat $J_f(a)$ de matrix van $Df(a)$ is ten aanzien van de standaardbases. □

Opmerking 4.2.5 We beschouwen nu het geval dat $p = 1$, en dat $f : \mathrm{R}^n$ æ R totaal differentieerbaar is in een inwendig punt a van zijn domein. Dan is f partieel differentieerbaar in a, dus grad $f(a)$ bestaat. Uit de bovenstaande stelling volgt nu dat de totale afgeleide gegeven wordt door

$$Df(a) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R},\ h \mapsto \langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle.$$

Dit zien we als volgt in. De gradiënt is een *kolomvector*:

$$\mathrm{grad}\, f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

De lineaire afbeelding $h \mapsto \langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle$ wordt beschreven door een *rijmatrix*; immers

$$\langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

De rijmatrix uit het laatste lid is $J_f(a)$, hetgeen ook de matrix is van $Df(a)$. De lineaire afbeeldingen $Df(a)$ en $\langle\, \mathrm{grad}\, f(a), \cdot\,\rangle$ hebben derhalve dezelfde matrix ten aanzien van de standaardbases, en zijn dus gelijk aan elkaar.

Tenslotte merken we nog het volgende op. Uit het bovenstaande blijkt dat totale differentieerbaarheid van $f : \mathrm{R}^n$ æ R in a impliceert dat:

$$f(a+h) = f(a) + \langle\, \mathrm{grad}\, f(a), h\,\rangle + o(||h||) \qquad (h \to 0).$$

Dit is precies de aanname die gebruikt is om de theorie van § 3.2 en § 3.3 te ontwikkelen. De daar behandelde definities en resultaten gaan derhalve door onder de (zwakkere) aanname van totale differentieerbaarheid. In het bijzonder geldt de kettingregel uit Stelling 3.3.3 reeds onder de aanname dat f differentieerbaar is in het punt $c(t_0)$; zie ook Opmerking 4.1.12.

Evenzo gelden de resultaten van § 3.4 reeds onder de aanname dat $f : U \to \mathrm{R}$ differentieerbaar is in ieder punt van U.

Omgekeerd volgt uit bestaan en continuïteit van (de elementen van) de Jacobimatrix de totale differentieerbaarheid van een functie. We hebben de volgende generalisatie van Lemma 4.1.6.

Stelling 4.2.6 **(Voldoende voorwaarde voor totale differentieerbaarheid)** *Zij* f : R^n æ R^p *een functie, en* a *een inwendig punt van* $\mathrm{dom}(f)$. *Als alle partiële afgeleiden van* f *in een omgeving van* a *bestaan en in* a *continu zijn, dan is* f *totaal differentieerbaar in* a. *De afgeleide* $Df(a) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ *is de lineaire afbeelding met matrix* $J_f(a)$ *ten aanzien van de standaardbases.*

Bewijs: Uit het gegeven volgt wegens Lemma's 2.3.7 en 1.3.4(b) dat de partiële afgeleiden van de componenten f_i : R^n æ R $(1 \leq i \leq p)$ bestaan op een open omgeving van a, terwijl ze continu zijn in a. Wegens Lemma 4.1.6 is iedere component f_i derhalve differentieerbaar in a. Met Lemma 4.1.15 volgt nu dat f differentieerbaar in a is. Met Stelling 4.2.4 volgt tenslotte de uitspraak over de matrix van $Df(a)$. □

4.3 De kettingregel

In deze paragraaf zal de waarde van Definitie 4.1.2 blijken uit een natuurlijk bewijs van de kettingregel voor de totale afgeleide. In dat bewijs zullen we het volgende lemma nodig hebben.

Lemma 4.3.1 *Zij* $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ *een lineaire afbeelding. Dan is er een constante* $C > 0$ *zo dat voor alle* $x \in \mathrm{R}^n$ *geldt:*

$$||Lx|| \leq C||x||.$$

Bewijs: Zij $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, dan is $L(x) = x_1L(e_1) + \ldots + x_nL(e_n)$, dus

$$\begin{aligned} ||L(x)|| &\leq |x_1|||L(e_1)|| + \ldots + |x_n|||L(e_n)|| \\ &\leq ||x||||L(e_1)|| + \cdots + ||x||||L(e_n)|| = C||x||, \end{aligned}$$

waarbij $C = \sum_{i=1}^n ||L(e_i)||$. □

Stelling 4.3.2 **(De kettingregel)** *Zij* f : R^n æ R^p *en* g : R^p æ R^q. *Als* f *totaal differentieerbaar is in* $a \in \mathrm{R}^n$ *en* g *totaal differentieerbaar in* $f(a) \in \mathrm{R}^p$, *dan is* $g \circ f$ *totaal differentieerbaar in* a *en voor de afgeleide van* $g \circ f$ *in* a *geldt:*

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \tag{4.7}$$

Bewijs: Omdat $f(a)$ inwendig punt is van $\mathrm{dom}(g)$, is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(f(a); \varepsilon) \subset \mathrm{dom}(g)$. Evenzo is er een $\delta > 0$ zo dat $B(a; \delta) \subset \mathrm{dom}(f)$. De functie f is continu in a (Lemma 4.1.13), dus door $\delta > 0$ te verkleinen kunnen we bereiken dat $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset \mathrm{dom}(g)$. Voor de gevonden δ geldt dat $B(a, \delta) \subset \mathrm{dom}(g \circ f)$; we concluderen dat a een inwendig punt van $g \circ f$ is.

Schrijf $Df(a) = L$ en $Dg(f(a)) = M$; uit de differentieerbaarheid van f in a en van g in $f(a)$ volgt het bestaan van functies φ : R^n æ R^p resp. ψ : R^p æ R^q zo dat voor alle $h \in \mathrm{R}^n$ resp. $k \in \mathrm{R}^p$ met $||h|| < \delta$, $||k|| < \varepsilon$ geldt:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + L(h) + ||h||\varphi(h) && \text{met} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0 \\ g(f(a)+k) &= g(f(a)) + M(k) + ||k||\psi(k) && \text{met} \quad \lim_{k \to 0} \psi(k) = 0. \end{aligned}$$

Definieer $k(h) := L(h) + ||h||\varphi(h)$. Dan is $f(a+h) = f(a) + k(h)$, dus als $||h|| < \delta$ dan $||k(h)|| < \varepsilon$, en er geldt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) = g(f(a) + k(h)) \\ &= g(f(a)) + M(k(h)) + ||k(h)||\, \psi(k(h)) \\ &= g(f(a)) + M(L(h)) + ||h||\, M(\varphi(h)) + ||k(h)||\, \psi(k(h)) \\ &= (g \circ f)(a) + (M \circ L)(h) + ||h||\, \chi(h),\end{aligned}$$

met

$$\chi(h) = M[\varphi(h)] + \frac{||k(h)||}{||h||}\, \psi(k(h)) \quad (h \neq 0), \qquad \chi(0) = 0.$$

Om te bewijzen dat $D(g \circ f)(a) = M \circ L$, moeten we nog aantonen dat $\lim_{h\to 0} \chi(h) = 0$. Dit gaat als volgt.

Er geldt $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ en M is lineair, dus continu, dus

$$\lim_{h\to 0} M(\varphi(h)) = 0. \tag{4.8}$$

Verder volgt met de driehoeksongelijkheid dat

$$\begin{aligned}||k(h)|| &\leq ||L(h)|| + ||h||||\varphi(h)|| \\ &\leq ||h||(C + ||\varphi(h)||)\end{aligned}$$

voor zekere $C > 0$ (zie Lemma 4.3.1). Hieruit leiden we af dat

$$\frac{||k(h)||}{||h||} \leq C + ||\varphi(h)|| \leq C + 1 \tag{4.9}$$

voor $||h||$ klein genoeg (want $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$). Tenslotte is $\lim\limits_{h\to 0} k(h) = 0$ en $\lim\limits_{k\to 0} \psi(k) = 0$, dus

$$\lim_{h\to 0} \psi(k(h)) = 0. \tag{4.10}$$

Uit (4.8), (4.9) en (4.10) volgt dat $\lim_{h\to 0} \chi(h) = 0$. □

Opmerking 4.3.3 We beschouwen nog eens de situatie van Opmerking 4.1.12. Dus $c : I \to \mathrm{R}^n$ is een kromme die differentieerbaar is in het punt $t_0 \in I$, en $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p is een functie die differentieerbaar is in $c(t_0)$. Volgens de bovenstaande kettingregel is $f \circ c$ dan (totaal) differentieerbaar in t_0. De (totale) afgeleide in t_0 is de lineaire afbeelding $\mathrm{R} \to \mathrm{R}^p$ die wordt gegeven door

$$D(f \circ c)(t_0) = Df(c(t_0)) \circ Dc(t_0).$$

Laten we linker- en rechterlid van deze identiteit werken op het element $1 \in \mathrm{R}$ en gebruiken we Opmerking 4.1.10 (b) dan vinden we:

$$(f \circ c)'(t_0) = Df(c(t_0))[Dc(t_0)(1)] = Df(c(t_0))[c'(t_0)],$$

waaruit we opnieuw de identiteit (4.3) afleiden.

Uit Stelling 4.3.2 verkrijgen we op natuurlijke wijze het volgende resultaat.

Gevolg 4.3.4 **(De kettingregel voor Jacobimatrices)** *Zij* $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p *en* $g : \mathrm{R}^p$ æ R^q, f *totaal differentieerbaar in* a, g *totaal differentieerbaar in* $f(a)$. *Dan geldt voor de Jacobimatrices:*

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a). \tag{4.11}$$

Bewijs: In het algemeen geldt voor lineaire afbeeldingen $A : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^p$ en $B : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^q$, dat de matrix van de samenstelling $B \circ A$ gelijk is aan het produkt van de matrices van A en B, dwz. $\mathrm{mat(B \circ A) = mat(B)mat(A)}$. Passen we dit principe toe op de vergelijking (4.7) dan volgt (4.11). $\square$

Opmerking 4.3.5 (a) De kettingregel voor functies R æ R vinden we als volgt terug uit Gevolg 4.3.4 voor het geval $n = p = q = 1$. In dat geval zijn de Jacobimatrices alle 1×1 matrices:

$$J_f(a) = (\, f'(a)\,), \quad J_g(f(a)) = (\, g'(f(a))\,), \quad J_{g\circ f}(a) = (\,(g\circ f)'(a)\,).$$

Het produkt van de eerste twee van deze matrices is de 1×1 matrix $(\, g'(f(a))f'(a)\,)$. Deze moet gelijk zijn aan de derde matrix. Hieruit volgt de bekende gelijkheid $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

(b) We beschouwen Gevolg 4.3.4 ook nog eens in het geval $n = q = 1$, $p > 1$. De coördinaten in R^p noteren we daarbij met $y = (y_1, \ldots, y_p)$. In dit geval is $g \circ f$ een functie R æ R. De Jacobimatrix van $g \circ f$ is dus 1×1 :

$$J_{g\circ f}(a) = (\,(g\circ f)'(a)\,).$$

Anderzijds is deze matrix wegens de kettingregel gelijk aan:

$$J_g(f(a))J_f(a) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a)) \cdots \frac{\partial g}{\partial y_p}(f(a))\right)\begin{pmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_p'(a)\end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\, f_k'(a)\right).$$

Hieruit lezen we weer de bekende kettingregel voor differentiatie van g langs de kromme f af.

Voorbeeld 4.3.6 Laten $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ en $g : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, \sin xy), \quad g(u, v) = (uv, e^v).$$

Dan is $g \circ f(x, y) = g(x^2 + y^2, \sin xy) = ((x^2 + y^2)\sin xy, e^{\sin xy})$. De Jacobimatrix van de samengestelde functie is daarom gelijk aan:

$$J_{g\circ f}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x\sin xy + y(x^2+y^2)\cos xy & 2y\sin xy + x(x^2+y^2)\cos xy \\ y\cos xy e^{\sin xy} & x\cos xy e^{\sin xy}\end{pmatrix}.$$

De Jacobimatrices van f en g worden gegeven door:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y\cos xy & x\cos xy \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad J_g(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix},$$

dus

$$J_g(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \sin xy & x^2+y^2 \\ 0 & e^{\sin xy} \end{pmatrix}.$$

De juistheid van de formule uit de stelling kan men nu gemakkelijk controleren door de twee matrices $J_g(f(x,y))$ en $J_f(x,y)$ te vermenigvuldigen.

Door (4.11) uit te schrijven in componenten leiden we onmiddellijk het volgende af.

Gevolg 4.3.7 **(De kettingregel voor partiële afgeleiden)** *Laten $f : \mathrm{R}^n$ æ R^p en $g : \mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^q$ functies zijn, en veronderstel dat f differentieerbaar is in $a \in \mathrm{R}^n$ en dat g differentieerbaar is in $f(a)$. Noteren we de variabelen in R^n, respectievelijk R^p, met $x = (x_1, \ldots, x_n)$, respectievelijk $y = (y_1, \ldots, y_p)$, dan wordt de partiële afgeleide naar de j-de variabele $(1 \le j \le n)$ van $g \circ f$ in a gegeven door:*

$$\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \qquad (1 \le i \le q). \tag{4.12}$$

Opmerking 4.3.8 Men kan zich na de bovenstaande 'orgie' van partiële afgeleiden voorstellen dat het in sommige situaties onoverzichtelijk wordt namen voor de variabelen te blijven gebruiken. Bovendien is het vermoeiend steeds weer de namen van de variabelen te moeten specificeren. In zulke situaties kan men beter de notatie D_j voor de partiële afgeleide naar de j-de variabele gebruiken. In deze notatie wordt de bovenstaande formule:

$$D_j(g\circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^{p} D_k(g_i)(f(a))\; D_j(f_k)(a).$$

Anderzijds komt het ook vaak voor dat variabelen hun namen ontlenen aan de context (denk bijvoorbeeld aan poolcoördinaten, waarbij r de afstand van een punt in het vlak tot de oorsprong aangeeft, en φ de hoek met de x-as). In zulke gevallen vergroot het gebruik van de namen van de variabelen juist weer de overzichtelijkheid.

Tenslotte bepalen ook persoonlijke voorkeur en smaak aan welke notaties men de voorkeur geeft.

Opmerking 4.3.9 Merk op dat $(g \circ f)_i = g_i \circ f$. Voor $n = 1$ is de bovenstaande formule dus juist de bekende kettingregel voor differentiatie van de functie g_i langs de kromme f.

Ook voor algemene n kunnen we de bovenstaande formule afleiden uit de kettingregel voor differentiatie langs een kromme. Zij immers $1 \le i \le q$, $1 \le j \le n$. Dan volgt uit de definitie van partieel differentiëren dat

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = (g_i \circ c)'(a_j) \tag{4.13}$$

met c : R æ R^p de kromme gedefinieerd door $c(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$. Formule (4.12) volgt nu door het rechterlid van (4.13) uit te schrijven volgens de kettingregel voor differentiatie langs een kromme, dus

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = (g_i \circ c)'(a_j) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(c(a_j))\, c_k'(a_j),$$

en door tenslotte op te merken dat $c(a_j) = f(a)$, en dat:

$$c_k'(a_j) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \qquad (1 \leq k \leq p).$$

Hoofdstuk 5

Integralen met een parameter

5.1 Continuïteit in de parameter

In de analyse komt het veel voor dat men een integraal beschouwd van een functie, die behalve van de integratievariabele nog van een andere (eventueel vectoriële) variabele afhangt. Preciezer: we beschouwen een gesloten en begrensd interval $J = [c, d] \subset \mathrm{R}$, een deelverzameling $V \subset \mathrm{R}^n$ en een functie $f : V \times J \to \mathrm{R}$. De variabele in V noteren we met $x = (x_1, \ldots, x_n)$, die in J met y. Voor iedere $x \in V$ is $f_x : y \mapsto f(x, y)$ een functie $J \to \mathrm{R}$. Is de functie f_x Riemann-integreerbaar op J voor iedere $x \in V$, dan wordt door

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d f_x(y)\, dy \tag{5.1}$$

een functie $V \to \mathrm{R}$ gedefinieerd. We noemen de integraal in (5.1) wel een *integraal met parameter* x.

Voorbeeld 5.1.1 Als voorbeeld beschouwen we de integraal

$$F(x) = \int_0^1 e^{xy}\, dy,$$

met parameter $x \in \mathrm{R}$. Hier is $J = [0, 1]$, $V = \mathrm{R}$, $f(x, y) = e^{xy}$. In dit voorbeeld is de functie F gemakkelijk uit te rekenen. Men ziet direct in dat $F(0) = 1$. Voor $x \in \mathrm{R}$, $x \neq 0$ geldt dat $y \mapsto x^{-1} e^{xy}$ een primitieve is van $f_x : y \mapsto e^{xy}$, dus

$$F(x) = \left. \frac{e^{xy}}{x} \right|_{y=0}^{y=1} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Voorbeeld 5.1.2 Een generalisatie wordt verkregen door ook oneigenlijke Riemann-integralen toe te laten. Als voorbeeld noemen we de *Gamma-functie* van Euler, gedefinieerd door

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (x > 0).$$

Merk op dat deze integraal convergeert voor iedere $x > 0$: voor een vaste $x > 0$ is de integrand continu, terwijl uit $t^{x-1} = \mathcal{O}(e^{\frac{1}{2}t})$ $(t \to \infty)$ volgt dat

$$t^{x-1} e^{-t} = \mathcal{O}(e^{-\frac{1}{2}t}) \qquad (t \to \infty).$$

Pas nu het majorantiecriterium uit Voorbeeld 3.1.5 toe.

Het komt in de wiskunde vaker voor dat bijzondere functies gedefinieerd worden door middel van een integraal met een parameter. Het betreft dan vooral oneigenlijke integralen. De theorie van oneigenlijke integralen met parameter behandelen we in dit stadium nog niet.

Een natuurlijke vraag is of de functie $F : V \to \mathrm{R}$, gedefinieerd door (5.1), continu is. Het volgende resultaat levert een antwoord op die vraag.

Stelling 5.1.3 *Zij $V \subset \mathrm{R}^n$ een deelverzameling en $J = [c, d] \subset \mathrm{R}$ een gesloten en begrensd interval. Is $f : V \times J \to \mathrm{R}$ een continue functie, dan is de functie $F : V \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \tag{5.2}$$

continu op V.

Opmerking 5.1.4 In het bovenstaande hebben we impliciet $V \times J$ als deelverzameling van R^{n+1} opgevat, en f als functie R^{n+1} æ R, zodat inderdaad over continuïteit van f gesproken kan worden.

Het bewijs van de bovenstaande stelling berust op een interessante toepassing van Stelling 1.6.1 (Bolzano-Weierstrass). Om de wijze waarop deze stelling toegepast wordt beter voor het voetlicht te brengen behandelen we eerst de volgende hulpstelling. Is φ een continue functie op het gesloten en begrensde interval $J = [c, d]$, dan neemt φ op J zijn maximum aan (Gevolg 1.6.5). We noteren dit maximum met

$$\max_J \varphi := \max\{\varphi(y) \mid y \in J\}.$$

Lemma 5.1.5 **(Hulpstelling)** *Zij $V \subset \mathrm{R}^n$ een deelverzameling, en $J = [c, d]$ een gesloten en begrensd interval. Laat $f : V \times J \to \mathrm{R}$ een continue functie zijn. Dan geldt voor iedere $a \in V$:*

$$\lim_{x \to a} \max_J |f_x - f_a| = 0.$$

Bewijs: Stel dat het bovenstaande niet geldt. We zullen laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

Wegens de definitie van limiet bestaat er een $\varepsilon > 0$ met de volgende eigenschap. Bij ieder geheel getal $n \geq 1$ is er een $x_n \in V$ te vinden zo dat $|x_n - a| < 1/n$ en

$$\max_J |f_{x_n} - f_a| \geq \varepsilon.$$

De laatste schatting betekent dat er een $y_n \in J$ bestaat zo dat

$$|f(x_n, y_n) - f(a, y_n)| \geq \varepsilon.$$

Wegens de stelling van Bolzano-Weierstrass heeft de rij $(y_n) \subset J$ een convergente deelrij $(y_{n_j})_{j\geq 1}$. Zij y^* de limiet van die deelrij, dan geldt $y^* \in J$. Uit de continuïteit van de functie $y \mapsto f(a,y)$ in het punt y^* volgt dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor alle $j \in \mathbb{N}$ met $j \geq N$ geldt:

$$|f(a, y_{n_j}) - f(a, y^*)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Combineren we deze schatting met de bovenstaande, dan volgt, voor alle $j \geq N$:

$$\begin{aligned} |f(x_{n_j}, y_{n_j}) - f(a, y^*)| &\geq |f(x_{n_j}, y_{n_j}) - f(a, y_{n_j})| - |f(a, y_{n_j}) - f(a, y^*)| \\ &\geq \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Anderzijds heeft de rij (x_{n_j}, y_{n_j}) limiet (a, y^*) voor $j \to \infty$. Uit de continuïteit van f in (a, y^*) volgt derhalve dat

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}, y_{n_j}) = f(a, y^*).$$

Deze bewering is in tegenspraak met de schatting (5.3). □

Bewijs van Stelling 5.1.3: Zij $a \in V$ willekeurig, maar vast. We zullen aantonen dat F continu is in a.

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er wegens de hulpstelling een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in V$ met $||x - a|| < \delta$ geldt:

$$\max_J |f_x - f_a| < \frac{\varepsilon}{d - c}.$$

Voor $x \in V$ met $||x - a|| < \delta$ geldt daarom ook:

$$\begin{aligned} |F(x) - F(a)| &= \left| \int_c^d [f_x(y) - f_a(y)]\, dy \right| \\ &\leq \int_c^d |f_x(y) - f_a(y)|\, dy \\ &\leq (d - c) \max_J |f_x - f_a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat F continu is in a. □

Voorbeeld 5.1.6 Met behulp van het bovenstaande gevolg zien we dat de functie F gedefinieerd in Voorbeeld 5.1.1 continu is op $\mathbb{R}$. Dit blijkt ook uit de daar gegeven formule voor F; van die formule lezen we met de gebruikelijke rekenregels de continuïteit van F buiten 0 af, terwijl de continuïteit van F in 0 volgt uit de bekende limiet $\lim_{x\to 0} x^{-1}(e^x - 1) = 1$.

5.2 Differentiatie onder het integraalteken

Een natuurlijke vraag is of een functie F gedefinieerd door een integraal met parameter van de vorm (5.1) differentieerbaar is. We beschouwen eerst het geval dat de parameterverzameling een gesloten en begrensd interval is.

Stelling 5.2.1 (Differentiatie onder het integraalteken) *Laten $I = [a, b]$ en $J = [c, d]$ gesloten en begrensde intervallen in* R *zijn, en $f : I \times J \to \mathrm{R}$ een functie. Veronderstel dat de volgende voorwaarden zijn vervuld:*

(a) *voor iedere $x \in I$ is de functie $f_x : y \mapsto f(x, y)$ Riemann-integreerbaar op J;*

(b) *de partiële afgeleide $\partial f/\partial x$ bestaat en is continu op $I \times J$.*

Dan is de functie F gedefinieerd door

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \tag{5.4}$$

differentieerbaar op I; de afgeleide van F wordt gegeven door:

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy. \tag{5.5}$$

Opmerking 5.2.2 De naam van de bovenstaande stelling wordt verklaard door (5.5) te herschrijven als:

$$\frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy.$$

Bewijs: Zij $x_0 \in I$ vast. We zullen de differentieerbaarheid van F en de geldigheid van (5.5) aantonen in $x = x_0$. Voor $x \in I$ definiëren we $R(x)$ door

$$F(x) - F(x_0) = (x - x_0) \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)\, dy + R(x). \tag{5.6}$$

Het is dan voldoende te bewijzen dat $R(x) = o(|x - x_0|)$ $(x \to x_0)$.

Voor iedere $y \in J$ is de functie $x \mapsto f(x, y)$ differentieerbaar op I, met afgeleide $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, y)$. Passen we de middelwaardestelling voor functies van één variabele toe op deze functie, dan zien we dat er voor iedere $x \in I \setminus \{x_0\}$ een tussen x_0 en x gelegen $\xi(x, y)$ bestaat zo dat

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y), y)(x - x_0).$$

Hieruit volgt dat

$$F(x) - F(x_0) = (x - x_0) \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y), y)\, dy.$$

Trekken we deze identiteit van (5.6) af, dan vinden we

$$\begin{aligned} |R(x)| &= \left| (x - x_0) \int_c^d \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y), y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right] dy \right| \\ &\leq |x - x_0| \int_c^d \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x, y), y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) \right| dy. \end{aligned} \tag{5.7}$$

We gebruiken uniforme continuïteit om de laatste integraal te schatten.

De functie $\frac{\partial f}{\partial x}$ is continu op de gesloten en begrensde verzameling $I \times J$, en dus uniform continu (Stelling 1.6.6). Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor elk tweetal punten α, β in $I \times J$ geldt:

$$\|\alpha - \beta\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha) - \frac{\partial f}{\partial x}(\beta)\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Laat $x \in I$ en $|x - x_0| < \delta$. Dan geldt voor alle $y \in J$ dat

$$\begin{aligned} \|(\xi(x,y),y) - (x_0,y)\| &= \|(\xi(x,y) - x_0, 0)\| \\ &= |\xi(x,y) - x_0| \\ &\leq |x - x_0| < \delta, \end{aligned}$$

en dus:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi(x,y),y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)\right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \qquad (y \in J).$$

Combineren we deze schatting met (5.7), dan vinden we, voor $x \in I$ met $|x - x_0| < \delta$, dat

$$|R(x)| \leq |x - x_0|\,\varepsilon.$$

We concluderen dat $R(x) = o(|x - x_0|)$ voor $x \to x_0$ (gebruik Definitie 3.1.1 (b)). $\square$

Voorbeeld 5.2.3 We beschouwen weer de functie

$$F(x) = \int_0^1 e^{xy}\,dy$$

van Voorbeeld 5.1.1, en berekenen de afgeleide F' op twee manieren.

(a) Ten eerste geldt (voor $x \neq 0$):

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x}{x} + \frac{1 - e^x}{x^2}.$$

De afgeleide in 0 berekenen we door

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

waarbij de laatste identiteit volgt door toepassing van de stelling van Taylor met rest op de teller van de breuk in de limiet.

(b) Anderzijds geldt wegens de bovenstaande stelling op *ieder* gesloten en begrensd interval, en dus op de gehele R, dat

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} e^{xy}\,dy = \int_0^1 y e^{xy}\,dy.$$

Voor $x \neq 0$ vinden we zo dat

$$F'(x) = y\frac{e^{xy}}{x}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{xy}}{x}\,dy = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\,\frac{e^{xy}}{x}\bigg|_0^1 = \frac{e^x}{x} + \frac{1 - e^x}{x^2}.$$

Uit de gevonden integraalvoorstelling volgt verder dat:

$$F'(0) = \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}.$$

Tenslotte merken we nog op dat Stelling 5.2.1 ook uitstekend toegepast kan worden als de parameterverzameling een deel van R^n is. Als voorbeeld behandelen we het volgende nuttige resultaat.

Gevolg 5.2.4 (Differentiatie onder het integraalteken, II) *Laat $V \subset \mathrm{R}^n$ een open deelverzameling zijn, $J = [c, d] \subset \mathrm{R}$ een gesloten en begrensd interval, en $f : V \times J \to \mathrm{R}$ een functie.*

Veronderstel dat f en zijn partiële afgeleiden naar de eerste n variabelen, $\partial f / \partial x_j$ $(1 \le j \le n)$, continu zijn op $V \times J$. Dan is de functie $F : V \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

een C^1-functie. Zijn partiële afgeleiden worden gegeven door:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y)\, dy \qquad (1 \le j \le n). \tag{5.8}$$

Bewijs: Uit Stelling 5.1.3 volgt dat de functie F continu is op V. Zij $a \in V$. De partiële differentieerbaarheid naar de j-de variabele van F in a volgt door toepassing van Stelling 5.2.1 op de functie $\bar{f} : I \times J \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$\bar{f}(t, y) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n, y).$$

Hierbij is I een interval van de vorm $[a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$; door $\varepsilon > 0$ voldoende klein te kiezen wordt bereikt dat $\partial \bar{f} / \partial t$ bestaat en continu is op $I \times J$. Differentiëren naar t en evalueren in $t = a_j$ levert formule (5.8) in $x = a$.

Hiermee is de partiële differentieerbaarheid van F op V en de geldigheid van formule (5.8) aangetoond. Door toepassing van Stelling 5.1.3 volgt tenslotte de continuïteit van de partiële afgeleiden (5.8); de functie F behoort derhalve tot $C^1(V)$. □

Hoofdstuk 6

Dubbele integralen

6.1 Herhaalde integratie

Als toepassing van de theorie uit het vorige hoofdstuk behandelen we een stelling over herhaalde integratie. Laten $I = [a, b]$ en $J = [c, d]$ gesloten en begrensde intervallen zijn, en $f : I \times J \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan is de functie $F : I \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy \tag{6.1}$$

continu (Stelling 5.1.3), en dus Riemann-integreerbaar. Derhalve bestaat de *dubbele integraal*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx := \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Op soortgelijke wijze definiëren we de dubbele integraal waarbij de integraties in de omgekeerde volgorde uitgevoerd worden:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy := \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Stelling 6.1.1 **(Verwisselingsstelling)** *Laten $I = [a, b]$ en $J = [c, d]$ gesloten en begrensde intervallen zijn, en $f : I \times J \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan geldt:*

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy. \tag{6.2}$$

Bewijs: Idee van het bewijs is dat ten gevolge van Stelling 5.2.1 ook 'primitiveren onder het integraalteken' is toegestaan. Preciezer: is $g : I \to \mathrm{R}$ een continue functie, dan wordt door

$$x \mapsto \int_a^x g(t)\, dt$$

een primitieve van g gedefinieerd (Hoofdstelling van de integraalrekening, Analyse 1, Stelling 10.4.3).

We beschouwen nu de functie $F : I \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door (6.1) en gaan eerst aantonen dat door

$$\Phi(x) = \int_c^d \int_a^x f(t, y)\, dt\, dy$$

('primitiveren onder de integraal') een primitieve van F gedefinieerd wordt. Daartoe merken we op dat de functie $t \mapsto f(t, y)$ continu is op I, voor elke $y \in J$. Derhalve wordt door

$$\varphi(x, y) := \int_a^x f(t, y)\, dt$$

een functie $I \times J \to \mathrm{R}$ gedefinieerd. De bovenstaande definitie van Φ kunnen we nu herschrijven als

$$\Phi(x) = \int_c^d \varphi(x, y)\, dy. \tag{6.3}$$

Voor iedere $x \in I$ is de functie $J \to \mathrm{R}, y \mapsto \varphi(x, y)$ continu wegens Stelling 5.1.3; formule (6.3) definieert dus inderdaad een functie.

Wegens de hoofdstelling van de integraalrekening (Stelling A.10.4.3), toegepast op de functie $x \mapsto f(x, y)$, geldt $\partial\varphi/\partial x = f$. De laatste functie is continu op $I \times J$; Stelling 5.2.1 is dus toepasbaar op de functie Φ en er volgt:

$$\Phi'(x) = \int_c^d \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y)\, dy = \int_c^d f(x, y)\, dy = F(x).$$

Hieruit blijkt dat Φ een primitieve van F is. Daarom is

$$\int_a^b F(t)\, dt = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b)$$

(uit de definiërende formule volgt $\Phi(a) = 0$). Wegens de definities van F en Φ is de zojuist gevonden identiteit precies het gewenste resultaat. □

De rest van dit hoofdstuk is gewijd aan een tweede bewijs van de verwisselingsstelling voor herhaalde integratie. Daarbij zal gebruikt gemaakt worden van inklemming door 2-dimensionale onder- en bovensommen. Dit zal tevens een interpretatie van de dubbele integralen als volume geven.

6.2 Riemann-integratie (herhaling Analyse 1)

In deze paragraaf herhalen we enige theorie betreffende Riemann-integratie uit het Analyse 1 dictaat (zie Analyse 1, Hfdst. 10 10). Tevens behandelen we een resultaat over de benadering van integralen door Riemann-sommen, dat later van pas zal komen.

In het vervolg is steeds $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval. Onder een *verdeling* V van I verstaan we een eindige rij punten $(x_j)_{0 \le j \le n}$ met $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Is $f : I \to \mathrm{R}$ een begrensde functie, dan definiëren we de *ondersom* $\underline{S}(f, V)$ van f bij de verdeling V door

$$\underline{S}(f, V) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Hierbij hebben we de notatie $I(j)$ gebruikt voor het j-de deelinterval $[x_{j-1}, x_j]$ $(1 \le j \le n)$. Op soortgelijke wijze definiëren we de *bovensom* van f bij V door:

$$\overline{S}(f, V) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1});$$

Zij $\mathcal{V}(I)$ de collectie van alle verdelingen van I. De *Riemann-onder-* en *Riemann-bovenintegraal* van een begrensde functie $f : I \to \mathrm{R}$ worden gedefinieerd door, respectievelijk:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{S}(f,V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\overline{S}(f,V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}.$$

Er geldt altijd dat

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{6.4}$$

(zie Analyse 1, Stelling 10.2.9). De functie f is per definitie *Riemann-integreerbaar* over I als (6.4) geldt met '=' in plaats van '$\leq$.' Merk op dat dan geldt:

$$\underline{S}(f,V) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{S}(f,V) \tag{6.5}$$

voor alle $V \in \mathcal{V}(I)$.

De integraal van een Riemann-integreerbare functie kan met willekeurige precisie ingeklemd worden door onder- en bovensom bij een geschikte verdeling:

Lemma 6.2.1 **(Lemma A.10.4.1)** *Een begrensde functie $f : I \to \mathrm{R}$ is Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V van I bestaat zo dat*

$$\overline{S}(f,V) - \underline{S}(f,V) < \varepsilon. \tag{6.6}$$

We herhalen het reeds in Analyse 1 gegeven bewijs dat een continue functie Riemann-integreerbaar is. Het bewijs berust op de stelling dat een continue functie $I \to \mathrm{R}$ uniform continu is (Stelling 1.6.6). Om dit beter tot uitdrukking te brengen voeren we een begrip in dat de fijnheid van een verdeling meet.

Definitie 6.2.2 Zij $V = (x_j)_{0\leq j\leq n}$ een verdeling van het interval $I = [a,b]$. Onder de *maas* van de verdeling V verstaan we het getal $m(V)$ gedefinieerd door:

$$m(V) := \max_{1\leq j\leq n} (x_j - x_{j-1})$$

Stelling 6.2.3 *Zij $f : I \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat voor elke verdeling V van I met $m(V) < \delta$ geldt:*

$$\overline{S}(f,V) - \underline{S}(f,V) < \varepsilon.$$

In het bijzonder is f Riemann-integreerbaar over I.

Bewijs: Wegens Stelling 1.6.6 is de functie f uniform continu op I. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $\alpha, \beta \in I$ geldt:

$$|\alpha - \beta| < \delta \Rightarrow |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon' := \varepsilon/2(b-a). \tag{6.7}$$

Zij nu $V = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ een verdeling van I met $m(V) < \delta$. Zij $1 \leq j \leq n$. Dan geldt voor alle $\alpha, \beta \in I(j) = [x_{j-1}, x_j]$ dat $|\alpha - \beta| < \delta$, en dus:

$$f(\alpha) - f(\beta) \leq |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon'.$$

Derhalve is

$$\sup_{I(j)} f - \inf_{I(j)} f = \sup\{f(\alpha) - f(\beta) \mid \alpha, \beta \in I(j)\} \leq \varepsilon'.$$

Door vermenigvuldiging met $x_j - x_{j-1}$ gevolgd door sommatie over j volgt uit deze schatting dat:

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})\varepsilon' = (b - a)\varepsilon' < \varepsilon. \tag{6.8}$$

Hiermee is het eerste deel van de stelling bewezen. In het bijzonder zien we dat voor iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V te vinden is zo dat $\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon$. De functie f is derhalve Riemann-integreerbaar over I (Lemma 6.2.1). □

Opmerking 6.2.4 Het bovenstaande bewijs is in wezen gelijk aan het bewijs van Stelling 10.4.2 in het Analyse 1 dictaat.

We herhalen nu de in Analyse 1 reeds gegeven definitie van Riemann-som. Onder een rij *strooipunten* bij V verstaan we een rij $\Xi = (\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$ met $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

Zij nu $f : I \to \mathrm{R}$ een begrensde functie, V een verdeling van I en Ξ een rij strooipunten bij V. Dan heet

$$S(f, V, \Xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

de *Riemann-som* van f voor de verdeling V en de rij strooipunten Ξ.

Lemma 6.2.5 (Lemma A.10.5.2) *Laat $f : I \to \mathrm{R}$ een begrensde functie zijn, V een verdeling van I en Ξ een rij strooipunten bij V. Dan geldt:*

$$\underline{S}(f, V) \leq S(f, V, \Xi) \leq \overline{S}(f, V). \tag{6.9}$$

Is de functie f Riemann-integreerbaar dan geldt:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - S(f, V, \Xi) \right| \leq \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V). \tag{6.10}$$

Opmerking 6.2.6 (a) Combineren we Lemma 6.2.1 met Lemma 6.2.5 dan zien we dat het volgende geldt. Is de begrensde functie $f : I \to \mathrm{R}$ Riemann-integreerbaar, dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V van I zo dat

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - S(f, V, \Xi) \right| < \varepsilon \tag{6.11}$$

voor iedere keuze Ξ van strooipunten bij V.

(b) Combineren we Stelling 6.2.3 met Lemma 6.2.5 dan zien we dat het volgende geldt. Is $f : I \to \mathrm{R}$ continu, dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat de schatting (6.11) geldt voor elke verdeling V van I met $m(V) < \delta$ en elke keuze van strooipunten Ξ bij V. Men kan aantonen dat dit resultaat zelfs geldt voor iedere Riemann-integreerbare functie $f : I \to \mathrm{R}$.

6.3 Dubbele integralen en volume

In deze paragraaf zullen we een alternatief bewijs geven van Stelling 6.1.1. Daarbij maken we gebruik van inklemming door 2-*dimensionale onder- en bovensommen*. In het vervolg zijn steeds $I = [a, b]$ en $J = [c, d]$ gesloten en begrensde intervallen. Zij $V = (x_i)_{0 \leq i \leq m}$ een verdeling van I en $W = (y_j)_{0 \leq j \leq n}$ een verdeling van J. Het paar (V, W) induceert een verdeling van het 2-dimensionale *blok* (rechthoek) $B = I \times J$ in deelblokken:

$$B_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \qquad (1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n). \tag{6.12}$$

Is $f : I \times J \to \mathrm{R}$ een begrensde functie, dan definiëren we de onder- en de bovensom van f bij het paar verdelingen (V, W) door, respectievelijk:

$$\underline{S}(f, (V, W)) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \inf_{B_{ij}} f \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \tag{6.13}$$

$$\overline{S}(f, (V, W)) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \sup_{B_{ij}} f \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \tag{6.14}$$

Opmerking 6.3.1 Veronderstel dat c_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ een stel vectoren in R^p is. Dan geldt vanwege de commutativiteit van de optelling in R^p dat

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij}.$$

Passen we dit toe met $p = 1$, dan zien we dat de sommaties in (6.13) en (6.14) op twee manieren herschreven kunnen worden als herhaalde sommaties.

Lemma 6.3.2 (Insluiting door onder- en bovensom) *Laat $f : I \times J \to \mathrm{R}$ een continue functie zijn. Dan geldt voor ieder tweetal verdelingen V en W van I respectievelijk J, dat:*

$$\underline{S}(f, (V, W)) \leq \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \leq \overline{S}(f, (V, W)), \tag{6.15}$$

en

$$\underline{S}(f, (V, W)) \leq \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \leq \overline{S}(f, (V, W)). \tag{6.16}$$

Opmerking 6.3.3 Als voorbereiding op het bewijs van het bovenstaande lemma merken we op dat Stelling 6.1.1 waar is voor een constante functie f. Immers is $f = c$ op $I \times J$ $(c \in \mathrm{R})$, dan kan de eerste herhaalde integraal uit (6.2) herschreven worden als de factor c maal $\int_a^b \int_c^d dydx$. De laatste integraal kan als volgt berekend worden:

$$\int_a^b \int_c^d dy\, dx = \int_a^b (d - c)\, dx = (b - a)(d - c).$$

Eenzelfde berekening leert dat de uitkomst niet verandert bij omkering van de integratievolgorde.

Bewijs: Met een eenvoudige berekening is te zien:

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_{j=1}^n \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

We gaan iedere term van de bovenstaande som insluiten.

Zij $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. Voor alle $(x,y) \in B_{ij}$ geldt $\inf_{B_{ij}} f \le f(x,y) \le \sup_{B_{ij}} f$. Hieruit volgt dat:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\inf_{B_{ij}} f\right] dy\,dx \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy\,dx \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left[\sup_{B_{ij}} f\right] dy\,dx.$$

Zowel in het uiterst linker- als in het uiterst rechterlid van de bovenstaande ongelijkheden staan herhaalde integralen van constante functies. Met de in Opmerking 6.3.3 gegeven berekening volgt derhalve dat:

$$\inf_{B_{ij}} f \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy\,dx \le \sup_{B_{ij}} f \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Sommatie over i, j levert ons tenslotte de gewenste insluiting (6.15). De ongelijkheid (6.16) wordt op analoge wijze bewezen. □

Stelling 6.3.4 *Laat $f : I \times J \to \mathrm{R}$ een continue functie zijn. Dan bestaat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat voor elk tweetal verdelingen V en W van I respectievelijk J met $m(V) < \delta$ en $m(W) < \delta$ geldt:*

$$\overline{S}(f,(V,W)) - \underline{S}(f,(V,W)) < \varepsilon. \tag{6.17}$$

Bewijs: Het bewijs is analoog aan dat van Stelling 6.2.3. Wegens Stelling 1.6.6 is de functie f uniform continu op $I \times J$.

Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een $\delta' > 0$ zo dat voor elk tweetal punten α, β in $I \times J$ geldt:

$$\|\alpha - \beta\| < \delta' \quad \Rightarrow \quad |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2(b-a)(d-c)}. \tag{6.18}$$

Kies $\delta < \frac{1}{2}\delta'$ en veronderstel dat $m(V) < \delta$ en $m(W) < \delta$.

Als α, β beide tot eenzelfde deelblok B_{ij} bij (V,W) behoren (zie (6.12)), dan geldt, voor alle $\alpha, \beta \in B_{ij}$:

$$\|\alpha - \beta\| \le |\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| \le m(V) + m(W) < \delta'$$

en dus

$$f(\alpha) - f(\beta) \le |f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon'.$$

Hieruit volgt weer dat:

$$\sup_{B_{ij}} f - \inf_{B_{ij}} f = \sup\{f(\alpha) - f(\beta) \mid \alpha, \beta \in B_{ij}\} \leq \varepsilon'.$$

Door vermenigvuldiging met de positieve scalar $(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ en sommatie over i, j volgt tenslotte de schatting

$$\overline{S}(f,(V,W)) - \underline{S}(f,(V,W)) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon'(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \varepsilon'(b-a)(d-c) < \varepsilon.$$

□

We kunnen nu het alternatieve bewijs van Stelling 6.1.1 geven.

Alternatief bewijs van Stelling 6.1.1: Zij $\varepsilon > 0$, en zij $\delta > 0$ zo dat de bewering van Stelling 6.3.4 geldt. Kies verdelingen V en W van I respectievelijk J, met $m(V), m(W) < \delta$. Dan geldt de schatting (6.17). Anderzijds gelden de insluitingen (6.15) en (6.16), en we concluderen dat

$$\left| \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx - \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy \right| < \varepsilon.$$

Het linkerlid van de bovenstaande ongelijkheid is een vast element van $[0, \infty[$ dat strikt kleiner is dan iedere $\varepsilon > 0$. Dit impliceert dat het linkerlid nul is. □

Opmerking 6.3.5 Stelling 6.3.4 suggereert een theorie van Riemann-integreerbaarheid van scalaire functies gedefinieerd op een 2-dimensionaal blok $B = I \times J$. Zo'n theorie zal verderop in dit dictaat ontwikkeld worden voor functies gedefinieerd op n-dimensionale blokken ($n \geq 1$). Daarop vooruit lopend merken we vast het volgende op.

Onder- en bovensommen worden gedefinieerd door middel van opdelingen van B in deelblokken. Op soortgelijke wijze als in het 1-dimensionale geval definieert men voor iedere begrensde functie $f : B \to \mathrm{R}$ een onderintegraal $\underline{\int}_B f$ en een bovenintegraal $\overline{\int}_B f$. De functie f heet weer Riemann-integreerbaar over B als zijn onder- en bovenintegraal aan elkaar gelijk zijn: de gemeenschappelijke waarde van deze integralen wordt dan genoteerd met $\int_B f$: de integraal van f over B. Het analogon van Lemma 6.2.1 geldt, en Stelling 6.3.4 impliceert dan (voor $n = 2$) dat een continue functie $f : B \to \mathrm{R}$ Riemann-integreerbaar over B is. Het alternatieve bewijs van Stelling 6.1.1 bestaat er dan uit dat aangetoond wordt dat de beide herhaalde integralen gelijk zijn aan $\int_B f$.

Opmerking 6.3.6 (Integraal en volume) Laat $f : I \times J \to \mathrm{R}$ een continue functie zijn met $f \geq 0$, dwz. met waarden in $[0, \infty[$. Beschouw de deelverzameling van R^3 gedefinieerd door:

$$G(f) := \{\, (x, y, z) \in I \times J \times \mathrm{R} \mid 0 \leq z \leq f(x, y) \,\}.$$

Laten V en W verdelingen van I respectievelijk J zijn. We gebruiken de notatie (6.12) voor het (i, j)-deelblok bij deze verdelingen. Dan is $B = I \times J = \cup_{i,j} B_{ij}$.

Uit $f \geq 0$ volgt dat $\underline{h}_{ij} = \inf_{B_{ij}} f$ en $\overline{h}_{ij} = \sup_{B_{ij}} f$ beide niet negatief zijn. We definiëren 3-dimensionale blokken door:

$$\underline{b}_{ij} = B_{ij} \times [0, \underline{h}_{ij}], \qquad \overline{b}_{ij} = B_{ij} \times [0, \overline{h}_{ij}].$$

Het driedimensionale volume van deze blokken wordt gedefinieerd door *volume* := *lengte* $\times$ *breedte* $\times$ *hoogte*, dus

$$\mathrm{vol}\,(\underline{b}_{ij}) = \inf_{B_{ij}} f \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \quad \text{en} \quad \mathrm{vol}\,(\overline{b}_{ij}) = \sup_{B_{ij}} f \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

De blokken $\underline{b}_{ij}$ hebben twee aan twee geen inwendig punt gemeen. Het ligt dus voor de hand het volume van hun vereniging $\underline{b}(V, W)$ te definiëren als

$$\mathrm{vol}\,(\underline{b}(V, W)) := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mathrm{vol}\,(\underline{b}_{ij}) = \underline{S}(f, (V, W)).$$

Op gelijke gronden definiëren we het volume van de vereniging $\overline{b}(V, W) = \cup_{i,j} \overline{b}_{ij}$ door

$$\mathrm{vol}\,(\overline{b}(V, W)) := \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mathrm{vol}\,(\overline{b}_{ij}) = \overline{S}(f, (V, W)).$$

De verzameling $G(f)$ wordt ingesloten door de hierboven ingevoerde verenigingen van 'onder-' en 'bovenblokken':

$$\underline{b}(V, W) \subset G(f) \subset \overline{b}(V, W). \tag{6.19}$$

Zij $\mathcal{I}$ de gemeenschappelijke waarde van de integralen in (6.2). Dan geldt wegens Lemma 6.3.2 dat

$$\mathrm{vol}\,(\underline{b}(V, W)) \leq \mathcal{I} \leq \mathrm{vol}\,(\overline{b}(V, W)). \tag{6.20}$$

voor alle verdelingen V en W van I respectievelijk J. Wegens Stelling 6.3.4 wordt het reële getal $\mathcal{I}$ door deze ongelijkheden uniek vastgelegd.

Wegens (6.19) en (6.20) ligt het nu voor de hand om het 3-*dimensionale* volume van de verzameling $G(f)$ te *definiëren* door:

$$\mathrm{vol}\,(G(f)) = \mathcal{I} = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\; dy\; dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\; dx\; dy.$$

Deze definitie zal later een bijzonder geval blijken te zijn van de definitie van het n-dimensionale volume van een deelverzameling van R^n $(n \geq 1)$.

Figuur 11: $G(f)$ voor $f : (x, y) \mapsto \max\{0, 1 - x^2 - y^2\}$.

Voorbeeld 6.3.7 (Top van een paraboloïde) We beschouwen de verzameling T van punten $(x, y, z) \in \mathrm{R}^3$ met $x^2 + y^2 \leq 1$ en $0 \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)$. Zij $D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, de gesloten eenheidsschijf in R^2. Dan is T de verzameling van punten gelegen 'tussen' de schijf $D \times \{0\}$ en de grafiek van de functie $g : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}, (x, y) \mapsto 1 - (x^2 + y^2)$. De functie g is continu, en $f = g_+ = \max\{g, 0\}$ is dat dus ook (zie het onderstaande lemma). We beschouwen de beperking van de continue functie f tot het blok $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$. De verzameling $G(f)$ als beschreven in Opmerking 6.3.6 is gelijk aan de vereniging van T met $S = (B \setminus D) \times \{0\}$ (zie Figuur 11).

Later in de theorie zullen we een definitie van 3-dimensionaal volume geven volgens welke het volume van de 'platte' verzameling S gelijk is aan nul, waaruit dan volgt dat T en $G(f)$ gelijk volume hebben. Dus:

$$\mathrm{vol}\,(T) = \mathrm{vol}\,(G(f)) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x, y)\; dy\; dx.$$

Zij $-1 \leq x \leq 1$. Dan is de functie $f_x : y \mapsto f(x, y)$ gelijk aan 0 op het complement van het interval $[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}]$; hieruit volgt:

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_{-1}^{1} f(x, y)\; dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\; dy \\ &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\; dy \\ &= \left[(1 - x^2)y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Derhalve is

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\,(T) &= \int_{-1}^{1} \frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2}\; dx = -\int_{0}^{\pi} \frac{4}{3} \sin^3 \varphi\; d\cos\varphi \\ &= \int_{0}^{\pi} \frac{4}{3} \cos\varphi\; d\sin^3 \varphi = \int_{0}^{\pi} 4\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi\; d\varphi \\ &= \int_{0}^{\pi} \sin^2(2\varphi)\; d\varphi = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \sin^2 \psi\; d\psi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Lemma 6.3.8 *Laat* $V \subset \mathrm{R}^n$ *zijn en* $f, g : V \to \mathrm{R}$ *een tweetal functies. Zijn* f *en* g *beiden continu in* $a \in V$, *dan is de functie* $\max\{f, g\} : x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ *dat ook.*

Bewijs: Definieer de functie $F : V \to \mathrm{R}^2$ door $F(x) = (f(x), g(x))$, en definieer de functie $m : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ door $m(y_1, y_2) = \max\{y_1, y_2\}$. Dan is $\max\{f, g\}$ gelijk aan de samenstelling $m \circ F$. De functie F is continu in a, aangezien zijn componenten dat zijn. Het is daarom voldoende aan te tonen dat m continu op R^2 is.

Zij $b \in \mathrm{R}^2$. We gaan de continuïteit van m in b aantonen. Veronderstel eerst dat $b_1 \neq b_2$. We behandelen het geval dat $b_1 < b_2$; het geval $b_1 > b_2$ gaat analoog. Zij $\delta = (b_2 - b_1)/2$. Dan geldt voor $y \in B(b; \delta)$ dat $|y_1 - b_1| < \delta$ en $|y_2 - b_2| < \delta$, dus $y_1 < b_1 + \delta = b_2 - \delta < y_2$. Hieruit blijkt dat $m(y) = y_2$ voor alle $y \in B(b; \delta)$. Derhalve is m continu in b.

Blijft over het geval $b_1 = b_2$. Dan is $m(b) = b_1 = b_2$. Zij $\varepsilon > 0$, en kies $\delta = \varepsilon$. Als $||y - b|| < \delta$, dan geldt voor $j = 1, 2$ dat $|y_j - m(b)| = |y_j - b_j| \leq ||y - b|| < \varepsilon$. Nu is $m(y) \in \{y_1, y_2\}$ dus $|m(y) - m(b)| < \varepsilon$ als $||y - b|| < \delta$. Hieruit volgt de continuïteit van m in b ook in dit geval. □

Hoofdstuk 7

Integratie en volume in $\mathbf{R}^n$ (inleiding)

7.1 Inleiding

In dit hoofdstuk geven we een inleiding tot de theorie van integratie in R^n. We zullen een beperkt aantal stellingen formuleren dat ons in staat zal stellen tal van integralen te berekenen. Bewijzen geven we in dit stadium nog niet, hoewel dat met de tot nu toe ontwikkelde analyse heel goed mogelijk zou zijn. We volstaan met het geven van korte motiveringen en voorbeelden om de intuïtie te steunen. In een later stadium zullen de bewijzen zeker aan de orde komen.

7.2 Integreerbaarheid

In Opmerking 6.3.5 liepen we al vooruit op integratie over een blok (rechthoek) in R^2. Algemener definiëren we een n-dimensionaal blok en zijn volume als volgt.

Definitie 7.2.1 **(n-dimensionaal blok)** Onder een *n-dimensionaal blok* verstaan we een deelverzameling van R^n van de vorm:

$$B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]; \tag{7.1}$$

hierbij is aangenomen dat: $a_j, b_j \in \mathrm{R}$, $a_j \leq b_j$ $(1 \leq j \leq n)$.

Het n-dimensionale *volume* van B, notatie: $\mathrm{vol}_n(B)$, is gedefinieerd als

$$\mathrm{vol}_n(B) := \prod_{1 \leq j \leq n} (b_j - a_j).$$

Opmerking 7.2.2 (a) Merk op dat in deze terminologie een blok altijd parallel is aan de coördinaatassen.

(b) Merk op dat (7.1) herschreven kan worden als:

$$B = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j \ (1 \leq j \leq n)\}$$

(c) Merk op dat $\mathrm{vol}_n(B) \geq 0$. Er geldt $\mathrm{vol}_n(B) = 0$ precies dan als er een $1 \leq j \leq n$ bestaat met $a_j = b_j$. Dit betekent precies dat B bevat is in een $(n-1)$-dimensionaal hypervlak in R^n, van de gedaante $\{x \in \mathrm{R}^n \mid x_j = a_j\}$.

In het tweedimensionale geval hebben we tot nu toe gewerkt met een coördinaatsgewijze verdeling van een blok. Dit zouden we kunnen voortzetten in R^n, maar de notaties zouden daardoor onnodig zwaar worden. De volgende, algemenere, definitie heeft hetzelfde effect, maar werkt prettiger.

Definitie 7.2.3 (Verdeling van een blok) Onder een *verdeling* van een blok B verstaan we een eindige collectie $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ (I heet hierbij de *indexverzameling* van $\mathcal{B}$) van n-dimensionale blokken B_i zodanig dat aan de volgende condities voldaan is:

(a) $\cup_{i \in I} B_i = B$;

(b) als $i, j \in I$, $i \neq j$ dan $B_i^{\text{inw}} \cap B_j^{\text{inw}} = \emptyset$.

Met behulp van het begrip verdeling kunnen we weer onder- en bovensommen definiëren. In het vervolg is B steeds een n-dimensionaal blok.

Definitie 7.2.4 Laat $f : B \to \mathrm{R}$ een begrensde functie zijn. Is $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ een verdeling van B, dan definiëren we de *onder-* en de *bovensom* van f bij $\mathcal{B}$ door, respectievelijk:

$$\underline{S}(f, \mathcal{B}) := \sum_{i \in I} \inf_{B_i} f \cdot \mathrm{vol}_n(B_i), \qquad \overline{S}(f, \mathcal{B}) := \sum_{i \in I} \sup_{B_i} f \cdot \mathrm{vol}_n(B_i). \tag{7.2}$$

Definitie 7.2.5 Laat $f : B \to \mathrm{R}$ een begrensde functie zijn. Dan definiëren we de *Riemann-onder-* en de *Riemann-bovenintegraal* van f over B door, respectievelijk:

$$\underline{\int_B} f(x)\, dx := \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{V}(B)\}, \quad \overline{\int_B} f(x)\, dx := \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in \mathcal{V}(B)\}.$$

Hierbij hebben we de notatie $\mathcal{V}(B)$ voor de collectie van alle verdelingen van B gebruikt.

Laat $f : B \to \mathrm{R}$ een begrensde functie zijn. Later zullen we (met behulp van gemeenschappelijke verfijningen) aantonen dat voor elk tweetal verdelingen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ van B geldt:

$$\underline{S}(f, \mathcal{B}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{B}'). \tag{7.3}$$

Hieruit volgt dat:

$$\underline{\int_B} f(x)\, dx \leq \overline{\int_B} f(x)\, dx. \tag{7.4}$$

Definitie 7.2.6 Een begrensde functie $f : B \to \mathrm{R}$ heet *Riemann-integreerbaar* over B als de onder- en de bovenintegraal van f over B dezelfde waarde hebben. Die gemeenschappelijke waarde heet de *Riemann-integraal* van f over B, en wordt genoteerd met $\int_B f(x)\, dx$.

Voorbeeld 7.2.7 Zij B het n-dimensionale blok gegeven door (7.1). Dan is de verzameling $\mathcal{B} = \{B\}$ een verdeling van B. De constante functie 1 heeft bij deze verdeling de volgende onder- en bovensom:

$$\underline{S}(1, \mathcal{B}) = \overline{S}(1, \mathcal{B}) = \mathrm{vol}_n(B).$$

Wegens Definitie 7.2.5 volgt hieruit dat $\underline{\int_B} 1\, dx \geq \mathrm{vol}_n(B) \geq \overline{\int_B} 1\, dx$. Met (7.4) volgt nu dat 1 integreerbaar over B is, terwijl:

$$\int_B 1\, dx = \mathrm{vol}_n(B). \tag{7.5}$$

Later zullen we aantonen dat het analogon van Lemma 6.2.1 geldt:

Lemma 7.2.8 *Een begrensde functie $f : B \to \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling $\mathcal{B}$ van B bestaat zo dat*

$$\overline{S}(f, \mathcal{B}) - \underline{S}(f, \mathcal{B}) < \varepsilon.$$

Voorts is een continue functie op een blok weer Riemann-integreerbaar.

Stelling 7.2.9 *Iedere continue functie $f : B \to \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar over B.*

Bewijs: Voor $n = 2$ volgt het bewijs uit het bovenstaande lemma en Stelling 6.3.4. Dat bewijs laat zich zonder problemen generaliseren naar algemene n. We komen daar later op terug. $\square$

Er geldt weer een stelling over herhaalde integratie. De mogelijke volgordes van de optredende integraties beschrijven we door gebruik te maken van *permutaties*: we noteren met S_n de collectie bijecties van de verzameling $\{1, \ldots, n\}$ op zichzelf.

Stelling 7.2.10 **(Herhaalde integratie)** *Laat $f : B \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Dan geldt voor iedere permutatie $\sigma \in S_n$ dat:*

$$\int_B f(x)\, dx = \int_{a_{\sigma 1}}^{b_{\sigma 1}} \cdots \int_{a_{\sigma n}}^{b_{\sigma n}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{\sigma n} \ldots dx_{\sigma 1}.$$

Bewijs: Men kan dit weer bewijzen door inklemming tussen onder- en bovensommen, net als in het bewijs van Lemma 6.3.2. $\square$

Tot zover is de theorie een tamelijk rechtstreekse generalisatie van de theorie voor $n = 1$. De theorie voor algemene n wordt gecompliceerd door de wenselijkheid te kunnen integreren over algemenere verzamelingen dan blokken. Beschouw bijvoorbeeld nog eens Voorbeeld 6.3.7. Het natuurlijke domein van integratie is daar de eenheidsschijf $D \subset \mathbb{R}^2$.

Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ een deelverzameling, en $f : \mathbb{R}^n$ æ $\mathbb{R}$ een functie met $\mathrm{dom}(f) \supset A$. Dan schrijven we f_A voor de functie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als} \quad x \in A, \\ 0 & \text{als} \quad x \notin A. \end{cases}$$

In het bijzonder is $1_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $1_A = 1$ op A en $1_A = 0$ buiten A. De functie 1_A wordt ook wel de *karakteristieke functie* van de verzameling A genoemd.

Definitie 7.2.11 Zij $A \subset \mathbb{R}^n$ begrensd. Een functie $f : A \to \mathbb{R}$ heet Riemann-integreerbaar over A als f begrensd is op A en er bovendien een blok $B \supset A$ bestaat zo dat de functie f_A Riemann-integreerbaar over B is. De integraal van f over A wordt gedefinieerd door:

$$\int_A f(x)\, dx := \int_B f_A(x)\, dx.$$

Deze definitie is op dit moment dubieus: de integraal in het rechterlid zou afhankelijk kunnen zijn van de keuze van het blok B. Gelukkig geldt het volgende lemma dat we later zullen bewijzen:

Lemma 7.2.12 *Zij $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ een begrensde functie die 0 is buiten een begrensde deelverzameling $A \subset \mathrm{R}^n$. Laat B_1, B_2 een tweetal n-dimensionale blokken zijn met $B_j \supset A$ $(j = 1, 2)$. Dan is de functie f Riemann-integreerbaar over B_1 dan en slechts dan als hij dat is over B_2. De bijbehorende Riemann-integralen over B_1 en B_2 zijn in dat geval gelijk aan elkaar.*

De bovenstaande uitbreiding van het domein van integratie voegt een wezenlijke complicatie toe aan de theorie, omdat de structuur van de verzameling A een belangrijke rol gaat spelen. Zo bestaat er een voorbeeld van een gesloten en begrensde deelverzameling $A \subset \mathrm{R}^2$ en een continue functie $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ die niet Riemann-integreerbaar is over A. De precieze analyse van wat hier aan de hand is stellen we uit tot een later moment. Wel geven we enige voorbeelden om een indruk te geven van de problematiek.

Voorbeeld 7.2.13 De gesloten eenheidsschijf D in R^2 is bevat in de rechthoek (2-dimensionaal blok) $B = [-1, 1] \times [-1, 1]$. We onderzoeken of de constante functie 1 integreerbaar is over D. Dit betekent per definitie dat de karakteristieke functie 1_D integreerbaar is over B. We beschouwen onder- en bovensom van 1_D bij een verdeling $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ van het blok B.

Zij I_0 de collectie van indices $i \in I$ met $B_i \cap D = \emptyset$, en I_1 de collectie van indices $i \in I$ met $B_i \subset D$. Schrijf I_r voor de collectie resterende indices. Dan is I de disjuncte vereniging van I_0, I_1 en I_r. Voor $i \in I_0$ geldt $1_D = 0$ op B_i, dus $\inf_{B_i} 1_D = \sup_{B_i} 1_D = 0$. Voor $i \in I_1$ geldt $1_D = 1$ op B_i, dus $\inf_{B_i} 1_D = \sup_{B_i} 1_D = 1$. Voor $i \in I_r$ geldt tenslotte dat 1_D zowel de waarde 0 als de waarde 1 aanneemt op B_i, dus $\inf_{B_i} 1_D = 0$ en $\sup_{B_i} 1_D = 1$. We concluderen dat:

$$\underline{S}(1_D, \mathcal{B}) = \sum_{i \in I_1} \mathrm{vol}_2(B_i); \qquad \overline{S}(1_D, \mathcal{B}) = \sum_{i \in I_1 \cup I_r} \mathrm{vol}_2(B_i).$$

De ondersom correspondeert dus met de totale oppervlakte van de rechthoeken B_i die geheel in D gelegen zijn ('binnenoppervlakte'). De bovensom correspondeert met de totale oppervlakte van de rechthoeken B_i die niet geheel disjunct met D zijn ('buitenoppervlakte'). De vraag naar integreerbaarheid van 1 over D komt dus neer op de vraag of het verschil van buiten- en binnenoppervlakte willekeurig klein gemaakt kan worden door de verdeling $\mathcal{B}$ geschikt te kiezen. We zien tevens: bestaat de integraal van 1 over D, dan kan de waarde geïnterpreteerd worden als de oppervlakte van D.

In de volgende twee voorbeelden komt een techniek aan de orde waarmee de integreerbaarheid van 1_D aangetoond kan worden.

Voorbeeld 7.2.14 Beschouw een continue functie $f : J = [a_1, b_1] \to \mathrm{R}$, waarbij $a_1 < b_1$. We veronderstellen dat $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in J$. Beschouw de verzameling $A = G(f) \subset \mathrm{R}^2$ gedefinieerd door

$$A = \{x = (x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2 \mid x_1 \in J,\ 0 \leq x_2 \leq f(x_1)\}.$$

De functie f is begrensd op J; er bestaat derhalve een $b_2 > 0$ zo dat $f(x) \leq b_2 - 1$ voor alle $x \in J$. Schrijven we $a_2 = 0$, dan zien we dat A bevat is in de rechthoek $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ (zie Figuur 12). We zullen aantonen dat de constante functie 1 Riemann-integreerbaar is over A. Daartoe tonen we aan dat de karakteristieke functie 1_A integreerbaar is over de rechthoek B.

Figuur 12: Oppervlakte onder graf f

Zij $\varepsilon > 0$. Wegens Stelling 6.2.3 bestaat er een verdeling $V = (t_j)_{0 \le j \le n}$ van het interval J zo dat $\overline{S}(f,V) - \underline{S}(f,V) < \frac{1}{2}\varepsilon$. We construeren nu een verdeling $\mathcal{B}$ van B en beschouwen de bijbehorende onder- en bovensom van 1_A. Voor iedere $1 \le j \le n$ definiëren we $J(j) = [t_{j-1}, t_j]$ en $\underline{h}_j = \inf_{J(j)} f$, $\overline{h}_j = \sup_{J(j)} f$. Zij η het minimum van $\varepsilon/2(b_1 - a_1)$ en 1. Dan is $\overline{h}_j + \eta \le b_2$. We definiëren de rechthoeken $B_{j,1}$, $B_{j,2}$ en $B_{j,3}$ door:

$$B_{j,1} = J(j) \times [0, \underline{h}_j], \quad B_{j,2} = J(j) \times [\underline{h}_j, \overline{h}_j + \eta], \quad B_{j,3} = J(j) \times [\overline{h}_j + \eta, b_2].$$

Schrijf $I = \{1, \ldots, n\} \times \{1,2,3\}$; dan is $\mathcal{B} = \{B_{j,k} \mid (j,k) \in I\}$ een verdeling van B met indexverzameling I. Het is nu gemakkelijk in te zien dat $B_{j,1} \subset A$, terwijl $B_{j,3} \cap A = \emptyset$. Derhalve is $1_A = 1$ op $B_{j,1}$, terwijl $1_A = 0$ op $B_{j,3}$. Hieruit volgt dat $\inf_{B_{j,1}} 1_A = \sup_{B_{j,1}} 1_A = 1$ en dat $\sup_{B_{j,3}} 1_A = 0$.

Voor de onder- en bovensom van 1_A bij $\mathcal{B}$ vinden we derhalve de volgende schattingen:

$$\underline{S}(1_A, \mathcal{B}) \ge \sum_{1 \le j \le n} \mathrm{vol}_2(B_{j,1}) = \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})\underline{h}_j = \underline{S}(f,V)$$

en

$$\begin{aligned} \overline{S}(1_A, \mathcal{B}) &\le \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ k=1,2}} \mathrm{vol}_n(B_{j,k}) = \sum_{j=1}^{n} [\mathrm{vol}_2(B_{j,1}) + \mathrm{vol}_2(B_{j,2})] \\ &= \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j-1})(\overline{h}_j + \eta) = \overline{S}(f,V) + (b_1 - a_1)\eta < \overline{S}(f,V) + \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Er geldt derhalve dat

$$\underline{S}(f,V) \le \underline{S}(1_A, \mathcal{B}) \le \overline{S}(1_A, \mathcal{B}) \le \overline{S}(f,V) + \frac{1}{2}\varepsilon < \underline{S}(f,V) + \varepsilon. \tag{7.6}$$

Wegens Lemma 7.2.8 volgt derhalve dat 1_A Riemann-integreerbaar is over B, dus dat 1 integreerbaar is over A. De bijbehorende integraal $\int_B 1_A(x)\, dx$ is een getal tussen $\underline{S}(1_A, \mathcal{B})$ en $\overline{S}(1_A, \mathcal{B})$, dus, wegens (7.6), tussen $\underline{S}(f, V)$ en $\underline{S}(f, V) + \varepsilon$. De integraal $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx$ ligt tussen de sommen $\underline{S}(f, V)$ en $\overline{S}(f, V)$, dus ook tussen $\underline{S}(f, V)$ en $\underline{S}(f, V) + \varepsilon$. We concluderen dat het verschil tussen de beide genoemde integralen ten hoogste ε bedraagt. Dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$; daarom:

$$\int_A 1\, dx = \int_B 1_A(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx.$$

Hiermee is aangetoond dat de oppervlakte van $A = G(f)$, oorspronkelijk gedefinieerd door middel van de integraal van f, gelijk is aan $\int_A dx$.

Voorbeeld 7.2.15 Door het bovenstaande toe te passen op de functie $f : [-1, 1] \to \mathrm{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ zien we dat de constante functie 1 Riemann-integreerbaar is over de halve eenheidsschijf $D_+ = \{x \in \mathrm{R}^2 \mid \|x\| \leq 1,\ x_2 \geq 0\}$ in R^2. Door een soortgelijke argumentatie toe te passen op de overgebleven halve schijf $D_- = \{x \in \mathrm{R}^2 \mid \|x\| \leq 1,\ x_2 \leq 0\}$ vinden we tenslotte dat 1 Riemann-integreerbaar is over de eenheidsschijf $D = D_+ \cup D_-$ in R^2.

Voorbeeld 7.2.16 Met een soortgelijke argumentatie als in Voorbeeld 7.2.14 kan aangetoond worden dat het in Opmerking 6.3.6 gedefinieerde volume van $G(f)$ overeenkomt met de 3-dimensionale integraal $\int_{G(f)} dx$.

Definitie 7.2.17 Zij $A \subset \mathrm{R}^n$ een begrensde verzameling. De verzameling A heet *Jordan-meetbaar* als de constante functie 1 Riemann-integreerbaar is over A. In dat geval wordt het *n-dimensionale volume* van A gedefinieerd door:

$$\mathrm{vol}_n(A) = \int_A dx.$$

De verzameling A heet *verwaarloosbaar* als hij Jordan-meetbaar is en $\mathrm{vol}_n(A) = 0$.

Opmerking 7.2.18 (a) Wegens (7.5) komt de nieuwe definitie van vol_n voor een blok overeen met de oude.

(b) Beschouw nogmaals de functie f uit Voorbeeld 7.2.14. Blijkens de daar gegeven redenering komt de eerder gedefinieerde oppervlakte van $G(f)$ overeen met $\mathrm{vol}_2(G(f))$.

(c) Beschouw nogmaals de functie f uit Opmerking 6.3.6. Het eerder gedefinieerde volume van $G(f)$ komt overeen met $\mathrm{vol}_3(G(f))$.

We formuleren nu enkele rekenregels die we later zullen bewijzen.

Lemma 7.2.19 **(Rekenregels)** *Laat $A \subset \mathrm{R}^n$ een begrensde verzameling zijn, zij $\lambda \in \mathrm{R}$ en veronderstel dat de functies $f, g : A \to \mathrm{R}$ Riemann-integreerbaar over A zijn. Dan zijn λf, $f + g$, $|f|$ en fg Riemann-integreerbaar over A, en er geldt:*

(a) $\int_A \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_A f(x)\, dx$;
(b) $\int_A (f+g)(x)\, dx = \int_A f(x)\, dx + \int_A g(x)\, dx$;
(c) $|\int_A f(x)\, dx| \leq \int_A |f(x)|\, dx$.

Voorts geldt de volgende eigenschap van monotonie:
(d) *als* $f(x) \leq g(x)$ *voor alle* $x \in A$, *dan* $\int_A f(x)\, dx \leq \int_A g(x)\, dx$.

7.3 De substitutiestelling

In deze paragraaf behandelen we de substitutiestelling voor integratie in $\mathbb{R}^n$. Het bewijs stellen we weer uit tot later.

Definitie 7.3.1 Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ een open verzameling. Een totaal differentieerbare afbeelding $\Phi : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ heet *regulier* in $a \in U$ als $\det D\Phi(a) \neq 0$. De afbeelding Φ heet regulier op U als hij regulier is in ieder punt van U.

Opmerking 7.3.2 Merk op dat $\det D\Phi(x) = \det J_\Phi(x)$. Deze determinant wordt ook wel de *Jacobiaan* van Φ genoemd. Overigens zullen we in het vervolg stilzwijgend lineaire afbeeldingen identificeren met hun matrices ten aanzien van de standaardbases. Aldus wordt de afgeleide $D\Phi(x)$ geïdentificeerd met de Jacobi-matrix $J_\Phi(x)$.

De volgende *substitutiestelling* stelt ons in staat vele Jordan-meetbare verzamelingen en Riemann-integreerbare functies te herkennen.

Stelling 7.3.3 (Substitutiestelling, versie 1) *Laat B een n-dimensionaal blok zijn en $\Psi : B \to \mathbb{R}^n$ een C^1-functie met de volgende eigenschappen:*

(a) Ψ *is injectief op* B^{inw};
(b) Ψ *is regulier op* B^{inw}.

Dan is iedere continue functie $f : \Psi(B) \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar over $\Psi(B)$. De integraal wordt gegeven door:

$$\int_{\Psi(B)} f(x)\, dx = \int_B f(\Psi(y))\, |\det D\Psi(y)|\, dy. \tag{7.7}$$

Opmerking 7.3.4 (a) Uit de gegevens volgt dat de integrand in het rechterlid van (7.7) continu is op het blok B, en derhalve Riemann-integreerbaar over B (Stelling 7.2.9).

(b) Uit de bovenstaande stelling met $f = 1$ volgt dat $\Psi(B)$ Jordan-meetbaar is. Het volume wordt gegeven door:

$$\mathrm{vol}_n(\Psi(B)) = \int_B |\det D\Psi(y)|\, dy. \tag{7.8}$$

Opmerking 7.3.5 Voor $n = 1$ vinden we uit de bovenstaande stelling een zwakkere versie van de reeds bekende substitutiestelling terug. Het blok is nu een interval $B = [a, b]$. De afbeelding Ψ is nu een C^1-functie $[a, b] \to \mathrm{R}$. De Jacobiaan is gelijk aan Ψ'. In dit geval zegt de bovenstaande stelling dus: als Ψ injectief is op $]a, b[$ en als $\Psi' \neq 0$ op $]a, b[$, dan geldt:

$$\int_{\Psi([a,b])} f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(\Psi(y))\, |\Psi'(y)|\, dy. \tag{7.9}$$

De hier optredende absoluutstrepen worden als volgt verklaard. Uit de continuïteit van Ψ' en de tussenwaardestelling volgt dat of $\Psi' > 0$ overal op $]a, b[$, of $\Psi' < 0$ overal op $]a, b[$.

In het eerste geval is Ψ monotoon stijgend, en met de tussenwaardestelling zien we dat $\Psi([a, b]) = [\Psi(a), \Psi(b)]$, zodat de integraal in het linkerlid van (7.9) herschreven kan worden als integraal met ondergrens $\Psi(a)$ en bovengrens $\Psi(b)$. Voorts is $|\Psi'| = \Psi'$ zodat (7.9) herschreven kan worden in de bekende oude vorm:

$$\int_{\Psi(a)}^{\Psi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\Psi(y))\, \Psi'(y)\, dy. \tag{7.10}$$

In het tweede geval ($\Psi' < 0$) is Ψ monotoon dalend, dus $\Psi([a, b]) = [\Psi(b), \Psi(a)]$, zodat het linkerlid van (7.9) herschreven kan worden als

$$\int_{\Psi(b)}^{\Psi(a)} f(x)\, dx.$$

De grenzen kunnen verwisseld worden volgens de *afspraak* dat daarmee een min-teken voor de integraal verschijnt. Dit min-teken wordt gecompenseerd door het min-teken in de nu geldende formule $|\Psi'| = -\Psi'$, en we vinden uit (7.9) wederom de 'oude' substitutieformule (7.10) terug.

Tenslotte merken we nog op dat in de 'oude' substitutiestelling niets over injectiviteit van Ψ of het niet nul zijn van Ψ' geëist wordt; formule (7.10) geldt reeds onder de voorwaarden dat $\Psi : [a, b] \to \mathrm{R}$ continu differentieerbaar is en $f : \Psi([a, b]) \to \mathrm{R}$ continu. De oude versie is derhalve krachtiger dan de nieuwe versie voor $n = 1$.

In de oude versie is het toegestaan dat $\Psi([a, b])$ ongelijk is aan het interval dat $\Psi(a)$ en $\Psi(b)$ tot eindpunten heeft. Beschouw bijvoorbeeld $\Psi : [-1, 1] \to \mathrm{R}, x \mapsto x^2$. Dan is $\Psi([-1, 1]) = [0, 1]$, maar $\Psi(-1) = \Psi(1) = 1$. De functie Ψ is continu differentieerbaar, zodat de oude versie van de substitutiestelling geldt. Die versie, met $f = 1$ (constant), geeft nu:

$$\int_1^1 dy = \int_{-1}^1 2x\, dx,$$

hetgeen inderdaad juist is: beide leden zijn gelijk aan 0. Daarentegen wordt de formule (7.9) in dit voorbeeld:

$$\int_{[0,1]} dx = \int_{[-1,1]} 2|x|\, dx$$

hetgeen onjuist is: het linkerlid is 1 en het rechterlid 2. Voor de nieuwe versie van de substitutiestelling is de eis dat Ψ injectief is blijkbaar noodzakelijk.

Door het ontbreken van een natuurlijke ordening op R^n kunnen deelverzamelingen van R^n wezenlijk gecompliceerder zijn dan intervallen; derhalve heeft de oude formulering van de substitutiestelling geen direkt analogon in R^n, $n > 1$. Blijkbaar is de nieuwe formulering van de substitutiestelling de meest geëigende in de context van meer variabelen.

Voor een dieper inzicht in de structuur van de substitutieformule is het nuttig de speciale gevallen te beschouwen dat Ψ een translatie, respectievelijk een inverteerbare lineaire transformatie is. Dit gebeurt in de volgende twee voorbeelden.

Voorbeeld 7.3.6 **(Translatie-invariantie)** Zij $\Psi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ de translatie $x \mapsto x + a$. Is $S \subset \mathrm{R}^n$, dan schrijven we ook $a + S$ voor $\Psi(S)$. De translatie Ψ voldoet op ieder blok B aan de voorwaarden van de bovenstaande stelling, en $D\Psi(x) = I$ voor alle $x \in \mathrm{R}^n$, dus de Jacobiaan is constant 1. Hieruit volgt, voor iedere continue functie $f : a + B \to \mathrm{R}$, dat

$$\int_{a+B} f(x)\,dx = \int_B f(x+a)\,dx. \tag{7.11}$$

De Riemann-integraal wordt om deze reden wel *translatie-invariant* genoemd.

De translatie-invariantie kan men (zelfs voor een willekeurige Riemann-integreerbare functie) ook direct bewijzen uit de definitie van de Riemann-integraal: is $\mathcal{B} = \{B_i | i \in I\}$ een verdeling van B, dan is $a + \mathcal{B} := \{a + B_i \mid i \in I\}$ een verdeling van $a + B$. Aldus wordt een bijectie tussen de verdelingen van B en die van $a + B$ tot stand gebracht. Laat nu $f : a + B \to \mathrm{R}$ een begrensde functie zijn, en schrijf $T_a f$ voor de getransleerde functie $B \to \mathrm{R}$, $x \mapsto f(a + x)$. Dan geldt voor iedere verdeling $\mathcal{B}$ van B dat:

$$\underline{S}(f, a+\mathcal{B}) = \underline{S}(T_a f, \mathcal{B}), \qquad \overline{S}(f, a+\mathcal{B}) = \overline{S}(T_a f, \mathcal{B}).$$

Door het supremum, respectievelijk het infimum van deze uitdrukkingen te nemen over alle verdelingen van B volgt de translatie-invariantie van de onder- en de boven-Riemann-integraal van f. Hieruit volgt weer dat f Riemann-integreerbaar is over $a + B$ dan en slechts als $T_a f$ dat is over B. Bovendien geldt in dat geval formule (7.11).

Zij nu $A \subset \mathrm{R}^n$ een begrensde Jordan-meetbare verzameling, en $a \in \mathrm{R}^n$. Dan geldt: $T_a 1_{a+A} = 1_A$. Door het voorgaande toe te passen op de functie $f = 1_{a+A}$ en op een blok B dat A bevat, vinden we dat $a + A$ Jordan-meetbaar is, en dat $\mathrm{vol}_n(a + A) = \mathrm{vol}_n(A)$.

Voorbeeld 7.3.7 **(Lineaire substitutie)** Zij $\Psi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ een inverteerbare lineaire afbeelding. Dan is Ψ een injectieve C^1-afbeelding. Bovendien is de afgeleide van Ψ constant: $D\Psi(x) = \Psi$ voor alle $x \in \mathrm{R}^n$. In het bijzonder zien we dat Ψ overal regulier is. De afbeelding Ψ voldoet dus op ieder blok B aan de voorwaarden van de substitutiestelling. Is $f : \Psi(B) \to \mathrm{R}$ continu, dan is dus:

$$\int_{\Psi(B)} f(x)\,dx = |\det \Psi| \int_B f(\Psi(x))\,dx.$$

Passen we dit toe op $f = 1$, dan volgt:

$$\mathrm{vol}_n(\Psi(B)) = |\det \Psi|\; \mathrm{vol}_n(B). \tag{7.12}$$

Over de structuur van $\Psi(B)$ merken we nog het volgende op. Is $v_1, \ldots, v_n$ een n-tal vectoren in R^n, dan schrijven we $P(v_1, \ldots, v_n)$ voor het *parallellepipedum* opgespannen door $v_1, \ldots, v_n$:

$$P(v_1, \ldots, v_n) := \{\sum_{j=1}^n t_j v_j \mid t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]\}.$$

Is $L : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ een lineaire afbeelding dan is

$$LP(v_1, \ldots, v_n) = P(Lv_1, \ldots, Lv_n).$$

Het blok B is van de vorm (7.1). Schrijven we $v_j = (b_j - a_j)e_j$, met e_j de j-de standaard basisvector dan hebben we:

$$B = a + P(v_1, \ldots, v_n).$$

Wegens de lineariteit van Ψ volgt:

$$\Psi(B) = \Psi(a) + P(\Psi v_1, \ldots, \Psi v_n).$$

Passen we formule (7.12) en de bovenstaande formule toe op het blok $B = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$ dan vinden we

$$\mathrm{vol}_n(P(\Psi e_1, \ldots, \Psi e_n)) = |\det \Psi|.$$

Deze formule is in de lineaire algebra gebruikt als *definitie* van het (ongeoriënteerde) volume van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $\Psi(e_j)$. Wij doen het hier zuiniger. We zijn uitgegaan van het intuïtief evidente postulaat dat het volume van een blok parallel aan de coördinaatassen gelijk is aan het produkt van de lengten van de zijden, en verkrijgen de bovenstaande formule als stelling (die overigens nog bewezen moet worden).

Door de substitutiestelling te combineren met Stelling 7.2.10 kunnen integralen in vele situaties berekend worden met behulp van herhaalde 1-dimensionale integraties. We lichten dit toe aan de hand van enige voorbeelden. Daarna zullen we de betekenis van de Jacobiaan in meer detail bespreken.

Voorbeeld 7.3.8 (Oppervlakte van de cirkelschijf, poolcoördinaten) We beschouwen de gesloten schijf $S = \bar{B}(0; R)$ in R^2 met middelpunt 0 en straal R. Met behulp van poolcoördinaten kunnen we S beschrijven als C^1-beeld van een rechthoek. Immers definieer $\Psi : B := [0, R] \times [-\pi, \pi] \to \mathrm{R}^2$ door $\Psi(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$. Dan is Ψ een C^1-afbeelding, die B afbeeldt op S. De afbeelding Ψ is injectief op $B^{\mathrm{inw}} =]0, R[\times]-\pi, \pi[$. Voorts worden Jacobi-matrix en Jacobiaan van Ψ gegeven door

$$D\Psi(r, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}, \qquad \det D\Psi(r, \alpha) = r,$$

dus $\det D\Psi \neq 0$ op B^{inw}. De afbeelding Ψ voldoet dus aan de voorwaarden van de substitutiestelling. Voor iedere continue functie $f : S \to \mathrm{R}$ geldt daarom:

$$\int_S f(x)\, dx = \int_B f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)\, r\, d(r, \alpha) = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha)\, r\, d\alpha\, dr; \tag{7.13}$$

voor de laatste identiteit hebben we Stelling 7.2.10 gebruikt. In het bijzonder volgt door toepassing van het bovenstaande op de constante functie $f = 1$ dat:

$$\mathrm{vol}_2(S) = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} r\, d\alpha\, dr = 2\pi \int_0^R r\, dr = \pi R^2.$$

Voorbeeld 7.3.9 (Top van een paraboloïde, II) We passen de bovenstaande berekening nog eens toe met de eenheidsschijf $D = \{x \in \mathrm{R}^2 \mid \|x\| \le 1\}$ (dus $D = S$ met $R = 1$) en de continue functie $f : D \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $f(x_1, x_2) = 1 - x_1^2 - x_2^2$. Zij $B = [-1, 1]^2$. Dan is $f_D(x) = \max\{0, 1 - x_1^2 - x_2^2\}$. In Voorbeeld 6.3.7 berekenden we:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f_D(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Dus ook:

$$\int_D f(x)\, dx = \int_B f_D(x)\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Formule (7.13) levert ons nu langs een veel kortere weg hetzelfde antwoord:

$$\int_D f(x)\, dx = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - r^2)\, r\, d\alpha\, dr = 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Voorbeeld 7.3.10 (Volume van een kegel) We beschouwen een blok $B \subset \mathrm{R}^n$, en een C^1-afbeelding $\Phi : B \to \mathrm{R}^n$ die injectief en regulier is op B^{inw}. Wegens de substitutiestelling is het beeld $G = \Phi(B)$ een Jordan-meetbare verzameling in R^n.

Zij $K \subset \mathrm{R}^{n+1}$ de kegel op het grondlichaam $G \times \{0\}$ en met top in $a = (0, \ldots, 0, h)$, waarbij $h > 0$. D.w.z. K is de verzameling van punten $(x, 0) + t[a - (x, 0)]$ met $x \in G$ en $t \in [0, 1]$.

Definieer $\Psi : B' := B \times [0, 1] \to \mathrm{R}^{n+1}$ door $\Psi(y, t) = (\Phi(y), 0) + t(a - (\Phi(y), 0))$. Dan is

$$\Psi(y, t) = ((1 - t)\Phi(y), th).$$

Hieruit leidt men gemakkelijk af dat Ψ een C^1-afbeelding is en dat Ψ injectief is op $B'^{\mathrm{inw}} = B^{\mathrm{inw}} \times]0, 1[$. Voorts geldt voor $1 \le j \le n$ dat:

$$D_j \Psi(y, t) = ((1 - t) D_j \Phi(y), 0)$$

(op te vatten als kolomvector). De partiële afgeleide naar t wordt gegeven door:

$$D_{n+1} \Psi(y, t) = (-\Phi(y), h)$$

(wederom op te vatten als kolomvector). De Jacobi-matrix van Ψ wordt dus gegeven door:

$$D\Psi(y, t) = \begin{pmatrix} (1 - t) D\Phi(y) & -\Phi(y) \\ 0 \ldots 0 & h \end{pmatrix}.$$

De Jacobiaan is derhalve gelijk aan $\det D\Psi(y, t) = h(1 - t)^n \det D\Phi(y)$, en deze is ongelijk nul op B'^{inw}. Met de substitutiestelling vinden we nu dat:

$$\mathrm{vol}_{n+1}(K) = \int_K dx = \int_{B \times [0,1]} h(1 - t)^n\, |\det D\Phi(y)|\, d(y, t).$$

Door herhaald toepassen van Stelling 7.2.10 kunnen we de laatste integraal herschrijven als de herhaalde integraal:

$$\begin{aligned} \int_B \int_0^1 h(1 - t)^n |\det D\Phi(y)|\, dt\, dy &= [-\frac{h}{n+1}(1 - t)^{n+1}]_0^1 \int_B |\det D\Phi(y)|\, dy \\ &= \frac{h}{n+1} \mathrm{vol}_n(G). \end{aligned}$$

Het volume van de kegel K is dus gelijk aan $\frac{1}{n+1}$ maal de hoogte maal het volume van het grondlichaam:

$$\mathrm{vol}_{n+1}(K) = \frac{h}{n+1}\mathrm{vol}_n(G).$$

Een speciaal geval is de kegel in R^3 met als grondvlak de cirkelschijf $G = \{(x_1, x_2, 0) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$, en als top $(0, 0, h)$. Het volume van die kegel is volgens het bovenstaande gelijk aan $\pi R^2 h/3$.

Een ander speciaal geval is dat van de *piramide* in R^3 met als grondvlak de rechthoek $[0, p] \times [0, q] \times \{0\}$ en als top het punt $(0, 0, h)$. Het volume van deze piramide is $pqh/3$.

We eindigen deze paragraaf met een beschouwing waarin de rol van de Jacobiaan nader wordt toegelicht.

Zij B een blok in R^n en $\Psi : B \to \mathrm{R}^n$ een C^1-afbeelding die voldoet aan de voorwaarden van de substitutiestelling: Ψ is injectief en regulier op B^{inw}. Zij $x \in B^{\mathrm{inw}}$. Is $dx = (dx_1, \ldots, dx_n) \in \,]0, \infty[^n$ een vector voldoende dicht bij 0, dan ligt het blok:

$$V(x, dx) := [x_1, x_1 + dx_1] \times \ldots \times [x_n, x_n + dx_n]$$

in B. Toepassing van de substitutiestelling op Ψ beperkt tot dit blok geeft:

$$\mathrm{vol}_n(\Psi[V(x, dx)]) = \int_{V(x,dx)} |\det D\Psi(y)|\, dy.$$

De functie $y \mapsto \det D\Psi(y)$ is een veelterm in de partiële afgeleiden van Ψ, en dus continu (Ψ is C^1). Hieruit volgt dat

$$|\det D\Psi(y)| = |\det D\Psi(x)| + \rho(y), \qquad \text{met} \quad \lim_{y \to x} \rho(y) = 0.$$

Passen we dit toe op de bovenstaande integraal, dan vinden we dat

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}_n(\Psi[V(x, dx)]) = |\det D\Psi(x)|\, \mathrm{vol}_n(V(x, dx)) + R(dx), \qquad \text{met}\\ &R(dx) = \int_{V(x,dx)} \rho(y)\, dy.\end{aligned}$$

De restterm kunnen we wegens Lemma 7.2.19(c) schatten door:

$$\begin{aligned} |R(dx)| &\leq \sup_{y \in V(x,dx)} |\rho(y)| \int_{V(x,dx)} dy \\ &= \sup_{y \in V(x,dx)} |\rho(y)|\; \mathrm{vol}_n(V(x, dx)).\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $R(dx) = o(1)\, \mathrm{vol}_n(V(x, dx))$ voor $dx \to 0$. We concluderen dat

$$\mathrm{vol}_n(\Psi[V(x, dx)]) = [\,|\det D\Psi(x)| + o(1)\,]\, \mathrm{vol}_n(V(x, dx)) \tag{7.14}$$

voor $dx \to 0$, ofwel dat

$$|\det D\Psi(x)| = \lim_{dx \to 0} \frac{\mathrm{vol}_n(\Psi[V(x, dx)])}{\mathrm{vol}_n(V(x, dx))}.$$

In deze zin kan $|\det D\Psi(x)|$ geïnterpreteerd worden als *infinitesimale volume veranderende factor.*

Tenslotte brengen we het bovenstaande nog in verband met de eerste orde benadering van Ψ door middel van de totale afgeleide. Schrijf $V(0, dx) = [0, dx_1] \times \cdots \times [0, dx_n]$. Dan is $V(x, dx) = x + V(0, dx)$. De afbeelding $h \mapsto \Psi(x+h)$ wordt rond $h = 0$ benaderd door $h \mapsto \Psi(x) + D\Psi(x)h$. Het beeld $\Psi(V(x, dx))$ wordt voor $dx \to 0$ derhalve benaderd door het parallellepipedum $\Psi(x) + D\Psi(x)V(0, dx)$. Het volume van dit parallellepipedum is wegens de translatie-invariantie van vol_n (Voorbeeld 7.3.6) en wegens formule (7.12) (met $D\Psi(x)$ in plaats van Ψ) gelijk aan:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n[\Psi(x) + D\Psi(x)V(0, dx)\,] &= \mathrm{vol}_n[D\Psi(x)V(0, dx)] \\
&= |\det D\Psi(x)|\,\mathrm{vol}_n(V(0, dx) \\
&= |\det D\Psi(x)|\,\mathrm{vol}_n(V(x, dx)).
\end{aligned}
$$

Combineren we dit met (7.14) dan zien we dat het volume van $\Psi(V(x, dx))$ voor $dx \to 0$ benaderd wordt door dat van het benaderende parallellepipedum $\Psi(x) + D\Psi(x)V(0, dx)$.

In Figuur 13 is het zojuist besproken idee van approximatie weergegeven voor het geval $n = 2$. Om de figuur te begrijpen merken we nog op dat: $V(0, dx) = P(dx_1 e_1, \ldots, dx_n e_n)$, dus

$$
\begin{aligned}
D\Psi(x)V(0, dx) &= P(dx_1 D\Psi(x)e_1, \ldots, dx_n D\Psi(x)e_n) \\
&= P(dx_1 D_1\Psi(x), \ldots, dx_n D_n\Psi(x)).
\end{aligned}
$$

Figuur 13: Benadering van $\Psi(V(x, dx))$, $n = 2$

Het is mogelijk om op het hierboven beschreven idee een bewijs van de substitutiestelling te baseren. Eerst wordt dan de substitutiestelling bewezen voor lineaire Ψ. Vervolgens wordt de stelling uitgebreid tot algemenere Ψ door lokaal de hierboven geschetste approximatie te gebruiken met een nauwkeurige schatting van de daarbij optredende fout.

Hoofdstuk 8

Lijnintegralen en primitiveren

8.1 De lijnintegraal van een functie

In het vervolg is $I = [a_I, b_I]$ steeds een gesloten en begrensd interval van positieve lengte (d.w.z. $a_I < b_I$), en $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een C^1-kromme in R^n; d.w.z. γ is differentieerbaar op I, en de afgeleide γ' is continu op I. Interpreteren we $\gamma(t)$ als positie van een puntdeeltje op tijdstip t, dan heeft de vector $\gamma'(t)$ de interpretatie van snelheid op het tijdstip t. De grootte van die snelheid wordt gegeven door $||\gamma'(t)||$. We zoeken nu naar een geschikte definitie van een functie $s : I \to \mathrm{R}$ zo dat $s(t)$ geïnterpreteerd kan worden als de op het tijdstip t door het deeltje afgelegde weg. De afgeleide van die functie naar de tijd zou op grond van de interpretatie gelijk moeten zijn aan de grootte van de snelheid; dus: $s'(t) = ||\gamma'(t)||$. Dit motiveert de volgende definitie:

Definitie 8.1.1 De *lengte* van de C^1-kromme $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ is het getal

$$l(\gamma) := \int_{a_I}^{b_I} ||\gamma'(t)||\, dt.$$

Opmerking 8.1.2 (a) Merk op dat de integrand, als samenstelling van de continue functies $t \mapsto \gamma'(t)$, $I \to \mathrm{R}^n$ en $x \mapsto ||x||$, $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ continu is, en dus Riemann-integreerbaar over I.

(b) De hierboven gezochte afstandsfunctie s wordt gegeven door

$$s(t) = l(\gamma|_{[a_I,t]}) = \int_{a_I}^{t} ||\gamma'(\tau)||\, d\tau.$$

Voorbeeld 8.1.3 (Lengte van een lijnstuk) Als $a, b \in \mathrm{R}^n$, dan noteren we met $L(a, b)$ het *lijnstuk* in R^n met eindpunten a en b. Dit lijnstuk is gelijk aan het beeld van de kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathrm{R}^n$, $t \mapsto a + t(b - a)$. Er geldt dat $\gamma'(t) = (b - a)$, dus $||\gamma'(t)|| = ||b - a||$ voor alle $t \in [0, 1]$ en er volgt:

$$l(\gamma) = \int_0^1 ||b - a||\, dt = ||b - a||.$$

Voor lijnstukken komt de nieuwe definitie van lengte dus overeen met de oude.

Voorbeeld 8.1.4 (Lengte van een cirkel) Zij $r > 0$. We beschouwen de kromme $c : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd door $c(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Het beeld van c is de cirkel met middelpunt 0 en straal r in het vlak. Er geldt $c'(t) = r(-\sin t, \cos t)$, dus $||c'(t)|| = r$. Voor de lengte van c vinden we dus

$$l(c) = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r.$$

Deze bepaling van de lengte van een cirkel is bedrieglijk eenvoudig. De verklaring hiervoor is dat we destijds (in Analyse 1) het getal π in wezen *gedefinieerd* hebben als de halve lengte van de eenheidscirkel. In de volgende paragraaf geven we een toelichting op deze kwestie.

Voorbeeld 8.1.5 (Lengte van een grafiek) Zij $[a, b] \subset \mathrm{R}$ een gesloten en begrensd interval, en $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ een C^1-functie. Dan is de grafiek van f gelijk aan het beeld van de kromme $\gamma : [a, b] \to \mathrm{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. De kromme γ is C^1, met afgeleide $\gamma'(t) = (1, f'(t))$. Hieruit volgt dat de lengte van γ in dit geval gegeven wordt door:

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt.$$

De vorm van de integrand kan men ook terugvinden met de volgende intuïtieve beschouwing. Zij $t \in]a, b[$ en $dt > 0$. Als $dt \to 0$ dan wordt $f(t+dt)$ in eerste orde benaderd door $f(t) + f'(t)dt$. De afstand tussen $(t, f(t))$ en $(t + dt, f(t + dt))$ wordt benaderd door

$$||(t, f(t)) - (t + dt, f(t) + f'(t)dt)|| = \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt$$

(zie ook Figuur 14).

Figuur 14: Lengte van graf f

Algemener definiëren we nu de integraal van een continue functie langs een C^1-kromme.

Definitie 8.1.6 Zij $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een C^1-kromme, en $f : \mathrm{R}^n \supset \gamma(I) \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan definiëren we de *integraal van f langs γ*, genoteerd met $\int_\gamma f(x)\, d_1x$, door:

$$\int_\gamma f(x)\, d_1x := \int_{a_I}^{b_I} f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt. \tag{8.1}$$

Opmerking 8.1.7 (a) Merk op dat de integrand een continue functie van $t \in I$ is, en dus Riemann-integreerbaar over I.

(b) In § 11.7 van het Analyse 1 dictaat wordt in plaats van de bovenstaande notatie de notatie $\int_\gamma f(x)\|d_1x\|$ gebruikt.

(c) Merk op dat $l(\gamma)$ gelijk is aan de integraal van de constante functie 1 over γ :

$$l(\gamma) = \int_\gamma d_1x.$$

Opmerking 8.1.8 (Interpretatie) Beschouw de functie $F : I \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door:

$$F(t) := \int_{\gamma|[a_I,t]} f(x)\, d_1x = \int_{a_I}^{t} f(\gamma(\tau))\, \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau.$$

Dan wordt de afgeleide van F gegeven door $F'(t) = f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|$. Zij de lengtefunctie $s : I \to \mathrm{R}$ gedefinieerd als in Opmerking 8.1.2. Dan is $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Is $t_0 \in I$ een punt met $\gamma'(t_0) \neq 0$, dan zien we dat

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{s(t) - s(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \frac{t - t_0}{s(t) - s(t_0)} = \frac{F'(t_0)}{s'(t_0)} = f(\gamma(t_0)).$$

De functie f kan derhalve geïnterpreteerd worden als de toename van F per toename van de lengte s, m.a.w. als de *dichtheid* van F langs γ.

Men komt deze interpretatie bijvoorbeeld tegen in de situatie dat het beeld van γ een koord beschrijft, en $f(\gamma(t))$ de massadichtheid (massa per lengte) van het koord in het punt $\gamma(t)$. De functie $F(t)$ beschrijft dan de totale massa van het deel van het koord beschreven door $\gamma|_{[a_I,t]}$.

Op grond van de bovenstaande interpretatie kan men vermoeden dat de integraal van f langs γ niet verandert bij herparametriseren van γ. We definiëren eerst precies wat we onder dat laatste verstaan.

Definitie 8.1.9 Onder een *C^1-herparametrisering* van het gesloten en begrensde interval I verstaan we een C^1-functie φ van een gesloten en begrensd interval J naar I met

(a) φ is strikt monotoon stijgend of strikt monotoon dalend;

(b) $\varphi(J) = I$.

Een monotoon stijgende herparametrisering heet ook *oriëntatiebehoudend,* een monotoon dalende herparametrisering heet ook *oriëntatie-omkerend.*

Opmerking 8.1.10 Schrijf $J = [a_J, b_J]$. Uit de monotonie van de herparametrisering φ volgt dat $\varphi(a_J)$ en $\varphi(b_J)$ eindpunten van I zijn. Is φ oriëntatiebehoudend dan is $\varphi(a_J) = a_I$ en $\varphi(b_J) = b_I$. Is φ oriëntatie-omkerend, dan is $\varphi(a_J) = b_I$ en $\varphi(b_J) = a_I$.

Definitie 8.1.11 Laat $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een C^1-kromme zijn. Onder een *herparametrisering* van γ verstaan we een kromme van de vorm $\sigma = \gamma \circ \varphi$, met $\varphi : J \to I$ een C^1-herparametrisering van I. Is φ oriëntatiebehoudend dan zeggen we dat γ en σ *dezelfde oriëntatie* hebben; is φ oriëntatie-omkerend dan zeggen we dat γ en σ *tegengestelde oriëntaties* hebben.

Opmerking 8.1.12 (a) Het is duidelijk dat iedere herparametrisering van γ een C^1-kromme is met hetzelfde beeld als γ.

(b) Laat $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een C^1-kromme zijn, $\varphi : J \to I$ een C^1-herparametrisering van I, en beschouw de herparametrisering $\sigma = \gamma \circ \varphi$. Wegens de kettingregel geldt voor alle $t \in J$ dat $\sigma'(t) = \varphi'(t)\gamma'(\varphi(t))$. De snelheidsvectoren van σ en γ zijn derhalve proportioneel. Hebben de krommen dezelfde oriëntatie dan is de proportionaliteitsfactor ≥ 0, anders is hij ≤ 0.

Voorbeeld 8.1.13 Definieer de afbeelding $\chi_I : [0, 1] \to I$ door $\chi_I(s) = a_I + s(b_I - a_I)$. Dan is χ_I een oriëntatiebehoudende C^1-herparametrisering van I.

De afbeelding χ_I is bijectief; zijn inverse wordt gegeven door $\chi_I^{-1}(t) = (b_I - a_I)^{-1}(t - a_I)$ (ga na). We zien hieraan dat de inverse een oriëntatiebehoudende C^1-herparametrisering van het interval $[0, 1]$ definieert.

Zij nu $J = [a_J, b_J]$ een gesloten en begrensd interval van positieve lengte, en definieer $\chi_J : [0, 1] \to J$ als boven. Dan is $\varphi = \chi_I \circ \chi_J^{-1} : J \to I$ een oriëntatiebehoudende C^1-herparametrisering van het interval I.

Aldus zien we dat de C^1-kromme γ een herparametrisering $\sigma : J \to \mathrm{R}^n$ met dezelfde oriëntatie heeft, namelijk $\sigma = \gamma \circ \varphi$.

Voorbeeld 8.1.14 Passen we het bovenstaande toe op de kromme $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t)$ (dus $\operatorname{im} \gamma$ is de eenheidscirkel in R^2) en het interval $J = [0, 1]$, dan vinden we als herparametrisering de kromme $\sigma : [0, 1] \to \mathrm{R}^2,\ s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$.

Voorbeeld 8.1.15 Definieer de afbeelding $\varphi : I \to I$ door $\varphi(t) = b_I - (t - a_I)$. Dan is φ een oriëntatie-omkerende C^∞-herparametrisering van het interval I.

Voorbeeld 8.1.16 Passen we het bovenstaande toe op het interval $[0, 2\pi]$ dan vinden we de oriëntatie-omkerende herparametrisering $\varphi : t \mapsto 2\pi - t$. Samenstellen met de kromme γ uit Voorbeeld 8.1.14 levert ons de kromme $\sigma = \gamma \circ \varphi : s \mapsto (\cos(2\pi - s), \sin(2\pi - s))$, die de eenheidscirkel eenmaal in negatieve richting doorloopt.

Lemma 8.1.17 *Zij $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een C^1-kromme, en $f : \mathrm{R}^n \supset \gamma(I) \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan geldt voor iedere herparametrisering σ van γ dat*

$$\int_\sigma f(x)\, d_1 x = \int_\gamma f(x)\, d_1 x.$$

Bewijs: Er geldt dat $\sigma = \gamma \circ \varphi$ voor een C^1-herparametrisering φ van I. Zij het gesloten en begrensde interval $J = [a_J, b_J]$ het domein van φ, en schrijf $I = [a_I, b_I]$ als voorheen. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma f(x)\, d_1 x &= \int_{a_J}^{b_J} f(\sigma(s))\, \|\sigma'(s)\|\, ds \\
&= \int_{a_J}^{b_J} f(\gamma(\varphi(s)))\, \|\gamma'(\varphi(s))\|\, |\varphi'(s)|\, ds \\
&= \eta \int_{a_J}^{b_J} f(\gamma(\varphi(s)))\, \|\gamma'(\varphi(s))\|\, \varphi'(s)\, ds \quad (\eta = \pm 1) \\
&= \eta \int_{\varphi(a_J)}^{\varphi(b_J)} f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt; \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

de laatste identiteit is het gevolg van de substitutiestelling voor integralen over een interval. In de bovenstaande formules is $\eta = +1$ als φ oriëntatiebehoudend is, aangezien dan $\varphi' \geq 0$, dus $|\varphi'| = \varphi'$. Voorts is $\eta = -1$ als φ oriëntatie-omkerend is, aangezien dan $\varphi' \leq 0$ dus $|\varphi'| = -\varphi'$. In het eerste geval is φ monotoon stijgend, dus $\varphi(a_J) = a_I$ en $\varphi(b_J) = b_I$ en we zien dat de integraal (8.2) gelijk is aan

$$\int_{a_I}^{b_I} f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_\gamma f(x)\, d_1 x. \qquad (8.3)$$

In het tweede geval (φ oriëntatie-omkerend) is φ monotoon dalend, dus $\varphi(a_J) = b_I$ en $\varphi(b_J) = a_I$. Door de grenzen te verwisselen wordt het min-teken voor de integraal (8.2) gecompenseerd; de genoemde integraal is daarom ook in dit geval gelijk aan (8.3). □

Opmerking 8.1.18 De integraal van een functie langs een kromme heet wel een *niet-georiënteerde integraal*, omdat de integraal niet verandert als de kromme vervangen wordt door een herparametrisering met tegengestelde oriëntatie. In § 8.3 zullen we georiënteerde integralen langs krommen behandelen.

In het vervolg zal het nuttig zijn te kunnen integreren over krommen van een iets algemener type.

Definitie 8.1.19 Onder een *stuksgewijze* C^1-kromme in R^n verstaan we een continue kromme $\gamma : I = [a_I, b_I] \to \mathrm{R}^n$ waarbij een verdeling $V = (t_i)_{0 \leq i \leq m}$ van I bestaat, zo dat de beperking van γ tot het i-de deelinterval $[t_{i-1}, t_i]$ een C^1-kromme is $(1 \leq i \leq m)$.

Laat $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme zijn, en $f : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan is de samenstelling $f \circ \gamma$ continu, dus begrensd op I. Zij $V = (t_i)_{0 \leq i \leq m}$ een verdeling als in de bovenstaande definitie. Dan is de beperking van γ tot ieder deelinterval $[t_{i-1}, t_i]$ continu differentieerbaar, derhalve is $||\gamma'||$ continu en begrensd op ieder interval $]t_{i-1}, t_i[$ $(1 \leq i \leq m)$.

We formuleren nu een stelling die garandeert dat de functie $f \circ \gamma ||\gamma'||$ Riemann-integreerbaar over I is.

Stelling 8.1.20 *Zij E een eindige deelverzameling van I. Is $\varphi : I \setminus E \to \mathrm{R}$ een begrensde continue functie, dan is iedere uitbreiding $\tilde{\varphi}$ van φ tot I Riemann-integreerbaar over I. Bovendien is de waarde van de Riemann-integraal $\int_I \tilde{\varphi}(t)\, dt$ onafhankelijk van de gekozen uitbreiding.*

Bewijs: Zij $\tilde{\varphi}$ een uitbreiding, d.w.z. een functie $I \to \mathrm{R}$ met $\tilde{\varphi} = \varphi$ op $I \setminus E$. Uit de begrensdheid van φ en de eindigheid van E volgt dat ook $\tilde{\varphi}$ begrensd is. De Riemann-integreerbaarheid van $\tilde{\varphi}$ volgt nu uit Propositie A.10.6.2. Zij $\bar{\varphi}$ een tweede uitbreiding. Dan is $\bar{\varphi}$ ook een Riemann-integreerbare functie op I, die buiten de eindige verzameling E gelijk is aan $\tilde{\varphi}$. Het is nu voldoende aan te tonen dat de integraal van $\psi := \bar{\varphi} - \tilde{\varphi}$ over I gelijk is aan nul.

Het bewijs hiervan kunnen we reduceren tot het geval dat E uit één element bestaat, door I te splitsen in deelintervallen. Zij dus $E = \{t_0\}$. Zij $\varepsilon > 0$ en zij V een verdeling van I met maas $m(V) < \varepsilon$. Dan ligt t_0 in ten hoogste twee deelintervallen van V. In de overige deelintervallen van V is ψ identiek gelijk aan nul. Hieruit volgt dat $\bar{S}(\psi, V) < 2\varepsilon|\psi(t_0)|$, en $\underline{S}(\psi, V) > -2\varepsilon|\psi(t_0)|$. Derhalve geldt: $\int_I \psi(x)\, dx \in [-2\varepsilon|\psi_0|, 2\varepsilon|\psi_0|]$. Dit geldt voor iedere $\varepsilon > 0$, dus de integraal is nul. □

Definitie 8.1.21 Is $E \subset I$ een eindige deelverzameling en $\varphi : I \setminus E \to \mathrm{R}$ een begrensde continue functie, dan definiëren we de integraal van φ over I door

$$\int_I \varphi(t)\, dt := \int_I \tilde{\varphi}(t)\, dt$$

met $\tilde{\varphi}$ een (willekeurige) uitbreiding van φ tot I. (De integraal in het rechterlid is onafhankelijk van de gekozen uitbreiding wegens de bovenstaande stelling.)

In het vervolg zal $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme zijn, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld. De integraal van een continue functie $f : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{R}$ langs γ definiëren we precies als in Definitie 8.1.6, dus met behulp van formule (8.1). De lengte van γ definiëren we door $l(\gamma) = \int_\gamma d_1 x$.

Een herparametrisering van de stuksgewijze C^1-kromme $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ definiëren we precies als in Definitie 8.1.11, dus als $\gamma \circ \varphi$, met φ een C^1-herparametrisering van I.

Zij $V = (t_i)_{0 \leq i \leq m}$ een verdeling van I, en schrijf $I(i) = [t_{i-1}, t_i]$ voor het i-de deelinterval bij deze verdeling $(1 \leq i \leq m)$. Definieer, voor $1 \leq i \leq m$, de stuksgewijze C^1-kromme $\gamma_i : I(i) \to \mathrm{R}^n$

door $\gamma_i = \gamma|_{I(i)}$. Dan volgt uit de definitie van lijnintegraal en Gevolg A.10.3.2 (d) voor Riemann-integratie dat

$$\int_\gamma f(x)\, d_1x = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f(x)\, d_1x, \tag{8.4}$$

voor iedere continue functie $f : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{R}$. Uiteraard kunnen we de verdeling V zo kiezen dat iedere γ_i een C^1-kromme is. Aldus zien we dat iedere integraal langs een stuksgewijze C^1-kromme te schrijven is als som van integralen langs C^1-krommen. Met behulp van deze reductie kunnen we Lemma 8.1.17 generaliseren tot het geval van een stuksgewijze C^1-kromme.

Lemma 8.1.22 *Zij $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme. Dan is iedere herparametrisering σ van γ een stuksgewijze C^1-kromme met hetzelfde beeld als γ. Bovendien geldt voor iedere continue functie $f : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{R}$ dat $\int_\sigma f(x)\, d_1x = \int_\gamma f(x)\, d_1x$.*

Bewijs: We reduceren op voor de hand liggende wijze naar Lemma 8.1.17. Er geldt $\sigma = \gamma \circ \varphi$, met $\varphi : J \to I$ een C^1-herparametrisering van I.

Zij $(t_i)_{0 \le i \le m}$ een verdeling van het interval I zo dat de beperking γ_i van γ tot $I(i) = [t_{i-1}, t_i]$ een C^1-kromme is. De afbeelding φ is bijectief en strikt monotoon. Hieruit volgt dat de verzamelingen $J(i) := \varphi^{-1}(I(i))$ $(1 \le i \le m)$ intervallen zijn die een verdeling van J bepalen. Zij σ_i de beperking van σ tot $J(i)$. Dan geldt: $\sigma_i = \gamma_i \circ \varphi$, dus σ_i is een herparametrisering van de C^1-kromme γ_i; in het bijzonder is σ_i een C^1-kromme. Hieruit leiden we af dat σ stuksgewijs C^1 is.

De in het lemma genoemde identiteit vinden we door de ontbinding (8.4) toe te passen op de integralen langs γ en σ, ten aanzien van de zojuist beschreven verdelingen. Lemma 8.1.17 impliceert dan gelijkheid van de zo verkregen integralen van f langs γ_i en σ_i, voor elke $1 \le i \le m$. $\square$

Stuksgewijze C^1-krommen zullen in het vervolg vooral ontstaan door aaneenschakeling van C^1-krommen.

Definitie 8.1.23 Laten $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ stuksgewijze C^1-krommen in R^n zijn, zo dat het eindpunt van γ_i gelijk is aan het beginpunt van γ_{i+1}, voor $1 \le i < m$. Onder een *aaneenschakeling* van $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ verstaan we een stuksgewijze C^1-kromme $\gamma : [a, b] \to \mathrm{R}^n$ met de volgende eigenschap: Er bestaat een verdeling $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ van het interval $[a, b]$ zo dat voor elke $1 \le i \le m$ geldt: de beperking van γ tot $[t_{i-1}, t_i]$ is een herparametrisering van γ_i met dezelfde oriëntatie.

Opmerking 8.1.24 Men kan als volgt inzien dat dat bij een m-tal stuksgewijze C^1-krommen als in de bovenstaande definitie een aaneenschakeling bestaat. Schrijf $\mathrm{dom}(\gamma)_i = [a_i, b_i]$. Voor iedere $1 \le i \le m$ kiezen we een herparametrisering $\sigma_i : [i-1, i] \to \mathrm{R}^n$ van γ_i met dezelfde oriëntatie (zie Voorbeeld 8.1.13). Dan is $\sigma_i(i) = \gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}) = \sigma_{i+1}(i)$ voor alle $1 \le i < m$. Hieruit volgt dat de kromme $\gamma : I = [0, m] \to \mathrm{R}^n$ gedefinieerd door $\gamma = \sigma_i$ op $[i-1, i]$ $(1 \le i \le m)$ continu is. Het is duidelijk dat γ stuksgewijs C^1 is, en tevens een aaneenschakeling van $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ (zie Figuur 15).

Figuur 15: Aaneenschakeling van krommen

Lemma 8.1.25 *Laten $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ stuksgewijze C^1-krommen in R^n zijn, zo dat het eindpunt van γ_i gelijk is aan het beginpunt van γ_{i+1}, voor elke $1 \leq i < m$. Zij γ een aaneenschakeling van $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Dan is* $\mathrm{im}\,(\gamma) = \mathrm{im}\,(\gamma_1) \cup \ldots \cup \mathrm{im}\,(\gamma_m)$. *Voorts geldt voor iedere continue functie* $f : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{R}$ *dat*

$$\int_\gamma f(x)\, d_1x = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} f(x)\, d_1x.$$

Bewijs: Dit is een onmiddellijk gevolg van de definitie gecombineerd met Lemma 8.1.22. □

Tot slot van deze paragraaf zullen we aantonen dat iedere stuksgewijze C^1-kromme een herparametrisering heeft die C^1 is. Dit technische resultaat zal ons in staat stellen integralen over stuksgewijze C^1-krommen te vervangen door integralen over C^1-krommen zonder dat daarbij de waarde verandert. Dit zullen we later op verschillende plaatsen nodig hebben.

Het idee achter de nu volgende redenering is dat een herparametrisering gekozen wordt die de snelheidsvector van de kromme in de 'knik-punten' gelijk aan nul maakt. Het volgende resultaat dient als voorbereiding.

Lemma 8.1.26 *Laten $I = [a_I, b_I]$ en $J = [a_J, b_J]$ gesloten en begrensde intervallen van positieve lengte zijn. Dan is er een oriëntatiebehoudende C^∞-herparametrisering $\varphi : J \to I$ met $\varphi'(a_J) = \varphi'(b_J) = 0$.*

Bewijs: Definieer de afbeelding $\psi : [0,1] \to \mathrm{R}$ door:

$$\psi(t) = t^2(2-t)^2.$$

Dan is ψ een veelterm, dus C^∞. Voorts is $\psi'(t) = 4t(2-t)(1-t) > 0$ voor $0 < t < 1$, dus ψ is strikt monotoon stijgend op $[0,1]$. Nu is $\psi(0) = 0$ en $\psi(1) = 1$, en met de tussenwaardestelling voor continue functies concluderen we dat ψ het interval $[0,1]$ op zichzelf afbeeldt. Voorts is $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$.

Definieer de afbeeldingen $\chi_I : [0,1] \to I$ en $\chi_J : [0,1] \to J$ als in Voorbeeld 8.1.13. Dan is χ_I een strikt monotoon stijgende C^∞-afbeelding van $[0,1]$ op I. Voorts is χ_J^{-1} een strikt monotoon stijgende C^∞ afbeelding van J op $[0,1]$. Men gaat nu gemakkelijk na dat de afbeelding $\varphi = \chi_I \circ \psi \circ \chi_J^{-1}$ aan alle eisen voldoet. □

Stelling 8.1.27 *Laat $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme zijn. Dan is er een oriëntatiebehoudende C^1-herparametrisering $\varphi : [0,1] \to I$ zo dat $\sigma = \gamma \circ \varphi$ een C^1-kromme is.*

Bewijs: Er is een verdeling $(t_i)_{0 \le i \le m}$ van het interval $I = [a_I, b_I]$, zo dat de beperking γ_i van γ tot het i-de deelinterval $I(i) = [t_{i-1}, t_i]$ $(1 \le i \le m)$ een C^1-functie is.

Voor iedere $0 \le i \le m$ schrijven we $s_i = i/m$. Dan is $(s_i)_{0 \le i \le m}$ de verdeling van het interval $[0,1]$ in m deelintervallen van gelijke lengte. Schrijf $J(i) = [s_{i-1}, s_i]$ voor het i-de deelinterval bij deze verdeling. Voor iedere $1 \le i \le m$ bestaat wegens Lemma 8.1.26 een oriëntatiebehoudende C^1-herparametrisering $\varphi_i : J(i) \to I(i)$ met $\varphi_i'(s_{i-1}) = \varphi_i'(s_i) = 0$. We definiëren $\varphi : J \to I$ door $\varphi|_{J(i)} = \varphi_i$; deze definitie is correct aangezien $\varphi_i(s_i) = t_i = \varphi_{i+1}(s_i)$. Het is duidelijk dat φ strikt monotoon stijgend en surjectief is. Uit de continuïteit van iedere φ_i volgt de continuïteit van φ. Uit het C^1 zijn van de φ_i volgt het C^1 zijn van φ, behalve eventueel in de punten $s_1, \dots, s_{m-1}$. Beschouw zo'n punt s_i. Dan heeft φ in s_i een linkerafgeleide gelijk aan

$$\lim_{s \uparrow s_i} \frac{\varphi(s) - \varphi(s_i)}{s - s_i} = \lim_{s \uparrow s_i} \frac{\varphi_i(s) - \varphi_i(s_i)}{s - s_i} = \varphi_i'(s_i) = 0.$$

Om soortgelijke redenen heeft φ in s_i een rechterafgeleide gelijk aan $\varphi_{i+1}'(s_i) = 0$. Uit de gelijkheid van linker- en rechterafgeleide volgt de differentieerbaarheid van φ in s_i. Uit het voorgaande concluderen we dat φ differentieerbaar is op $[0,1]$, terwijl $\varphi' = \varphi_i'$ op $J(i)$. Hieruit volgt de continuïteit van φ'.

We beschouwen nu de continue kromme $\sigma = \gamma \circ \varphi : J \to \mathrm{R}^n$. Zij σ_i de beperking van σ tot het interval $J(i) = [s_{i-1}, s_i]$ $(1 \le i \le m)$. Dan is $\sigma_i = \gamma_i \circ \varphi_i$, dus σ_i is C^1; voor de afgeleide geldt: $\sigma_i'(s) = \gamma_i'(\varphi_i(s))\varphi_i'(s)$, dus $\sigma_i'(i-1) = \sigma_i'(i) = 0$. Dit betekent dat de afgeleiden van de σ_i continu aansluiten; met een soortgelijke redenering als in het bovenstaande (met σ_i in plaats van φ_i) volgt nu dat σ een C^1-kromme is. □

Gevolg 8.1.28 *Zij $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ een m-tal stuksgewijze C^1-krommen in R^n, zo dat het eindpunt van γ_i gelijk is aan het beginpunt van γ_{i+1}, voor elke $1 \le i < m$. Dan bestaat er een C^1-kromme $\gamma : [0,1] \to \mathrm{R}^n$ die een aaneenschakeling is van $\gamma_1, \dots, \gamma_m$.*

Bewijs: Uit de definitie van aaneenschakeling volgt direkt dat een oriëntatiebehoudende herparametrisering van een aaneenschakeling van de γ_i weer een aaneenschakeling van de γ_i is. Als in Opmerking 8.1.24 ziet men dat er een aaneenschakeling σ van $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ bestaat die stuksgewijs C^1 is. Volgens Stelling 8.1.27 heeft σ een herparametrisering $\gamma : [0,1] \to \mathrm{R}^n$ die C^1 is en dezelfde oriëntatie heeft. Die γ is weer een aaneenschakeling. □

8.2 De lengte van de eenheidscirkel

In deze paragraaf bespreken we nog eens de in Analyse 1 gegeven definitie van π. Daarbij zullen we zien dat de definitie in wezen gebaseerd is op de lengte van de eenheidscirkel

$$S = \{x \in \mathrm{R}^2 \mid \quad \|x\| = 1\}.$$

We vergeten even onze kennis van π en de functies cos en sin en starten met het volgende lemma.

Lemma 8.2.1 *Er bestaat precies één C^1-functie $\sigma : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2$ met $\|\sigma(t)\| = \|\sigma'(t)\| = 1$ voor alle $t \in \mathrm{R}$, en met $\sigma(0) = (1, 0)$, $\sigma_2'(0) \geq 0$.*

Opmerking 8.2.2 Het idee achter de bovenstaande condities is dat σ ons een kromme moet leveren die als beeld de eenheidscirkel S heeft, de snelheid waarmee de cirkel doorlopen wordt dient 1 te zijn, de positie op tijdstip 0 moet $(1, 0)$ zijn, en tenslotte dient de eis $\sigma_2'(0) \geq 0$ er voor de richting vast te leggen waarmee $\sigma(t)$ de cirkel doorloopt.

Bewijs: We laten eerst zien dat er ten hoogste één σ is die aan de bovenstaande eisen voldoet. Uit de eis $\|\sigma(t)\| = 1$ volgt $\langle\, \sigma(t), \sigma(t)\,\rangle = 1$, en door differentiëren naar t vinden we dat σ moet voldoen aan: $\langle\, \sigma(t), \sigma'(t)\,\rangle = 0$ $(t \in \mathrm{R})$. Combineren we deze orthogonaliteitseis met $\|\sigma(t)\| = 1$ en $\|\sigma'(t)\| = 1$, dan vinden we dat $\sigma'(t) = \varepsilon(t) J\sigma(t)$, met

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

en met $\varepsilon(t) \in \{-1, 1\}$ voor alle $t \in \mathrm{R}$. Uit de continuïteit van σ en σ' leidt men gemakkelijk af dat ε continu op R moet zijn. Uit de tussenwaardestelling voor continue functies volgt dat ε constant 1 of -1 moet zijn, en uit $\varepsilon(0) = \sigma_2'(0) > 0$ volgt dat deze constante 1 moet zijn.

Er volgt dat $\sigma'(t) = J\sigma(t)$ $(t \in \mathrm{R})$ en dat $\sigma(0) = (1, 0)$. Schrijven we deze vergelijking uit in componenten dan zien we dat de componenten σ_1 en σ_2 moeten voldoen aan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \sigma_1'(t) = \sigma_2(t) \\ \sigma_2'(t) = -\sigma_1(t) \end{cases}$$

met de beginvoorwaarden $\sigma_1(0) = 1$, $\sigma_2(0) = 0$. Dit zijn precies de differentiaalvergelijkingen (7.5.4) uit het Analyse 1 dictaat. Volgens de daar geformuleerde Stelling 7.5.5 heeft dit stelsel met beginvoorwaarden precies één oplossing σ. De goniometrische functies cos en sin worden gedefinieerd als de componenten van de oplossing, namelijk $\cos := \sigma_1$ en $\sin := \sigma_2$; zie Analyse 1, Stellingen 7.5.3 en 7.5.4.

Nu de uniciteit van σ is vastgesteld, laten we zien dat $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ ook aan alle eisen voldoet. Per definitie voldoet $\sigma(t)$ aan de (vectoriële) differentiaalvergelijking $\sigma'(t) = J\sigma(t)$ en aan de beginvoorwaarde $\sigma(0) = (1, 0)$. In het Analyse 1 dictaat wordt met behulp van de definiërende differentiaalvergelijkingen bewezen dat $\cos^2 + \sin^2 = 1$, dus $\|\sigma(t)\| = 1$. Er volgt nu dat $\|\sigma'(t)\| = \|J\sigma(t)\| = \|\sigma(t)\| = 1$, en $\sigma'(0) = J\sigma(0) = (0, 1)$, dus $\sigma_2'(0) \geq 0$. □

Nu bestaan en eenduidigheid van σ zijn aangetoond merken we op dat voor elke $\tau > 0$ de lengte van de beperking σ_τ van σ tot $[0, \tau]$ gelijk is aan:

$$l(\sigma_\tau) = \int_0^\tau \|\sigma'(t)\|\, dt = \int_0^\tau dt = \tau. \tag{8.6}$$

We kunnen nu aantonen:

Lemma 8.2.3 *Er is een uniek getal $p > 0$ zo dat de afbeelding σ het interval $[0, 2p[$ bijectief afbeeldt op S. Hiervoor geldt $\sigma(2p) = \sigma(0) = (1, 0)$.*

Bewijs: In Analyse 1 wordt een getal $p > 0$ gedefinieerd door

$$p = 4 \inf\{t \in [0, \infty[\mid \cos t < 1/\sqrt{2}\}$$

(zie blz. 175 van het Analyse 1 dictaat; daar wordt het getal reeds π genoemd, wij stellen deze naamgeving nog even uit). Vervolgens wordt bewezen dat σ het interval $[0, 2p[$ bijectief afbeeldt naar S (Stelling A.7.5.7). Het getal p wordt uiteraard uniek bepaald door deze laatste eigenschap. Tenslotte wordt in het Analyse 1 dictaat ook bewezen dat $\sigma(t+2p) = \sigma(t)$ voor alle $t \in \mathrm{R}$, dus in het bijzonder $\sigma(2p) = \sigma(0) = (1, 0)$. □

Wegens (8.6) kan $2p$ opgevat worden als de lengte van de eenheidscirkel.

Definitie 8.2.4 We definiëren π als het positieve reële getal p uit Lemma 8.2.3.

8.3 Lijnintegralen van vectorvelden

In deze paragraaf is steeds $I = [a_I, b_I]$ een gesloten en begrensd interval van positieve lengte. Tenzij anders vermeld is $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme.

We brengen in herinnering dat we onder een continu vectorveld op $\mathrm{im}\,(\gamma)$ verstaan: een continue functie $F : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{R}^n$.

Definitie 8.3.1 Zij $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme en F een continu vectorveld op $\mathrm{im}\,(\gamma)$. Dan is de *lijnintegraal van F langs γ* gedefinieerd door

$$\int_\gamma \langle\, F(x)\,,\, d_1x \,\rangle := \int_{a_I}^{b_I} \langle\, F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t) \,\rangle\, dt.$$

Opmerking 8.3.2 (a) Uit het stuksgewijs C^1 zijn van de kromme γ volgt dat de integrand in het rechterlid een begrensde functie is, die continu is op I, behalve eventueel in een eindig aantal punten. De integraal in het rechterlid is gedefinieerd als in Definitie 8.1.21.

(b) Men noteert de bovenstaande integraal ook wel als $\int_\gamma (F_1(x)dx_1 + \cdots + F_n(x)dx_n)$, en spreekt dan van de integraal van de 1-vorm $\sum_i F_i(x)dx_i$ langs γ.

Voorbeeld 8.3.3 Zij $a \in \mathrm{R}^2$, $r \geq 0$. De C^1-kromme $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd door $\gamma(t) = a + r(\cos t, \sin t)$ heeft als beeld de cirkel met middelpunt a en straal r. Zij $L : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ een lineaire afbeelding. Dan wordt door $F(x) = v + Lx$ een C^∞-vectorveld op R^2 gedefinieerd. Een directe berekening leert dat

$$\begin{aligned}\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle &= \langle v + La + rL(\cos t, \sin t), r(-\sin t, \cos t) \rangle \\ &= \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \alpha_3 \sin t \cos t + r^2 L_{21} \cos^2 t - r^2 L_{12} \sin^2 t,\end{aligned}$$

voor zekere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathrm{R}$. Bij integratie over $[0, 2\pi]$ geven de eerste drie termen de bijdrage nul. Hieruit volgt dat:

$$\int_\gamma \langle F(x), d_1x \rangle = r^2 \left(L_{21} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt - L_{12} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt \right) = \pi r^2 (L_{21} - L_{12}).$$

Voorbeeld 8.3.4 We beschouwen het vectorveld F op $\mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$ gedefinieerd door:

$$F(x) = ||x||^{-2}(-x_2, x_1) = ||x||^{-2} Jx,$$

met J als in (8.5). Merk op dat J de matrix is van de rotatie in R^2 over een hoek $\frac{\pi}{2}$ in positieve richting.

We beschouwen de kromme $\sigma : [a, b] \to \mathrm{R}^2$ (met $a < b$) gedefinieerd door $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$. Dan is $\sigma'(t) = (-\sin t, \cos t)$, en $F(\sigma(t)) = (-\sin t, \cos t)$, dus $\langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle = 1$. Het kan ook coördinaatvrij: $\sigma'(t) = J\sigma(t)$, en $F(\sigma(t)) = ||\sigma(t)||^{-2} J\sigma(t) = J\sigma(t)$, dus $\langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle = \langle J\sigma(t), J\sigma(t) \rangle = ||\sigma(t)||^2 = 1$. Uit het voorgaande volgt dat:

$$\int_\sigma \langle F(x) \, , \, d_1x \rangle = \int_a^b dt = (b - a).$$

Zij nu p een punt op de eenheidscirkel, zij $0 < r_1 < r_2$, en zij $\rho : [r_1, r_2] \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd door $\rho(t) = tp$. Dan is $\rho'(t) = p$, en $F(\rho(t)) = ||tp||^{-2} J(tp) = t^{-1} Jp$, dus $\langle F(\rho(t)), \rho'(t) \rangle = 0$. Hieruit volgt dat

$$\int_\rho \langle F(x) \, , \, d_1x \rangle = 0.$$

In tegenstelling tot de integraal van een scalaire functie langs een kromme, behandeld in § 8.1, is de integraal van een *vectorveld* langs een kromme *georiënteerd*:

Lemma 8.3.5 *Zij $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme, en F een continu vectorveld op* $\mathrm{im}\,(\gamma)$. *Is σ een herparametrisering van γ, dan is*

$$\int_\sigma \langle F(x) \, , \, d_1x \rangle = \eta \int_\gamma \langle F(x) \, , \, d_1x \rangle, \qquad \text{met} \qquad \eta = \pm 1. \tag{8.7}$$

Hierbij is $\eta = 1$ als γ en σ dezelfde oriëntatie hebben, en $\eta = -1$ als γ en σ tegengestelde oriëntaties hebben.

Bewijs: Door opdelen van γ in C^1-krommen reduceert men net als in het bewijs van Lemma 8.1.22 tot het geval dat γ een C^1-kromme is.

Het bewijs gaat weer met behulp van de substitutiestelling voor Riemann-integratie over een interval. Zij $J = [a_J, b_J]$ het domein van σ. Er is een C^1-herparametrisering $\varphi : J \to I$ zo dat $\sigma = \gamma \circ \varphi$. Nu geldt:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma \langle F(x)\,,\, d_1x \rangle &= \int_{a_J}^{b_J} \langle F(\sigma(s))\,,\, \sigma'(s) \rangle\, ds \\
&= \int_{a_J}^{b_J} \langle F(\gamma(\varphi(s))\,,\, \varphi'(s)\gamma'(\varphi(s)) \rangle\, ds \\
&= \int_{a_J}^{b_J} \langle F(\gamma(\varphi(s))\,,\, \gamma'(\varphi(s)) \rangle\, \varphi'(s)\, ds \\
&= \int_{\varphi(a_J)}^{\varphi(b_J)} \langle F(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t) \rangle\, dt.
\end{aligned}$$

Hebben σ en γ dezelfde oriëntatie, dan is φ oriëntatiebehoudend, dus monotoon stijgend, dus $\varphi(a_J) = a_I$ en $\varphi(b_J) = b_I$; in dit geval zien we dat formule (8.7) geldt met $\eta = 1$. Hebben daarentegen σ en γ tegengestelde oriëntatie, dan is φ oriëntatie-omkerend, dus monotoon dalend, en we concluderen dat $\varphi(a_J) = b_I$ en $\varphi(b_J) = a_I$. Hieruit volgt (8.7) met $\eta = -1$. □

Gevolg 8.3.6 *Zij $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ een m-tal stuksgewijze C^1-krommen in R^n, zo dat het eindpunt van γ_i samenvalt met het beginpunt van γ_{i+1} $(1 \le i < m)$. Zij voorts γ een aaneenschakeling van $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Dan geldt voor ieder continu vectorveld $F : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{R}^n$ dat:*

$$\int_\gamma \langle F(x)\,,\, d_1x \rangle = \sum_{i=1}^m \int_{\gamma_i} \langle F(x)\,,\, d_1x \rangle.$$

Bewijs: Dit volgt direkt uit Definitie 8.1.23 gecombineerd met het bovenstaande resultaat. □

Opmerking 8.3.7 (Interpretatie als arbeid) In de klassieke mechanica heeft de lijnintegraal van een vectorveld de interpretatie van verrichte arbeid. Daarbij beschrijft $\gamma(t)$ de plaats van een 'puntdeeltje' op het tijdstip t, en F een krachtveld waaraan dat deeltje onderhevig is: $F(\gamma(t))$ is de kracht die door het veld op het puntdeeltje ten tijde t uitgeoefend wordt. De integraal staat in deze interpretatie voor de arbeid die de kracht verricht op het puntdeeltje als dat het traject beschreven door γ aflegt.

Deze interpretatie vindt men ook terug door de volgende beschouwing. Veronderstel dat $\gamma : I \to \mathrm{R}^n$ een C^1-kromme is en definieer de functie $A : I \to \mathrm{R}$ door

$$A(t) := \int_{\gamma|_{[a_I,t]}} \langle F(x)\,,\, d_1x \rangle = \int_{a_I}^t \langle F(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau) \rangle\, d\tau.$$

Dan volgt met de hoofdstelling van de integraalrekening dat $A'(t) = \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$. Zij $s : I \to \mathrm{R}$ de lengtefunctie gedefinieerd als in Opmerking 8.1.2. Dan is $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Voor $t_0 \in I$ met

$\gamma'(t_0) \neq 0$ geldt derhalve dat:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0} \frac{A(t) - A(t_0)}{s(t) - s(t_0)} &= \lim_{t \to t_0} \frac{A(t) - A(t_0)}{t - t_0} \frac{t - t_0}{s(t) - s(t_0)} \\
&= \|\gamma'(t_0)\|^{-1} \langle\, F(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \,\rangle = \langle\, F(\gamma(t_0)), e(t_0) \,\rangle,
\end{aligned}$$

met $e(t_0) = \|\gamma'(t_0)\|^{-1}\, \gamma'(t_0)$ de eenheidsvector in de richting van de snelheidsvector $\gamma'(t_0)$. De bovenstaande formule kunnen we dus interpreteren als: de toename van A per lengte is gelijk aan de (orthogonale) component van de kracht in de bewegingsrichting. Hieruit volgt de interpretatie van $A(t)$ als door F verrichte arbeid bij de verplaatsing beschreven door $\gamma|_{[a_I, t]}$.

Het volgende resultaat kan men opvatten als een generalisatie van de hoofdstelling van de integraalrekening.

Lemma 8.3.8 *Zij $U \subset \mathrm{R}^n$ open, en $f : U \to \mathrm{R}$ een C^1-functie. Dan geldt voor iedere stuksgewijze C^1-kromme $\gamma : I = [a_I, b_I] \to \mathrm{R}^n$ met* $\mathrm{im}\,(\gamma) \subset U$ *dat:*

$$\int_\gamma \langle\, \mathrm{grad}\, f(x)\,,\, d_1 x \,\rangle = f(\gamma(b_I)) - f(\gamma(a_I)).$$

Bewijs: Volgens Stelling 8.1.27 en Lemma 8.3.5 kan men de kromme γ vervangen door een herparametrisering die C^1 is, zonder dat daarbij de waarde van de integraal verandert. Daarom is het voldoende het lemma te bewijzen onder de veronderstelling dat γ een C^1-kromme is.

We beschouwen de functie $\varphi : I \to \mathrm{R}^n$ gedefinieerd door

$$\varphi(t) = f(\gamma(t)).$$

Met de kettingregel voor het differentiëren van een functie langs een kromme zien we dat:

$$\varphi'(t) = \langle\, \mathrm{grad}\, f(\gamma(t)), \gamma'(t) \,\rangle$$

voor alle $t \in I$. De afgeleide φ' is continu, en met de hoofdstelling van de integraalrekening zien we dat:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \langle\, \mathrm{grad}\, f(x)\,,\, d_1 x \,\rangle &= \int_{a_I}^{b_I} \langle\, \mathrm{grad}\, f(\gamma(t)), \gamma'(t) \,\rangle\, dt \\
&= \int_{a_I}^{b_I} \varphi'(t)\, dt = \varphi(b_I) - \varphi(a_I) = f(\gamma(b_I)) - f(\gamma(a_I)).
\end{aligned}$$

□

Opmerking 8.3.9 (a) Merk op dat de integraal van een gradiëntvectorveld langs een kromme alleen afhangt van het begin- en het eindpunt van die kromme.

(b) In de interpretatie van de klassieke mechanica wordt een functie f met $\mathrm{grad}\, f = -F$ geïnterpreteerd als potentiële energie. De bovenstaande formule betekent dan dat de door F verrichte arbeid langs een kromme van a naar b overeenkomt met de afname $f(a) - f(b)$ van de potentiële energie.

Definitie 8.3.10 Zij $U \subset \mathrm{R}^n$ een open deel, en F een continu vectorveld op U. Onder een *primitieve*, (of scalaire potentiaal, integraal) van F verstaan we een partieel differentieerbare functie $f : U \to \mathrm{R}$ met $\operatorname{grad} f = F$.

Opmerking 8.3.11 Uit de continuïteit van F volgt automatisch dat een scalaire primitieve f van F continue partiële afgeleiden heeft, dus C^1 is.

In het vervolg zullen we ons bezighouden met de vraag of een gegeven vectorveld een primitieve bezit. Eerst onderzoeken we de vraag hoeveel scalaire potentialen een vectorveld kan bezitten.

Laat F een continu vectorveld op de open verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$ zijn, en zij f een primitieve van F. Dan is $\operatorname{grad} f = F$. Is $\tilde{f}$ een tweede primitieve van F dan voldoet de verschilfunctie $g = f - \tilde{f}$ aan $\operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f - \operatorname{grad} \tilde{f} = F - F = 0$.

Lemma 8.3.12 *Zij $U \subset \mathrm{R}^n$ open en $g : U \to \mathrm{R}$ een partieel differentieerbare functie met $\operatorname{grad} g = 0$ op U. Dan is de functie g lokaal constant op U; d.w.z. voor iedere $a \in U$ bestaat er een open omgeving V van a zo dat g constant is op V.*

Bewijs: Zij $a \in U$. Dan is a een inwendig punt van U, dus er bestaat een $\varepsilon > 0$ zo dat de omgeving $V = V(a;\varepsilon) = \mathrm{X}_{j=1}^{n}]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[$ tot U behoort. Uit het nul zijn van de partiële afgeleiden van g volgt, voor iedere $b \in V$ en iedere $1 \leq j \leq n$, dat de functie $g_b :]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[\to \mathrm{R}$ gedefinieerd door

$$g_b(t) = g(b_1, \ldots, b_{j-1}, t, b_{j+1} \ldots b_n)$$

afgeleide nul heeft, dus constant is. Dus $g_b(t) = g_b(b_j) = g(b)$ voor alle $t \in]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[$. Door herhaald toepassen van deze observatie ziet men achtereenvolgens voor $j = 1, \ldots, n$ dat $g = g(a)$ op

$$]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[\times \{a_{j+1}\} \times \cdots \times \{a_n\}.$$

Voor $j = n$ is de bovenstaande verzameling gelijk aan V. □

Voorbeeld 8.3.13 (Lokaal constant maar niet constant) Zij U de vereniging van de open schijven $U_0 = B((-2,0);1)$ en $U_1 = B((2,0);1)$ in R^2. Dan is de functie $g : U \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $g = 0$ op U_0 en door $g = 1$ op U_1 lokaal constant maar niet constant.

Uit het bovenstaande voorbeeld blijkt dat een lokaal constante functie $g : U \to \mathrm{R}^n$ niet constant hoeft te zijn. Dit is mogelijk wegens het gebrek aan 'samenhang' van de open verzameling U. Het begrip samenhang wordt vastgelegd in de volgende definitie.

Definitie 8.3.14 Een open verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$ heet *samenhangend* als er geen niet-lege open deelverzamelingen U_0 en U_1 van R^n bestaan zo dat: $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ en $U_0 \cup U_1 = U$.

Lemma 8.3.15 *Laat $U \subset \mathrm{R}^n$ een samenhangende niet-lege open deelverzameling zijn. Dan is iedere lokaal constante functie $g : U \to \mathrm{R}$ constant op U.*

Bewijs: Zij $c \in g(U)$, en zij $U_0 \subset U$ de niveauverzameling van g bij het niveau c. Is $a \in U_0$, dan is er een open omgeving V van a in U zo dat g constant is op V; dus $g = g(a) = c$ op V en we zien dat $V \subset U_0$. Ieder punt van U_0 is derhalve inwendig en we concluderen dat U_0 een open deel van R^n is.

Anderzijds is $U_1 := U \setminus U_0 = \{x \in U \mid g(x) \neq c\} = \{x \in U \mid g(x) \in \mathrm{R} \setminus \{c\}\ \} = g^{-1}(\mathrm{R} \setminus \{c\})$. De verzameling $\mathrm{R} \setminus \{c\}$ is open in R (Lemma's 1.5.5 en 1.5.7) dus $U_1 = g^{-1}(\mathrm{R} \setminus \{c\})$ is open in R^n (Lemma 1.5.14). Nu is $U_0 \neq \emptyset$, $U_0 \cup U_1 = U$ en $U_0 \cap U_1 = \emptyset$. Omdat U samenhangend is moet gelden $U_1 = \emptyset$, dus $U = U_0$. Hieruit volgt dat $g = g(c)$ op U. □

Gevolg 8.3.16 *Laat U een open samenhangende deelverzameling van R^n zijn. Zij F een continu vectorveld op U en $f : U \to \mathrm{R}$ een primitieve van F. Dan geldt voor iedere primitieve $\tilde{f}$ van F op U dat $\tilde{f} = f + c$ met $c \in \mathrm{R}$. Omgekeerd is iedere functie van de vorm $\tilde{f} = f + c$ met $c \in \mathrm{R}$ een primitieve van F.*

Bewijs: Is $\tilde{f}$ een primitieve van F, dan voldoet de functie $g = f - \tilde{f}$ aan $\operatorname{grad} g = 0$, dus g is lokaal constant wegens Lemma 8.3.12. Met behulp van Lemma 8.3.15 blijkt nu dat g constant is, dus $\tilde{f} = f + c$ voor een $c \in \mathrm{R}$. Het omgekeerde is evident. □

We eindigen deze paragraaf met enige karakteriseringen van het begrip samenhang die in het vervolg nuttig zullen blijken.

Lemma 8.3.17 *Ieder open interval in* R *is samenhangend.*

Bewijs: Zij $I \subset \mathrm{R}$ een open interval. Laten U_0 en U_1 open deelverzamelingen van R zijn met $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ en $U_0 \cup U_1 = I$. We zullen aantonen dat de veronderstelling $U_0 \neq \emptyset, U_1 \neq \emptyset$ tot een tegenspraak leidt. Kies $a \in U_0$, $b \in U_1$. Door verwisseling van de namen van U_0 en U_1 kunnen we altijd bereiken dat $a < b$. Uit $a, b \in I$ volgt dat het interval $[a, b]$ in I ligt. Ieder punt van $[a, b]$ behoort derhalve of tot U_0, of tot U_1. Zij S de verzameling van $x \in [a, b]$ met $[a, x] \subset U_0$. Dan is $a \in S$, dus S is niet-leeg en naar boven begrensd door b. Zij s het supremum van S. Dan is $s \leq b$.

Veronderstel dat $s \in U_1$. Omdat U_1 open is, is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\in U_1$. In het bijzonder is $s - \frac{1}{2}\varepsilon \notin U_0$, dus voor elke $x \geq s - \frac{1}{2}\varepsilon$ geldt dat $x \notin S$, in tegenspraak met het feit dat s de kleinste bovengrens van S is. De aanname $s \in U_1$ leidt tot een tegenspraak, dus $s \in U_0$. In het bijzonder is $s \neq b$, dus $s < b$.

De verzameling U_0 is open, dus er bestaat een $\varepsilon > 0$ met $\varepsilon < b - s$ zo dat $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subset U_0$. Uit $s = \sup S$ volgt dat $S \cap]s - \varepsilon, s]$ een element x bevat. Nu geldt $[a, x] \subset U_0$ en $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\subset U_0$, en U_0 omvat derhalve de vereniging van de beide intervallen; die vereniging is gelijk aan $[a, s + \varepsilon[$, dus $s + \varepsilon/2 \in S$, in tegenspraak met het feit dat s een bovengrens voor S is. Hiermee is de gewenste tegenspraak bereikt. □

Stelling 8.3.18 *Laat U een open niet-lege deelverzameling van R^n zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *U is samenhangend;*

(b) *voor ieder tweetal punten $p, q \in U$ bestaat een C^1-kromme γ in U (d.w.z.* $\mathrm{im}(\gamma) \subset U$*) met beginpunt p en eindpunt q;*

(c) *voor ieder tweetal punten $p, q \in U$ bestaat een continue kromme in U met beginpunt p en eindpunt q.*

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Laat U samenhangend zijn. Kies $p \in U$, en zij U_0 de verzameling van alle $q \in U$ waarvoor een C^1-kromme γ in U bestaat met beginpunt p en eindpunt q. Zij U_1 het complement van U_0 in U.

We tonen eerst aan dat U_0 een open verzameling is. Zij $q_0 \in U_0$; dan tonen we aan dat q_0 een inwendig punt van U_0 is. Er is een C^1-kromme $\gamma_1 : I_1 \to \mathrm{R}$ met beginpunt p en eindpunt q_0. De verzameling U is open, dus er bestaat een $\varepsilon > 0$ zo dat de bolomgeving $B(q_0; \varepsilon)$ in U ligt; we gaan aantonen dat $B(q_0; \varepsilon) \subset U_0$. Zij daartoe $q \in B(q_0; \varepsilon)$. Dan is er een C^1-kromme $\gamma_2 : I_2 \to B(q_0; \varepsilon)$ met beginpunt q_0 en eindpunt q (men kan bijvoorbeeld een parametrisering van het lijnstuk van q_0 naar q nemen). Wegens Gevolg 8.1.28 hebben de krommen γ_1 en γ_2 een aaneenschakeling die C^1 is. Deze aaneenschakeling heeft beginpunt p en eindpunt q. Hieruit blijkt dat $q \in U_0$. Nu is aangetoond dat $B(q_0; \varepsilon) \subset U_0$, dus q_0 is een inwendig punt van U_0, en we zien dat U_0 open is.

Vervolgens tonen we aan dat U_1 open is. Zij daartoe $q_0 \in U_1$. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(q_0; \varepsilon) \subset U$. We tonen aan dat $B(q_0; \varepsilon) \subset U_1$. Zij $q \in B(q_0; \varepsilon)$. Dan bestaat er een C^1-kromme in $B(q_0; \varepsilon)$ met beginpunt q en eindpunt q_0. Uit $q \in U_0$ zou met een redenering als boven volgen dat er een C^1-kromme bestaat van p via q naar q_0, in tegenspraak met het gegeven dat $q_0 \notin U_0$. Dus ook $q \notin U_0$, en we concluderen dat $B(q_0; \varepsilon) \subset U_1$. De verzameling U_1 is dus open.

Nu is aangetoond dat U_0 en U_1 disjuncte open deelverzamelingen van R^n zijn met vereniging U. Uit $p \in U_0$ volgt $U_0 \neq \emptyset$. Wegens de samenhang van U volgt nu dat $U_1 = \emptyset$, dus $U = U_0$.

'(b) $\Rightarrow$ (c)': Dit is duidelijk; iedere C^1-kromme is continu.

'(c) $\Rightarrow$ (a)': Veronderstel dat (c) geldt. Laat U_0, U_1 een tweetal open deelverzamelingen van R^n zijn, met $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ en $U_0 \cup U_1 = U$. Neem aan dat U_0 en U_1 beide niet leeg zijn; het is voldoende aan te tonen dat deze aanname tot een tegenspraak leidt. Kies $p \in U_0$ en $q \in U_1$. Dan is er een continue kromme γ in U met beginpunt p en eindpunt q. Zij $I = [a, b]$ het domein van γ. Dan zijn de verzamelingen $V_j = \gamma^{-1}(U_j) \cap]a, b[$ $(j = 1, 2)$ open deelverzamelingen van R wegens Lemma 1.5.14. Voorts zijn V_0 en V_1 disjunct en is hun vereniging het interval $]a, b[$ op grond van de overeenkomstige eigenschappen van U_0 en U_1. We zullen aantonen dat beide verzamelingen niet leeg zijn; daarmee is dan een tegenspraak met de samenhang van $]a, b[$ bereikt (zie Lemma 8.3.17). De verzameling U_0 is open, dus er bestaat een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(p; \varepsilon) \subset U_0$. Nu is $p = \gamma(a)$, en uit de continuïteit van γ volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat $\gamma([a, a + \delta[) \subset B(p, \varepsilon)$, dus ook $\gamma([a, a + \delta[) \subset U_0$. Hieruit blijkt dat $]a, a + \delta[\subset V_0$. Dus V_0 is niet leeg. Met een soortgelijke argumentatie volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat $]b - \delta, b[\subset V_1$, dus ook V_1 is niet leeg. Hiermee is de tegenspraak bereikt. $\square$

Opmerking 8.3.19 (a) Met behulp van karakterisering (c) uit de bovenstaande stelling leidt men direct af dat iedere open bol in R^n samenhangend is.

(b) Men kan het begrip samenhang als volgt generaliseren naar een willekeurige deelverzameling A van R^n. Is $a \in A$, $r > 0$ dan schrijven we $B_A(a; r) = B(a; r) \cap A$. Zij $U \subset A$. Een punt

$a \in U$ heet *inwendig ten aanzien van* A als er een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $B_A(a;\varepsilon) \subset A$. De verzameling U heet *open in* A als ieder punt van U inwendig is ten aanzien van A. De verzameling A heet nu samenhangend als er geen tweetal niet-lege verzamelingen $U_0, U_1 \subset A$ bestaat, met U_0, U_1 open in A, $U_0 \cap U_1 = \emptyset$ en $U_0 \cup U_1 = A$.

De verzameling A heet *boogsamenhangend* als er voor elk tweetal punten $p, q \in A$ een continue kromme γ bestaat met $\mathrm{im}\,(\gamma) \subset A$ en met beginpunt p en eindpunt q.

De equivalentie van condities (a) en (c) uit de bovenstaande stelling kan men nu samenvatten als: een open deelverzameling van R^n is samenhangend dan en slechts dan als hij boogsamenhangend is. Hierbij is het open zijn van de deelverzameling een essentiële voorwaarde. In het algemeen geldt dat een boogsamenhangende deelverzameling van R^n samenhangend is; daarentegen hoeft een samenhangende verzameling niet boogsamenhangend te zijn.

8.4 Primitiveren van een vectorveld

In deze paragraaf veronderstellen we dat F een C^1-vectorveld is op een open samenhangende verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$. We onderzoeken onder welke condities het vectorveld F een primitieve op U bezit. Daartoe moet het vectorveld in ieder geval aan *integreerbaarheidscondities* voldoen. We gebruiken steeds de notatie D_j voor de partiële afgeleide naar de j-de variabele.

Lemma 8.4.1 (Integreerbaarheidscondities) *Zij* $U \subset \mathrm{R}^n$ *open, en* F *een* C^1*-vectorveld op* U*. Heeft* F *een primitieve op* U*, dan moet gelden:*

$$D_iF_j - D_jF_i = 0 \tag{8.8}$$

voor alle $1 \leq i, j \leq n$.

Bewijs: Laat f een primitieve van F zijn. Dan is f een C^1-functie op U, en er geldt dat $\mathrm{grad}\, f = F$ op U, ofwel $D_jf = F_j$ $(1 \leq j \leq n)$. De partiële afgeleiden D_jf zijn dus C^1, en we zien dat f een C^2-functie op U is. Wegens Stelling 2.5.4 volgt dat $D_iD_jf = D_jD_if$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Dit is precies (8.8). □

Een natuurlijke vraag is of de noodzakelijke condities (8.8) ook voldoende zijn voor het bestaan van een primitieve. Veronderstel dat U samenhangend is, en fixeer een punt $x^0 \in U$. Heeft F een primitieve, dan is er wegens Gevolg 8.3.16 een unieke primitieve f met $f(x^0) = 0$. Wegens Lemma 8.3.8 moet die primitieve in een punt $x \in U$ gegeven worden door de formule

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \langle\, F(y)\ ,\ d_1y \,\rangle, \tag{8.9}$$

met γ_x een C^1-kromme met beginpunt x^0 en eindpunt x. In het vervolg zullen we het volgende idee verder uitwerken: we starten met een vectorveld F op U dat voldoet aan de integreerbaarheidscondities (8.8). Vervolgens proberen we een functie f op U te definiëren met behulp van de formule (8.9). Tenslotte proberen we dan aan te tonen dat f inderdaad een potentiaal van F is. Het fundamentele probleem bij deze aanpak is dat een x^0 en x verbindende C^1-kromme weliswaar bestaat wegens Stelling 8.3.18, maar geenszins uniek is. Het rechterlid van (8.9) zou voor verschillende γ_x in principe verschillend kunnen zijn, en kan dan niet meer gebruikt worden als definitie van $f(x)$. Dat dit verschijnsel zich inderdaad voor kan doen blijkt uit het onderstaande voorbeeld.

Voorbeeld 8.4.2 Zij F het vectorveld op $U = \mathrm{R}^2 \setminus \{0\}$ gedefinieerd door $F(x) = \|x\|^{-2}Jx$, als in Voorbeeld 8.3.4. Dan is F willekeurig vaak differentieerbaar. Een directe berekening leert dat:

$$D_1F_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\|x\|^4},$$

en dat $D_2F_1(x) = \|x\|^{-4}(x_2^2 - x_1^2)$, dus F voldoet aan de integreerbaarheidsconditie. Zij nu $x^0 = (1, 0)$, en $x = x^0$. Kiezen we voor γ_x de constante kromme $[0, 1] \to \mathrm{R}^2$, $t \mapsto x^0$, dan is $\gamma_x' = 0$, dus de integraal van F langs γ_x is nul. Kiezen we voor γ_x daarentegen de kromme $[0, 2\pi] \to \mathrm{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, dan volgt met de berekening van Voorbeeld 8.3.4 dat

$$\int_{\gamma_x} \langle\, F(y)\,,\, d_1y\,\rangle = 2\pi.$$

De uitkomst van de integraal is in dit geval dus afhankelijk van de keuze van de kromme γ_x.

In het bijzonder kan F op $\mathrm{R}^2\setminus\{0\}$ geen primitieve hebben. Want in dat geval zou de integraal onafhankelijk zijn van de keuze van γ_x, wegens Lemma 8.3.8.

Voorbeeld 8.4.3 We beschouwen weer het vectorveld F uit het bovenstaande voorbeeld, maar dit keer op het bovenhalfvlak $U = \{x \in \mathrm{R}^2 \mid x_2 > 0\}$. Dan ziet men door een directe berekening in dat door

$$f(x) = -\arctan(\frac{x_1}{x_2})$$

een primitieve van F op U gedefinieerd wordt.

Uit de bovenstaande voorbeelden blijkt dat het al of niet bestaan van een primitieve van F op U afhangt van de structuur van de verzameling U. We komen hier in de volgende paragraaf op terug.

Eerst beschouwen we open verzamelingen van een speciaal type.

Definitie 8.4.4 (Stervormige verzameling) Een verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$ heet *stervormig* als er een punt $x^0 \in U$ bestaat, zo dat voor alle $x \in U$ het lijnstuk $L(x^0, x)$ met beginpunt x^0 en eindpunt x geheel in U ligt.

Voorbeeld 8.4.5 Een open bol in R^n is stervormig. Voor x^0 kan men ieder punt van de bol nemen.

Voorbeeld 8.4.6 Zij L de gesloten halfrechte $]-\infty, 0] \times \{0\}$ in R^2. Dan is het complement $U = \mathrm{R}^2 \setminus L$ open in R^2. Zij $x^0 = (1, 0)$. Dan ligt het lijnstuk $L(x^0, x)$ in U voor iedere $x \in U$. De verzameling U is derhalve stervormig.

Opmerking 8.4.7 Met behulp van Stelling 8.3.18 leidt men gemakkelijk af dat een open stervormige verzameling samenhangend is.

Lemma 8.4.8 **(Poincaré)** *Laat $U \subset \mathrm{R}^n$ een open stervormige verzameling zijn. Is F een C^1-vectorveld op U dat voldoet aan de integreerbaarheidscondities (8.8), dan heeft F een primitieve op U.*

Bewijs: Zij x^0 een punt van U als in de definitie van stervormigheid. Voor iedere $x \in U$ definiëren we de kromme $\gamma_x : I = [0,1] \to \mathrm{R}^n$ door $\gamma_x(t) = x^0 + t(x - x^0)$. Het beeld van deze kromme is het lijnstuk $L(x^0, x)$ dat in U ligt. We definiëren de functie $f : U \to \mathrm{R}$ door

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \langle\, F(y)\,,\, d_1 y \,\rangle$$

en zullen aantonen dat deze functie een primitieve van F definieert. Er geldt dat $\gamma_x'(t) = x - x^0$. De bovenstaande lijnintegraal kan derhalve herschreven worden als:

$$f(x) = \int_0^1 \langle\, F(\gamma_x(t)), x - x^0 \,\rangle\; dt = \int_0^1 \varphi(x,t)\; dt,$$

met

$$\varphi(x,t) = \langle\, F(\gamma_x(t)), x - x^0 \,\rangle = \sum_{i=1}^n F_i(\gamma_x(t))(x_i - x_i^0). \tag{8.10}$$

De functie $(x,t) \mapsto \gamma_x(t) = x^0 + t(x - x^0)$ is C^∞ op $U \times I$. Hieruit leidt men gemakkelijk af dat φ een C^1-functie op $U \times [0,1]$ is. Met behulp van Gevolg 5.2.4 blijkt dat f een C^1-functie is. De partiële afgeleide naar de j-de variabele wordt gegeven door differentiatie onder het integraalteken:

$$D_j f(x) = \int_0^1 D_j \varphi(x,t)\; dt \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Nu is $F_i(\gamma_x(t)) = F_i(x^0 + t(x - x^0))$, dus

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\gamma_x(t)) = t D_j F_i(\gamma_x(t)) = t D_i F_j(\gamma_x(t)).$$

(De laatste identiteit berust op de integreerbaarheidscondities.) Partieel differentiëren (naar x_j) van het rechterlid van (8.10) levert daarom, na toepassing van de produktregel, dat:

$$\begin{aligned} D_j \varphi(x,t) &= \sum_{i=1}^n [\, t D_i F_j(\gamma_x(t))(x_i - x_i^0) + F_i(\gamma_x(t)) \delta_{ij} \,] \\ &= t \sum_{i=1}^n D_i F_j(\gamma_x(t))(x_i - x_i^0) + F_j(\gamma_x(t)). \end{aligned}$$

Nu is

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n D_i F_j(\gamma_x(t))(x_i - x_i^0) &= \langle\, \operatorname{grad} F_j(\gamma_x(t)), x - x^0 \,\rangle \\ &= \langle\, \operatorname{grad} F_j(\gamma_x(t)), \gamma_x'(t) \,\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} F_j(\gamma_x(t)), \end{aligned}$$

wegens de kettingregel voor differentiëren langs een kromme. Er volgt:

$$\begin{aligned} D_j\varphi(x,t) &= t\frac{\partial}{\partial t}F_j(\gamma_x(t)) + F_j(\gamma_x(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[tF_j(\gamma_x(t))]. \end{aligned}$$

Met de hoofdstelling van de integraalrekening volgt derhalve:

$$D_jf(x) = \int_0^1 D_j\varphi(x,t)\,dt = tF_j(\gamma_x(t))|_{t=0}^{t=1} = F_j(x).$$

Dus $\operatorname{grad} f = F$. □

Voorbeeld 8.4.9 Zij F het vectorveld uit de Voorbeelden 8.3.4 en 8.4.2. Zij L de halfrechte $]-\infty,0]\times\{0\}$ in R^2. In Voorbeeld 8.4.6 zagen we dat het complement $U = \mathrm{R}^2\setminus L$ een stervormige open verzameling is. Met behulp van het bovenstaande resultaat volgt nu dat F op U een primitieve f heeft. De primitieve wordt uniek vastgelegd door de eis dat $f(1,0) = 0$.

Uit het bestaan van de primitieve volgt met Lemma 8.3.8 dat we $f(x)$ kunnen vinden als de integraal van F langs een *willekeurige* in U gelegen kromme van $(1,0)$ naar x. In het bijzonder kunnen we een aaneenschakeling nemen van het deel van de eenheidscirkel tussen $(1,0)$ en $\|x\|^{-1}x$ en het lijnstuk van $\|x\|^{-1}x$ naar x. Met behulp van de berekeningen in Voorbeeld 8.3.4 ziet men in dat deze integraal als waarde de hoekcoördinaat van $\|x\|^{-1}x$ heeft, d.w.z. de unieke $\alpha(x) \in]-\pi,\pi[$ waarvoor $x = \|x\|(\cos\alpha(x), \sin\alpha(x))$. De primitieve wordt dus gegeven door $f(x) = \alpha(x)$.

We kunnen de primitieve f ook bepalen door de differentiaalvergelijking $\operatorname{grad} f = F$ op te lossen. Dit gaat als volgt. Uitschrijven in componenten levert het stelsel:

$$\begin{aligned} D_1f(x) &= \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}, \\ D_2f(x) &= \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Primitiveren van de eerste vergelijking naar de variabele x_1 geeft, als $x_2 > 0$, dat

$$f(x) = -\arctan(x_1/x_2) + C(x_2), \tag{8.12}$$

met een integratieconstante die nog van x_2 afhangt. We weten dat f een C^2-functie is, dus C is tweemaal continu differentieerbaar op $]0,\infty[$. Invullen van (8.12) in de differentiaalvergelijking (8.11) levert $C'(x_2) = 0$, dus C is constant. Door $x_1 = 1$ in (8.12) te substitueren en vervolgens de limiet te nemen voor $x_2 \downarrow 0$ vinden we dat $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, dus $C = \frac{\pi}{2}$. Dus

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x_1/x_2) \qquad (x_2 > 0).$$

Ga na dat men op analoge wijze formules voor f op de verzameling $x_2 < 0$ en op de verzameling $x_1 > 0$ kan vinden. De vereniging van deze drie open verzamelingen is precies $U = \mathrm{R}^2 \setminus L$.

8.5 Het bestaan van een primitieve

In deze paragraaf bestuderen we de afhankelijkheid van de integraal in het rechterlid van (8.9) van de keuze van γ_x.

De hieronder volgende stelling zal daarbij een fundamentele rol spelen. Tevens zal de later te behandelen Stelling van Stokes er een direct gevolg van zijn.

We beginnen met enige definities die straks van pas zullen komen.

Definitie 8.5.1 Laat F een differentieerbaar vectorveld zijn op een open verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$. Dan definiëren we voor iedere $x \in U$ de matrix $AF(x)$ door $AF(x) = DF(x) - DF(x)^t$, dus:

$$AF(x)_{ij} = D_j F_i(x) - D_i F_j(x) \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

Opmerking 8.5.2 De integreerbaarheidscondities (8.8) kunnen met behulp van de matrix AF korter geformuleerd worden als:

$$AF(x) = 0 \qquad (x \in U).$$

In het vervolg zal de volgende terminologie van pas komen.

Definitie 8.5.3 Zij $\gamma : [a, b] \to \mathrm{R}^n$ een stuksgewijze C^1-kromme. Dan definiëren we de *omkering* van γ als de stuksgewijze C^1-kromme $\gamma^\vee : [a, b] \to \mathrm{R}^n$ gegeven door:

$$\gamma^\vee(t) = \gamma(b - (t - a)).$$

Opmerking 8.5.4 De kromme $\gamma^\vee$ is een herparametrisering van γ met tegengestelde oriëntatie, zie ook Voorbeeld 8.1.15. Voor ieder continu vectorveld F op $\mathrm{im}\,(\gamma)$ geldt derhalve dat:

$$\int_{\gamma^\vee} \langle\, F(x)\,,\, d_1 x\,\rangle = - \int_{\gamma} \langle\, F(x)\,,\, d_1 x\,\rangle$$

In het vervolg beschouwen we voornamelijk integralen over C^1-krommen met domein $[0, 1]$. Dit is geen wezenlijke beperking omdat elke lijnintegraal door middel van herparametrisering als een dergelijke integraal herschreven kan worden; zie Stelling 8.1.27 en Lemma 8.3.5.

Definitie 8.5.5 Zij $I = [0, 1]$, zij $\Gamma : I^2 \to \mathrm{R}^n$ een C^1-afbeelding, en zij F een continu vectorveld op $\Gamma(\partial I^2)$. Dan definiëren we:

$$\int_{\partial\Gamma} \langle\, F(x)\,,\, d_1 x\,\rangle := \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial_i \Gamma} \langle\, F(x)\,,\, d_1\, x\,\rangle, \tag{8.13}$$

met $\partial_1\Gamma, \ldots, \partial_4\Gamma$ de C^1-krommen $I \to \mathrm{R}^n$, gedefinieerd door:

$$\partial_1\Gamma(x_1) = \Gamma(x_1, 0), \quad \partial_2\Gamma(x_2) = \Gamma(1, x_2), \quad \partial_3\Gamma(x_1) = \Gamma(1 - x_1, 1), \quad \partial_4\Gamma(x_2) = \Gamma(0, 1 - x_2).$$

Figuur 16: De krommen $\partial_j\Gamma$

Opmerking 8.5.6 (a) Zij $\partial_*\Gamma$ een stuksgewijze C^1-kromme, verkregen door aaneenschakeling van $\partial_1\Gamma, \ldots, \partial_4\Gamma$, zie Figuur 16. Dan is de integraal (8.13) gelijk aan de integraal van het vectorveld F langs de kromme $\partial_*\Gamma$.

(b) Wegens Opmerking 8.5.4 kan de integraal 8.13) als volgt herschreven worden:

$$\int_{\partial\Gamma} \langle\, F(x) \,,\, d_1x \,\rangle = \sum_{i=1,2} \int_{\partial_i\Gamma} \langle\, F(x) \,,\, d_1x \,\rangle - \sum_{i=3,4} \int_{\partial_i\Gamma^\vee} \langle\, F(x) \,,\, d_1x \,\rangle. \tag{8.14}$$

Er geldt dat $\partial_3\Gamma^\vee(x_1) = \Gamma(x_1, 1)$ en $\partial_4\Gamma^\vee(x_2) = \Gamma(0, x_2)$. Derhalve is:

$$\begin{array}{rclcrcl} (\partial_1\Gamma)'(x_1) & = & D_1\Gamma(x_1, 0), & & (\partial_2\Gamma)'(x_2) & = & D_2\Gamma(1, x_2), \\ (\partial_3\Gamma^\vee)'(x_1) & = & D_1\Gamma(x_1, 1), & & (\partial_4\Gamma^\vee)'(x_2) & = & D_2\Gamma(0, x_2). \end{array}$$

Met behulp van Definitie 8.3.1 kunnen we de som van de integralen in het rechterlid van (8.14) daarom herschrijven als:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle\, F \circ \Gamma \,,\, D_1\Gamma \,\rangle\, (x_1, 0)\, dx_1 + \int_0^1 \langle\, F \circ \Gamma \,,\, D_2\Gamma \,\rangle\, (1, x_2)\, dx_2 \\ &\qquad - \int_0^1 \langle\, F \circ \Gamma \,,\, D_1\Gamma \,\rangle\, (x_1, 1)\, dx_1 - \int_0^1 \langle\, F \circ \Gamma \,,\, D_2\Gamma \,\rangle\, (0, x_2)\, dx_2. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Na deze definities volgt de beloofde stelling, die in het vervolg een sleutelrol zal vervullen.

Stelling 8.5.7 *Zij $I = [0,1]$, zij $U \subset \mathrm{R}^n$ open en zij $\Gamma : I^2 \to U$ een C^1-afbeelding zo dat ook de gemengde tweede orde partiële afgeleiden $D_2D_1\Gamma$ en $D_1D_2\Gamma$ bestaan en continu zijn. Dan geldt voor ieder C^1-vectorveld F op U dat:*

$$\int_{\partial\Gamma} \langle\, F(x)\,,\ d_1x\,\rangle = \int_{I^2} \langle\,(AF)(\Gamma(y))\,D_1\Gamma(y), D_2\Gamma(y)\,\rangle\,dy.$$

In het vervolg zullen we de integraal in het rechterlid van de bovenstaande vergelijking ook korter noteren als:

$$\int_{I^2} \langle\,(AF)\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle(y)\,dy.$$

Bewijs: Met behulp van de produktregel voor differentiëren naar de eerste variabele vinden we dat op I^2 geldt: $D_1\langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle = \langle\, D_1(F\circ\Gamma), D_2\Gamma\,\rangle + \langle\, F\circ\Gamma, D_1D_2\Gamma\,\rangle$. Hierin is $D_1(F\circ\Gamma) = (DF)\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma$ wegens de kettingregel. Een soortgelijke redenering geldt met verwisseling van de rollen van de eerste en tweede variabele. We vinden zo de volgende twee identiteiten van functies op I^2 :

$$D_1\langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle = \langle\,(DF)\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle + \langle\, F\circ\Gamma, D_1D_2\Gamma\,\rangle, \tag{8.16}$$
$$D_2\langle\, F\circ\Gamma, D_1\Gamma\,\rangle = \langle\,(DF)\circ\Gamma\cdot D_2\Gamma, D_1\Gamma\,\rangle + \langle\, F\circ\Gamma, D_2D_1\Gamma\,\rangle. \tag{8.17}$$

Wegens Stelling 2.5.2 is $D_1D_2\Gamma = D_2D_1\Gamma$. Aftrekken van de bovenstaande identiteiten geeft derhalve:

$$\begin{aligned} D_1\langle\, F\circ\Gamma, D_1\Gamma\,\rangle - D_2\langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle &= \langle\,(DF)\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle - \langle\,(DF)\circ\Gamma\cdot D_2\Gamma, D_1\Gamma\,\rangle \\ &= \langle\,(DF)\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle - \langle\,(DF)^t\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle \\ &= \langle\,(AF)\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle. \end{aligned}$$

De functies in het eerste en het laatste lid van deze reeks gelijkheden zijn continu op I^2. Integratie over I^2 en toepassing van Stelling 6.1.1 geeft derhalve:

$$\begin{aligned} &\int_0^1\int_0^1 D_1\langle\, F\circ\Gamma, D_1\Gamma\,\rangle(x)\,dx_1\,dx_2 - \int_0^1\int_0^1 D_2\langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle(x)\,dx_2dx_1 = \\ &\quad = \int_{I^2} \langle\,(AF)\circ\Gamma\cdot D_1\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle(x)\,dx. \end{aligned}$$

Met behulp van de hoofdstelling voor de integraalrekening op R (Analyse 1, Stelling 10.4.3) kunnen we het linkerlid van de gevonden identiteit herschrijven als (8.15). □

Opmerking 8.5.8 Een beter inzicht in het bovenstaande bewijs ontstaat wellicht door te starten met de observatie:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial_2\Gamma} \langle\, F(x)\,, d_1x\,\rangle - \int_{\partial_4\Gamma^\vee} \langle\, F(x)\,, d_1x\,\rangle = \\ &\quad = \int_0^1 \langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle(1,x_2)\,dx_2 - \int_0^1 \langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle(0,x_2)\,dx_2 \\ &\quad = \int_0^1 \langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle(x_1,x_2)\Big|_{x_1=0}^{x_1=1}\,dx_2 \\ &\quad = \int_0^1\int_0^1 D_1\langle\, F\circ\Gamma, D_2\Gamma\,\rangle(x)\,dx_1\,dx_2, \end{aligned}$$

en vervolgens de identitititeiten (8.16), $D_1D_2\Gamma = D_2D_1\Gamma$ en (8.17) toe te passen.

Definitie 8.5.9 **(Gesloten kromme)** Een stuksgewijze C^1-kromme $\gamma : [a,b] \to \mathrm{R}^n$ heet *gesloten* als begin- en eindpunt van γ samenvallen, d.w.z. $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definitie 8.5.10 **(Homotopie)** Zij $I = [0,1]$, $U \subset \mathrm{R}^n$ open en γ_0, γ_1 een tweetal gesloten C^1-krommen $I \to U$. De krommen γ_0 en γ_1 heten *homotoop* in U als er een C^1-afbeelding $\Gamma : I^2 \to U$ bestaat , zo dat $D_1D_2\Gamma$ en $D_2D_1\Gamma$ bestaan en continu zijn op I^2, en zo dat:

(a) Voor elke $t \in I$ geldt: $\Gamma(0,t) = \gamma_0(t)$, en $\Gamma(1,t) = \gamma_1(t)$;

(b) Voor iedere $s \in I$ is de kromme $\gamma_s : t \mapsto \Gamma(s,t)$ gesloten, d.w.z. $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$.

De kromme γ_0 heet *samentrekbaar* in U als hij homotoop is met een constante kromme in U (d.w.z. een kromme γ met $\mathrm{im}\,(\gamma)$ een punt van U).

Opmerking 8.5.11 De afbeelding Γ wordt een *homotopie* genoemd. De homotopie kan gezien worden als een deformatie van de gesloten kromme γ_0 naar de gesloten kromme γ_1 via de familie van gesloten krommen γ_s, $0 \le s \le 1$.

Men kan (d.m.v. een benaderingsargument) aantonen dat twee krommen homotoop in de bovenstaande zin zijn als ze homotoop zijn via een continue homotopie: d.w.z. via een continue afbeelding $\Gamma : I^2 \to U$ die voldoet aan de eisen (a) en (b). Dit betekent dat homotopie een *topologisch* begrip is, d.w.z. alleen afhankelijk van de aanwezige topologische structuren van open verzamelingen en continuïteit.

Definitie 8.5.12 **(Enkelvoudige samenhang)** Een samenhangende open verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$ heet *enkelvoudig* samenhangend als iedere gesloten C^1-kromme $[0,1] \to U$ samentrekbaar is in U.

Voorbeeld 8.5.13 Een stervormige open verzameling $U \subset \mathrm{R}^n$ is enkelvoudig samenhangend. Immers zij $x^0 \in U$ zo dat voor iedere $x \in U$ het lijnstuk $L(x^0, x)$ in U ligt. Zij voorts $\gamma : I = [0,1] \to U$ een gesloten C^1-kromme. Dan wordt door $\Gamma : (s,t) \mapsto x^0 + (1-s)(\gamma(t) - x^0)$ een C^1-afbeelding $I^2 \to U$ gedefinieerd. De gemengde partiële afgeleiden bestaan, worden gegeven door $D_1D_2\Gamma(s,t) = D_2D_1\Gamma(s,t) = -\gamma'(t)$, en zijn dus continu. Men gaat gemakkelijk na dat Γ een homotopie van γ met de constante kromme $t \mapsto x^0$ definieert. Iedere C^1-kromme in U is derhalve samentrekbaar.

We eindigen deze paragraaf met de oplossing van het probleem van het primitiveren van een vectorveld.

Stelling 8.5.14 **(Homotopie-invariantie)** *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ een open verzameling, en F een C^1-vectorveld op U dat voldoet aan de integreerbaarheidsconditie $AF = 0$. Zijn $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ gesloten C^1-krommen die homotoop zijn in U, dan is*

$$\int_{\gamma_0} \langle F(x), d_1 x \rangle = \int_{\gamma_1} \langle F(x), d_1 x \rangle. \tag{8.18}$$

In het bijzonder geldt: is γ_0 samentrekbaar, dan is $\int_{\gamma_0} \langle F(x), d_1 x \rangle = 0$.

Bewijs: Zij Γ een homotopie van γ_0 en γ_1 als in Definitie 8.5.10. Beschouw de krommen $\partial_i \Gamma$ uit Definitie 8.5.5. Er geldt dat $\gamma_0 = (\partial_4 \Gamma)^\vee$ en $\gamma_1 = \partial_2 \Gamma$. Uit Definitie 8.5.10(b) volgt dat $\Gamma(s,0) = \Gamma(s,1)$ voor alle $s \in [0,1]$, dus $\partial_1 \Gamma = \partial_3 \Gamma^\vee$.

Uit $AF = 0$ volgt wegens Stelling 8.5.7 dat $\int_{\partial\Gamma} \langle F(x), d_1 x \rangle = 0$. Combineren we deze observatie met (8.14) en de bovenstaande beschrijvingen van $\partial_i \Gamma$, dan vinden we:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial_2 \Gamma} \langle F(x), d_1 x \rangle - \int_{\partial_4 \Gamma^\vee} \langle F(x), d_1 x \rangle \\ &= \int_{\gamma_1} \langle F(x), d_1 x \rangle - \int_{\gamma_0} \langle F(x), d_1 x \rangle. \end{aligned}$$

Hieruit volgt (8.18).

Veronderstel tenslotte dat γ_0 samentrekbaar is. Dan is γ_0 homotoop met een constante kromme γ_1. Uit de constantheid van γ_1 volgt $\gamma_1' = 0$ op I, dus $\int_{\gamma_1} \langle F(x), d_1 x \rangle = 0$. Combineren we dit met (8.18) dan vinden we $\int_{\gamma_0} \langle F(x), d_1 x \rangle = 0$. □

Stelling 8.5.15 **(Existentie primitieve)** *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ een enkelvoudig samenhangende open verzameling. Dan bezit ieder C^1-vectorveld F op U met $AF = 0$ een primitieve.*

Bewijs: Kies een punt $x^0 \in U$. Veronderstel dat $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ C^1-krommen zijn met beginpunt x^0 en met hetzelfde eindpunt. Wegens Gevolg 8.1.28 bestaat er een C^1-kromme $\gamma : [0,1] \to U$ die een aaneenschakeling is van γ_1 en $\gamma_2^\vee$. Daarvoor geldt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle F(x), d_1 x \rangle &= \int_{\gamma_1} \langle F(x), d_1 x \rangle + \int_{\gamma_2^\vee} \langle F(x), d_1 x \rangle \\ &= \int_{\gamma_1} \langle F(x), d_1 x \rangle - \int_{\gamma_2} \langle F(x), d_1 x \rangle. \end{aligned} \tag{8.19}$$

De kromme γ heeft begin- en eindpunt gelijk aan x^0, is derhalve gesloten en dus samentrekbaar. Wegens Stelling 8.5.14 is de integraal in het linkerlid van (8.19) gelijk aan 0. Hieruit volgt dat

$$\int_{\gamma_1} \langle F(x), d_1 x \rangle = \int_{\gamma_2} \langle F(x), d_1 x \rangle.$$

Zij nu $x \in U$. Wegens de samenhang van U bestaat er een C^1-kromme γ_x met beginpunt x^0 en eindpunt x (Stelling 8.3.18). De integraal van F langs γ_x is wegens het voorgaande onafhankelijk van de specifieke keuze van γ_x. We kunnen daarom definiëren:

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \langle F(y), d_1 y \rangle,$$

met γ_x een willekeurige C^1-kromme met beginpunt x^0 en eindpunt x^1. We zullen aantonen dat f een primitieve van F is.

Zij $x^1 \in U$ een willekeurig punt. Er bestaat een open bol $V \subset U$ met middelpunt x^1. Op deze stervormige open verzameling bezit F een primitieve g (Lemma 8.4.8). Als $x \in V$ dan noteren we met σ_x het geparametriseerde lijnstuk van x^1 naar x. Wegens Lemma 8.3.8 geldt:

$$\int_{\sigma_x} \langle F(y) , d_1 y \rangle = g(x) - g(x^1).$$

Zij $x \in V$. Dan is er wegens Gevolg 8.1.28 een C^1-kromme γ_x, die een aaneenschakeling is van γ_{x^1} en σ_x. Er geldt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\gamma_x} \langle F(y) , d_1 y \rangle \\ &= \int_{\gamma_{x^1}} \langle F(y) , d_1 y \rangle + \int_{\sigma_x} \langle F(y) , d_1 y \rangle \\ &= f(x^1) + g(x) - g(x^1). \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat f op de omgeving V van x^1 een primitieve van F is. Aangezien x^1 een willekeurig punt van U was, is het bewijs hiermee voltooid. $\square$

Hoofdstuk 9

De stellingen van Stokes, Green en Gauss

9.1 Het uitwendig produkt

Is $v_1, \ldots, v_n$ een n-tal vectoren in R^n, dan noteren we met $\det(v_1, \ldots, v_n)$ de determinant van de matrix gevormd door de kolomvectoren $v_1, \ldots, v_n$. Is $v_1, \ldots, v_{n-1}$ een $(n-1)$-tal vectoren in R^n, dan wordt door $\lambda : x \mapsto \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1})$ een lineaire afbeelding $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ gedefinieerd. Uit de lineaire algebra is bekend dat zo'n lineaire afbeelding beschreven kan worden met behulp van het standaardinprodukt: er is een unieke vector $v \in \mathrm{R}^n$ zo dat $\langle x, v \rangle = \lambda(x)$ voor alle $x \in \mathrm{R}^n$.

Definitie 9.1.1 (Uitwendig produkt) Het *uitwendig produkt* (uitprodukt) van een $(n-1)$-tal vectoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ in R^n is de unieke vector $v \in \mathrm{R}^n$ met

$$\langle x, v \rangle = \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad \text{voor alle} \quad x \in \mathrm{R}^n.$$

Het uitwendig produkt v wordt genoteerd met $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$.

Uit de definitie van het uitwendig produkt kunnen we direct de volgende formule voor de vectoriële componenten afleiden.

Lemma 9.1.2 *Zij $v_1, \ldots, v_{n-1}$ een $(n-1)$-tal vectoren in R^n, en zij $1 \leq j \leq n$. Dan wordt de j-de component van het uitwendige produkt gegeven door:*

$$(v_1 \times \cdots \times v_{n-1})_j = (-1)^{j+1} \det M_j,$$

met M_j de $(n-1) \times (n-1)$ matrix die uit $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ ontstaat door schrappen van de j-de rij.

Bewijs: De j-de component wordt verkregen door het inprodukt met de j-de standaardbasisvector te nemen. Met de definitie van het uitprodukt volgt daarom:

$$(v_1 \times \cdots \times v_{n-1})_j = \det(e_j, v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

De gewenste formule volgt door ontwikkeling van de zo verkregen determinant naar zijn eerste kolom. □

Voor $n = 3$ verkrijgen we uit het bovenstaande de bekende formule

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2\, ,\, a_3 b_1 - a_1 b_3\, ,\, a_1 b_2 - a_2 b_1). \tag{9.1}$$

In het vervolg zullen we ons beperken tot de theorie van het uitwendig produkt in R^3, omdat dit voldoende is voor de toepassingen die in dit hoofdstuk behandeld zullen worden. Veel van het nu volgende kan echter op natuurlijke wijze uitgebreid worden naar R^n.

Lemma 9.1.3 (Eigenschappen uitwendig produkt) *Zij a, b een tweetal vectoren in* R^3. *Dan geldt het volgende:*

(a) *Voor iedere orthogonale lineaire afbeelding* $L : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3 : \quad La \times Lb = \det L \cdot L(a \times b)$;

(b) $a \times b \perp a$ *en* $a \times b \perp b$;

(c) $a \times b = 0$ *dan en slechts dan als* a, b *lineair afhankelijk zijn;*

(d) $a \times b = -b \times a$.

Bewijs: We bewijzen slechts (a). De overige eigenschappen volgen direkt uit de definitie. Uit de orthogonaliteit van L volgt, voor alle $x \in \mathrm{R}^3$, dat

$$\begin{aligned} \det L \cdot \langle\, x, L(a \times b)\,\rangle &= \det L \cdot \langle\, L^{-1}x, a \times b\,\rangle \\ &= \det L \cdot \det(L^{-1}x, a, b) \\ &= \det(x, La, Lb). \end{aligned}$$

De gewenste formule volgt nu door toepassing van de definitie van het uitprodukt. □

Het volgende resultaat zal uiteindelijk van belang zijn bij de herparametrisering van oppervlakte-integralen van scalaire functies en vectorvelden.

Lemma 9.1.4 *Zij A een lineaire afbeelding* $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$. *Dan geldt voor ieder tweetal vectoren* $v_1, v_2 \in \mathrm{R}^2$ *dat*

$$Av_1 \times Av_2 = \det{}_2(v_1, v_2) \cdot Ae_1 \times Ae_2. \tag{9.2}$$

Hierin is e_1, e_2 de standaardbasis in R^2. *Voorts geeft* $\det_2$ *aan dat het de determinant van een* 2×2*-matrix betreft.*

Bewijs: Zij $x \in \mathrm{R}^3$. Dan is

$$\langle\, x, Av_1 \times Av_2\,\rangle = \det(x, Av_1, Av_2).$$

Lees de laatste uitdrukking tussen haakjes als de matrix met kolomvectoren x, Av_1, Av_2. Deze matrix kunnen we schrijven als produkt van twee 3×3-matrices:

$$(x, Av_1, Av_2) = (x\ A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

De determinant van de tweede matrix in dit produkt is door ontwikkelen naar de eerste kolom te herschrijven als de 2×2 determinant $\det_2(v_1, v_2)$. Met de produktformule voor determinanten volgt derhalve dat:

$$\begin{aligned} \langle\, x, Av_1 \times Av_2\,\rangle &= \det{}_2(v_1, v_2)\, \det(x\ A) \\ &= \det{}_2(v_1, v_2)\, \det(x, Ae_1, Ae_2) \\ &= \langle\, x, \det{}_2(v_1, v_2) \cdot (Ae_1 \times Ae_2)\,\rangle. \end{aligned}$$

Dit geldt voor iedere $x \in \mathrm{R}^3$. Derhalve volgt (9.2). □

In het vervolg zullen we de lengte van het uitwendig produkt van vectoren een meetkundige interpretatie geven.

Is $a, b \in \mathrm{R}^3$ een tweetal vectoren, dan noteren we met $P(a, b)$ het parallellogram in R^3 opgespannen door de vectoren a en b. Dus:

$$P(a, b) = \{sa + tb \mid s, t \in [0, 1]\}.$$

Onder een eenheidsvector in R^3 zullen we verstaan: een vector met lengte 1.

Lemma 9.1.5 *Zij $a, b \in \mathrm{R}^3$ tweetal vectoren. Dan geldt voor iedere eenheidsvector $\nu \in \mathrm{R}^3$ met $\nu \perp a$ en $\nu \perp b$ dat:*

$$||a \times b|| = \mathrm{vol}_3(P(\nu, a, b)). \tag{9.3}$$

Bewijs: Het rechterlid van de bovenstaande gelijkheid is wegens Voorbeeld 7.3.7 gelijk aan: $|\det(\nu, a, b)|$, dus aan $|\langle \nu, a \times b \rangle|$. Het is derhalve voldoende te bewijzen dat $||a \times b|| = |\langle \nu, a \times b \rangle|$.

Als a, b lineair afhankelijk zijn, dan is $a \times b = 0$, zodat inderdaad geldt $||a \times b|| = |\langle \nu, a \times b \rangle|$.

Als a, b lineair onafhankelijk zijn, dan is de lineaire ruimte V opgespannen door deze vectoren een vlak. Derhalve is het orthocomplement $V^\perp$ een lijn. Uit het gegeven volgt dat $\nu \in V^\perp$; uit Lemma 9.1.3 (b) volgt dat $a \times b \in V^\perp$. Derhalve is $a \times b$ een veelvoud van ν. Wegens Lemma 1.2.1 volgt nu dat $|\langle \nu, a \times b \rangle| = ||\nu|| ||a \times b|| = ||a \times b||$. □

De volgende definitie is gemotiveerd door de overweging dat $\mathrm{vol}_3 = \text{hoogte} \times \mathrm{vol}_2$.

Definitie 9.1.6 (Oppervlakte parallellogram) Is $a, b \in \mathrm{R}^3$ een tweetal vectoren, dan definiëren we de *ongeoriënteerde oppervlakte* (ofwel het ongeoriënteerde 2-dimensionale volume) van $P(a, b)$ door:

$$\mathrm{vol}_2 P(a, b) := ||a \times b||.$$

Het volgende lemma geeft een extra rechtvaardiging van deze definitie.

Lemma 9.1.7 (a) *Is P een parallellogram in R^3, dan geldt voor iedere orthogonale lineaire afbeelding $A : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ dat $\mathrm{vol}_2(AP) = \mathrm{vol}_2(P)$.*

(b) *Is P een parallellogram in R^2, en $P \times \{0\}$ het beeld van P in R^3 onder de lineaire inbedding $x \mapsto (x, 0)$, $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$, dan is $\mathrm{vol}_2(P \times \{0\}) = \mathrm{vol}_2 P$.*

Bewijs: (a) Zij $P = P(a, b)$, dan is $AP = P(Aa, Ab)$. Derhalve is $\mathrm{vol}_2(AP) = ||Aa \times Ab||$. Met Lemma 9.1.3 (a) volgt nu $\mathrm{vol}_2(AP) = |\det A| ||A(a \times b)||$. Uit de orthogonaliteit van A volgt $\det A = \pm 1$ en $||Ax|| = ||x||$ voor alle $x \in \mathrm{R}^n$. Derhalve is $\mathrm{vol}_2(AP) = ||a \times b|| = \mathrm{vol}_2(P)$.

(b) Zij $P = P(v_1, v_2)$, met $v_1, v_2 \in \mathrm{R}^2$. Zij L de lineaire afbeelding $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door $x \mapsto (x, 0)$. Dan geldt wegens Lemma 9.1.4 dat:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(P \times \{0\}) &= \mathrm{vol}_2 P(Lv_1, Lv_2) \\
&= ||Lv_1 \times Lv_2|| \\
&= |\det{}_2(v_1, v_2)| ||e_1 \times e_2|| \\
&= \mathrm{vol}_2(P).
\end{aligned}$$

□

Een n-tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ van lineair onafhankelijke vectoren in R^n heet *positief georiënteerd* (ten aanzien van de standaardbasis) als $\det(v_1, \ldots, v_n) > 0$. Het tupel heet *negatief georiënteerd* als $\det(v_1, \ldots, v_n) < 0$.

Lemma 9.1.8 *Zij $a, b \in \mathrm{R}^3$ een tweetal lineair onafhankelijke vectoren. Dan is het drietal $(a \times b, a, b)$ positief georiënteerd.*

Bewijs: Uit de lineaire onafhankelijkheid van de vectoren a, b volgt dat $a \times b \neq 0$. Met de definitie van het uitprodukt volgt nu dat: $\det(a \times b, a, b) = \langle\, a \times b, a \times b\,\rangle > 0$. □

Het is gebruikelijk in illustraties de standaardbasis van R^3 zo weer te geven dat de richting van e_1 correspondeert met de bewegingsrichting van een kurketrekker als die roteert om de as $\mathrm{R}e_1$ over een hoek $\frac{\pi}{2}$ in de richting waarbij e_2 overgevoerd wordt naar e_3 ('de kurketrekkerregel'). Is a, b een tweetal lineair onafhankelijke vectoren in R^3, dan is $a \times b$ een vector loodrecht op het vlak opgespannen door a en b, met als lengte de oppervlakte van $P(a, b)$. Het drietal $a \times b, a, b$ is positief georiënteerd ten aanzien van de standaardbasis; de bovengenoemde conventie bij het tekenen van de standaardbasis heeft tot gevolg dat de richting van $a \times b$ in een tekening moet corresponderen met de bewegingsrichting van een kurketrekker als die gedraaid wordt volgens de draairichting die a via de kleinste hoek naar b voert. Zie figuur 17.

Figuur 17: De kurketrekkerregel voor het uitprodukt

In het vervolg is a, b een tweetal lineair onafhankelijke vectoren in R^3. De lineaire ruimte V opgespannen door deze vectoren is een vlak door de oorsprong. Het orthocomplement $V^\perp$ van V is een lijn door de oorsprong, en bevat dus twee vectoren met lengte 1. We noemen deze vectoren de eenheidsnormaalvectoren op het parallellogram $P(a, b)$. Onder een oriëntatie op $P(a, b)$ verstaan we een keuze ν van zo'n normaalvector. Merk op dat de volgorde a, b een oriëntatie ν op $P(a, b)$ vastlegt door de eis dat (ν, a, b) een positief georiënteerd drietal is. Die ν

wordt gegeven door

$$\nu = \frac{a \times b}{||a \times b||}. \tag{9.4}$$

Definitie 9.1.9 (Flux door een parallellogram) Zij ν een oriëntatie op $P(a,b)$. De *flux* (of doorstroming) van een vector $F \in \mathrm{R}^3$ door het parallellogram $P(a,b)$ ten aanzien van de oriëntatie ν is het getal:

$$\langle F, \nu \rangle \, \mathrm{vol}_2 P(a,b).$$

Opmerking 9.1.10 (Interpretatie) Merk op dat ν gelijk is aan plus of min (9.4). De flux is dus gelijk aan

$$\langle F, \nu \rangle \, \mathrm{vol}_2 P(a,b) = \langle F, ||a \times b|| \, \nu \rangle = \pm \langle F, a \times b \rangle.$$

Het laatste lid is in absolute waarde gelijk aan $|\det(F,a,b)| = \mathrm{vol}_3 P(F,a,b)$. Dit laatste getal kunnen we op de volgende manier inderdaad als doorstroming interpreteren.

Voor iedere $x \in \mathrm{R}^3$ beschouwen we het lijnstuk $L(x, x+F)$. Dit lijnstuk kan geïnterpreteerd worden als het traject dat een puntdeeltje doorloopt gedurende een tijdsduur 1 als het met constante snelheid F beweegt vanuit het startpunt x.

Zij nu S de vereniging van de lijnstukken $L(x, x+F)$ met $x \in P := P(a,b)$. Dan kan S geïnterpreteerd worden als de collectie van posities op tijdstip $t = 1$ van puntdeeltjes die op enig tijdstip $t \in [0,1]$ door het parallellogram P gegaan zijn, indien ze steeds met constante snelheid F bewogen hebben.

In de bovenstaande zin kan men $\mathrm{vol}_3(S)$ interpreteren als de absolute waarde van de doorstroming per tijd bij stroomsnelheid F. Merk op dat S bestaat uit de punten $x + tF$, met $x \in P(a,b)$, $t \in [0,1]$. Derhalve is $S = P(F,a,b)$, dus $\mathrm{vol}_3(S) = \mathrm{vol}_3 P(F,a,b)$.

Het teken van de flux wordt bepaald door het teken van $\langle F, \nu \rangle$. Dit betekent dat doorstroming in de richting van ν als positief, en doorstroming in de richting van $-\nu$ als negatief wordt gerekend.

Tenslotte behandelen we nog enige eigenschappen van het uitwendig product die specifiek zijn voor R^3.

Lemma 9.1.11 *Voor alle $a, b, c \in \mathrm{R}^3$ geldt:*

$$\langle a \times b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle$$

Bewijs: Wegens de definitie van het uitwendig produkt en het alternerende gedrag van de determinant geldt:

$$\langle a \times b, c \rangle = \langle c, a \times b \rangle = \det(c,a,b) = \det(a,b,c) = \langle a, b \times c \rangle.$$

□

Een $n \times n$-matrix A heet *anti-symmetrisch* dan en slechts dan als $A^t = -A$. De collectie anti-symmetrische matrices is met de optelling en de scalaire vermenigvuldiging een lineaire ruimte.

Lemma 9.1.12 *Laat $a \in \mathrm{R}^3$ zijn. Dan is de matrix van de lineaire afbeelding $x \mapsto a \times x$ gelijk aan:*

$$\mathrm{mat}(a \times \cdot) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

De afbeelding $a \mapsto \mathrm{mat}(a \times \cdot)$ definieert een lineair isomorfisme van R^3 op de ruimte van anti-symmetrische 3×3-matrices.

Bewijs: Formule (9.5) is een onmiddellijk gevolg van formule (9.1) met $b = x$. De lineariteit en de injectiviteit van de afbeelding zijn evident. De surjectiviteit volgt uit de observatie dat iedere anti-symmetrische 3×3 matrix te schrijven is in de vorm van het rechterlid van (9.5). □

Zij nu F een C^1-vectorveld op een open deelverzameling U van R^3. We brengen in herinnering dat de anti-symmetrische matrix $AF(x)$ gedefinieerd is door $AF(x) = DF(x) - DF(x)^t$ (zie Definitie 8.5.1).

Definitie 9.1.13 Zij $U \subset \mathrm{R}^3$ open en F een C^1-vectorveld op U. Voor $x \in U$ definiëren we de vector $\mathrm{rot}\, F(x) \in \mathrm{R}^3$ door:

$$\mathrm{mat}(\mathrm{rot}\, F(x) \times \cdot) = AF(x).$$

Het aldus op U gedefinieerde vectorveld $\mathrm{rot}\, F$ heet de *rotatie* (in het Engels: curl) van F op U.

De componenten van $\mathrm{rot}\, F$ worden op grond van het bovenstaande lemma gegeven door:

$$\mathrm{rot}\, F = (D_2F_3 - D_3F_2, D_3F_1 - D_1F_3, D_1F_2 - D_2F_1). \tag{9.6}$$

Deze formule kan men het gemakkelijkst onthouden als de formele identiteit:

$$\mathrm{rot}\, F = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}.$$

Het is gebruikelijk $\mathrm{rot}\, F$ te definiëren met behulp van de formule (9.6). Wij hebben gekozen voor de bovenstaande definitie omdat die aansluit bij de wijze waarop $\mathrm{rot}\, F$ in de theorie zal verschijnen.

9.2 De oppervlakte-integraal van een functie

In het vervolg is $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ een rechthoek in R^2 met $B^{\mathrm{inw}} \neq \emptyset$, d.w.z. $a_1 < b_1$ en $a_2 < b_2$.

Definitie 9.2.1 Onder een C^1-herparametrisering van B verstaan we een C^1-afbeelding $\chi : B^0 \to B$, met $B^0 \subset \mathrm{R}^2$ een tweedimensionaal blok (rechthoek), zo dat voldaan is aan de volgende voorwaarden:

(a) χ is bijectief;

(b) χ is regulier op $B^{0\,\mathrm{inw}}$.

Opmerking 9.2.2 (a) We brengen in herinnering dat (b) betekent dat $\det D\chi(x) \neq 0$ voor alle $x \in B^{0\,\mathrm{inw}}$.

(b) Merk op dat een herparametrisering voldoet aan de voorwaarden van de substitutiestelling. Derhalve geldt voor iedere continue functie $f : B \to \mathrm{R}$ dat

$$\int_B f(x)\, dx = \int_{B^0} f(\chi(y))\, |\det D\chi(y)|\, dy.$$

Laat $\chi : B^0 \to B$ een C^1-herparametrisering zijn. Dan geldt ofwel dat $\det D\chi(x) > 0$ voor alle $x \in B^{0\,\mathrm{inw}}$, ofwel dat $\det D\chi(x) < 0$ voor alle $x \in B^{0\,\mathrm{inw}}$. Immers zij $x^0 \in B^{0\,\mathrm{inw}}$ een vast punt. Voor een willekeurige $x \in B^{0\,\mathrm{inw}}$ beschouwen we de kromme $\gamma_x : [0,1] \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd door $\gamma_x(t) = x^0 + t(x - x^0)$. Het beeld van γ_x is het lijnstuk dat x^0 en x verbindt; derhalve geldt $\mathrm{im}\,(\gamma_x) \subset B^{0\,\mathrm{inw}}$. De functie $g : t \mapsto \det D\chi(\gamma_x(t))$ is continu en nergens nul op $[0,1]$. Wegens de tussenwaardestelling voor continue functies hebben $g(0) = \det D\chi(x^0)$ en $g(1) = \det D\chi(x)$ hetzelfde teken.

Definitie 9.2.3 Zij $\chi : B^0 \to B$ een C^1-herparametrisering. Is $\det D\chi(x) > 0$ voor alle $x \in B^{0\,\mathrm{inw}}$, dan heet χ *oriëntatiebehoudend.* Is $\det D\chi(x) < 0$ voor alle $x \in B^{0\,\mathrm{inw}}$, dan heet χ *oriëntatie-omkerend.*

Opmerking 9.2.4 Is $\chi : B^0 \to B$ een C^1-herparametrisering, dan volgt uit de redenering voor de bovenstaande definitie dat $\det D\chi = \eta |\det D\chi|$ op B^0, met $\eta \in \{-1, 1\}$; hierbij is $\eta = 1$ als χ oriëntatiebehoudend is, en $\eta = -1$ als χ oriëntatie-omkerend is.

Voorbeeld 9.2.5 Zij $I = [0,1]$. Dan is de afbeelding $\chi : I^2 \to B$ gedefinieerd door $\chi(y) = (a_1 + y_1(b_1 - a_1)\,,\, a_2 + y_2(b_2 - a_2))$ een bijectie die C^1 is. De Jacobi-matrix van deze afbeelding is

$$D\chi(y) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & 0 \\ 0 & b_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Voor de Jacobiaan geldt dus $\det D\chi(y) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) > 0$ $(y \in I^2)$. Hieruit volgt dat χ een oriëntatiebehoudende C^1-herparametrisering van B is.

Voorbeeld 9.2.6 (Herparametrisering door coördinaatverwisseling) Definieer $B^\vee = [a_2, b_2] \times [a_1, b_1]$ en definieer $\Xi : B^\vee \to B$ door $\Xi(y) = (y_2, y_1)$. Het is duidelijk dat Ξ bijectief en C^∞ is. Voorts is Ξ de beperking van de lineaire afbeelding $L : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ $y \mapsto (y_2, y_1)$ tot $B^\vee$. Derhalve is $D\Xi(y) = L$ voor alle $y \in B^\vee$. We concluderen dat $\det D\Xi(y) = \det L = -1$ voor alle $y \in B^\vee$. Hieruit volgt dat Ξ een oriëntatie-omkerende herparametrisering van B is.

Definitie 9.2.7 (Oppervlakte-integraal) Zij $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ een C^1-afbeelding en $f : \mathrm{im}\,(\Phi) \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan is de integraal van f langs Φ gedefinieerd door:

$$\int_\Phi f(x)\; d_2x := \int_B f(\Phi(y))\,\|D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)\|\; dy. \tag{9.7}$$

De oppervlakte van Φ is gedefinieerd door:

$$\mathrm{opp}(\Phi) := \int_\Phi 1\; d_2x.$$

Opmerking 9.2.8 (Interpretatie) Zij $y \in B^{\mathrm{inw}}$, dan geldt voor voldoend kleine $dy_1, dy_2 > 0$ dat het parallellogram $y + P(dy_1e_1, dy_2e_2)$ in B ligt. Het beeld van dit parallellogram onder Φ wordt voor $(dy_1, dy_2) \to 0$ in eerst orde benaderd door het parallellogram

$$\begin{aligned} \Phi(y) + D\Phi(y)P(dy_1e_1, dy_2e_2) &= \Phi(y) + P(dy_1D\Phi(y)e_1, dy_2D\Phi(y)e_2) \\ &= \Phi(y) + P(dy_1D_1\Phi(y), dy_2D_2\Phi(y)). \end{aligned}$$

De ongeoriënteerde oppervlakte van dit parallellogram is gelijk aan

$$\mathrm{vol}_2P(dy_1D_1\Phi(y), dy_2D_2\Phi(y)) = \|D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)\|\; dy_1dy_2$$

(gebruik Definitie 9.1.6). In deze zin kan de factor $\|D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)\|$ opgevat worden als infinitesimale oppervlakte-veranderende factor.

Blijkens het volgende resultaat is de hierboven gedefinieerde integraal invariant onder herparametrisering van B, ongeacht of deze de oriëntatie behoudt of omkeert; de integraal heet daarom *niet-georiënteerd.*

Lemma 9.2.9 *Zij $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ een C^1-afbeelding en $f : \mathrm{im}\,(\Phi) \to \mathrm{R}$ een continue functie. Dan geldt voor iedere C^1-herparametrisering χ van B dat*

$$\int_{\Phi\,\circ\,\chi} f(x)\; d_2x = \int_\Phi f(x)\; d_2x.$$

Bewijs: Zij B^0 het domein van χ. Met de kettingregel volgt, voor $y \in B^0 : D_j(\Phi\circ\chi)(y) = D\Phi(\chi(y))D_j\chi(y)$, voor $j = 1, 2$. Met Lemma 9.1.4 volgt nu dat

$$\begin{aligned} D_1(\Phi\circ\chi)(y) \times D_2(\Phi\circ\chi)(y) &= \det D\chi(y)\cdot\,[D\Phi(\chi(y))e_1 \times D\Phi(\chi(y))e_2]. \\ &= \det D\chi(y)\cdot\,[D_1\Phi(\chi(y)) \times D_2\Phi(\chi(y))]. \end{aligned}$$

Combineren we dit met de definitie van de integraal van f langs $\Phi\circ\chi$ dan volgt dat:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi\,\circ\,\chi} f(x)\; d_2x &= \int_{B^0} f(\Phi\circ\chi(y))\; \|(D_1\Phi(\chi(y)) \times D_2\Phi(\chi(y))\|\; |\det D\chi(y)|\; dy \\ &= \int_{B^0} [f\circ\Phi\; \|(D_1\Phi \times D_2\Phi)\|]\,(\chi(y))\; |\det D\chi(y)|\; dy \qquad (9.8) \end{aligned}$$

Hierbij hebben we de notatie $f \circ \Phi \|D_1\Phi \times D_2\Phi\|$ gebruikt voor de functie $B \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door: $z \mapsto f(\Phi(z))\|D_1\Phi(z) \times D_2\Phi(z)\|$. Deze functie is continu op $B = \chi(B^0)$, en door toepassing van de substitutiestelling op (9.8) volgt derhalve dat:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \chi} f(x)\, d_2x &= \int_B f(z)\, \|D_1\Phi(z) \times D_2\Phi(z)\|\, dz \\ &= \int_\Phi f(x)\, d_2(x). \end{aligned}$$

□

Opmerking 9.2.10 Veronderstel dat de C^1-afbeelding $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ injectief is op B^{inw}. De invariantie van de integraal $\int_\Phi f(x)\, d_2x$ onder herparametrisering van B suggereert dat de integraal slechts afhankelijk is van *de verzameling* $\mathrm{im}\,\Phi$ en de functie $f : \mathrm{im}\,(\Phi) \to \mathrm{R}$. Onder de extra voorwaarde dat de afgeleide $D\Phi(y) : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$ injectief is voor elke $y \in B^{\mathrm{inw}}$ kan men aantonen dat dit inderdaad zo is. Het bewijs van deze stelling zou te ver voeren. Het berust op de impliciete functiestelling, die in het college Analyse 3 bewezen zal worden.

We volstaan hier met enige intuïtieve opmerkingen om enig zicht te bieden op een natuurlijke theorie van integratie die men zo kan ontwikkelen.

Met behulp van de genoemde impliciete functiestelling kan men een theorie van d-dimensionale deelvariëteiten van R^n ontwikkelen, alsmede een theorie van integratie van functies over dergelijke deelvariëteiten.

Voldoet Φ aan de bovenstaande voorwaarden dan is $\Phi(B^{\mathrm{inw}})$ een voorbeeld van een 2-dimensionale deelvariëteit X van R^3. Men noemt Φ wel een parametrisering van X. Algemeen is een 2-dimensionale deelvariëteit in essentie een deelverzameling van R^3 die in de buurt van elk van zijn punten beschreven kan worden als beeld van een parametrisering.

De theorie van integratie over deelvariëteiten maakt het in het bijzonder mogelijk voor een 2-dimensionale deelvariëteit X van R^3 en een voldoend nette functie $f : X \to \mathrm{R}$ een integraal $\int_X f(x)\, d_2x$ definiëren. In het bijzonder geldt: heeft X een parametrisering Φ als hierboven, en is $f : \mathrm{im}\,(\Phi) \to \mathrm{R}$ continu, dan is

$$\int_X f(x)\, d_2x = \int_\Phi f(x)\, d_2x.$$

In het algemeen kan men de integraal over een 2-dimensionale deelvariëteit splitsen in een som van integralen die elk voor zich in termen van een *lokale* parametrisering te herschrijven zijn.

Voorbeeld 9.2.11 **(Vergelijking met** vol_2**)** Zij $\chi : B \to \mathrm{R}^2$ een C^1-afbeelding die voldoet aan de voorwaarden van de substitutiestelling, dus χ is injectief en regulier op B^{inw}. Definieer de C^1-afbeelding $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ door $\Phi(y) = (\chi(y), 0)$ (te lezen als kolomvector). Dan is

$$D\Phi(y) = \begin{pmatrix} D_1\chi(y) & D_2\chi(y) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Met formule (9.1) volgt hieruit dat:

$$D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y) = \det D\chi(y)\, e_3,$$

met e_3 de derde standaardbasisvector in $\mathbb{R}^3$. Hieruit volgt dat $\|D_1\Phi(y)\times D_2\Phi(y)\| = |\det D\chi(y)|$. Derhalve is:

$$\mathrm{opp}(\Phi) = \int_B |\det D\chi(y)|\, dy = \mathrm{vol}_2(\chi(B)),$$

waarbij de laatste identiteit een gevolg is van de substitutiestelling. We zien dat in deze situatie de oppervlakte van Φ overeenkomt met het 2-dimensionale volume van $\chi(B)$.

Voorbeeld 9.2.12 **(Boloppervlak)** Zij $R > 0$. We beschouwen de rechthoek $B = [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en de C^1-afbeelding $\Phi : B \to \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Phi(\alpha, \theta) = R(\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta).$$

Dan is $\mathrm{im}\,(\Phi) = S_R$, met $S_R := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$, de sfeer met middelpunt 0 en straal R in $\mathbb{R}^3$. Er geldt dat

$$\begin{aligned} D_1\Phi(\alpha,\theta) &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi(\alpha,\theta) &= R(-\sin\alpha\cos\theta, \cos\alpha\cos\theta, 0), \\ D_2\Phi(\alpha,\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(\alpha,\theta) &= R(-\cos\alpha\sin\theta, -\sin\alpha\sin\theta, \cos\theta), \end{aligned}$$

waaruit men met behulp van een directe berekening afleidt dat:

$$D_1\Phi(\alpha,\theta) \times D_2\Phi(\alpha,\theta) = R\,\cos\theta\;\Phi(\alpha,\theta), \tag{9.9}$$

dus

$$\|D_1\Phi(\alpha,\theta) \times D_2\Phi(\alpha,\theta)\| = R^2\cos\theta.$$

Voor iedere continue functie $f : S_R \to \mathbb{R}$ geldt derhalve dat

$$\int_\Phi f(x)\; d_2x = \int_B f(\Phi(\alpha,\theta))\; R^2\cos\theta\; d(\alpha,\theta) = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi(\alpha,\theta))\;\cos\theta\; d\alpha\; d\theta.$$

In het bijzonder vinden we, door $f = 1$ in te vullen:

$$\mathrm{opp}(\Phi) = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\; d\alpha\; d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4\pi R^2.$$

Met de in Opmerking 9.2.10 gesuggereerde theorie kan men dit antwoord op zinvolle wijze interpreteren als de oppervlakte van de sfeer S_R.

9.3 De stellingen van Stokes en Green

In het vervolg is steeds $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ een tweedimensionaal blok (rechthoek) in R^2, met $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$.

Definitie 9.3.1 **(Flux)** Zij $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ een C^1-afbeelding en $F : \mathrm{im}\,(\Phi) \to \mathrm{R}^3$ een continu vectorveld. Dan definiëren we de *flux van F door Φ* door

$$\int_\Phi \langle\, F, \nu \,\rangle(x)\; d_2x := \int_B \langle\, F \circ \Phi, D_1\Phi \times D_2\Phi \,\rangle(y)\; dy. \tag{9.10}$$

Opmerking 9.3.2 In het bovenstaande hebben we de notatie $\langle\, F \circ \Phi, D_1\Phi \times D_2\Phi \,\rangle$ voor de functie $y \mapsto \langle\, F(\Phi(y)), D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y) \,\rangle$, $B \to \mathrm{R}$ gebruikt. Bijvoorbeeld door uitschrijven van in- en uitprodukt in componenten blijkt dat deze functie continu is en dus Riemann-integreerbaar over B.

Opmerking 9.3.3 **(Interpretatie)** De naam flux van F door Φ wordt verklaard door de volgende beschouwing. We gebruiken dezelfde notaties als in Opmerking 9.2.8. In het bijzonder heeft het parallellogram $P = P(dy_1 D_1\Phi(y), dy_2 D_2\Phi(y))$ (en dus zijn verschovene over $\Phi(y)$) de ongeoriënteerde oppervlakte:

$$\mathrm{vol}_2 P = ||D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)||\; dy_1 dy_2.$$

Is deze oppervlakte ongelijk aan nul, dan wordt door

$$\nu = \frac{D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)}{||D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)||}$$

een oriëntatie op het parallellogram P gedefinieerd (zie de tekst voor Definitie 9.1.9). Ten aanzien van deze oriëntatie wordt de flux van de vector $F(\Phi(y))$ door het parallellogram P volgens Definitie 9.1.9 gegeven door: $\langle\, F(\Phi(y)), \nu \,\rangle\, \mathrm{vol}_2 P$, hetgeen wegens de bovenstaande gelijkheden gelijk is aan

$$\langle\, F(\Phi(y)), D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y) \,\rangle\; dy_1 dy_2.$$

In deze zin kan het rechterlid van (9.10) opgevat worden als integraal van een infinitesimale flux. Hierbij wordt de richting van $D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)$ als positieve doorstromingsrichting van $\mathrm{im}\,(\Phi)$ opgevat. In deze zin bepaalt $D_1\Phi \times D_2\Phi$ een oriëntatie op $\mathrm{im}\,(\Phi)$.

Opmerking 9.3.4 **(Verklaring notatie)** In aansluiting op het hierboven opgemerkte geven we nu de achtergrond van de notatie $\int_B \langle\, F, \nu \,\rangle\; d_2x$. Veronderstel dat Φ injectief is op B, en dat $D\Phi(y)$ injectief is voor alle $y \in B$. Dan geldt voor alle $y \in B$ dat $D_1\Phi(y)$ en $D_2\Phi(y)$ lineair onafhankelijk zijn (de partiële afgeleiden kunnen immers beschouwd worden als de kolomvectoren van de matrix van $D\Phi(y)$). Derhalve is $D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y) \neq 0$ voor alle $y \in B$. Definieer de functie $\nu : \Phi(B) \to \mathrm{R}^3$ door

$$\nu(\Phi(y)) = \frac{D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)}{||D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)||}.$$

Deze definitie is correct omdat we verondersteld hebben dat Φ injectief is op B. Derhalve bestaat er voor iedere $x \in \Phi(B)$ precies één $y \in B$ met $x = \Phi(y)$; de vector $\nu(x) = \nu(\Phi(y))$ is dan gedefinieerd door de bovenstaande formule.

Wegens (9.4) is $\nu(\Phi(y))$ een oriëntatie op het parallellogram

$$P(D_1\Phi(y), D_2\Phi(y)) = D\Phi(y)P(e_1, e_2).$$

Definieer de scalaire functie $f : \Phi(B) \to \mathrm{R}$ door $f(x) = \langle F(x), \nu(x) \rangle$. Dan volgt direct uit de zojuist gegeven definities dat

$$f \circ \Phi \, ||D_1\Phi \times D_2\Phi|| = \langle F \circ \Phi, D_1\Phi \times D_2\Phi \rangle$$

op B. Hieruit blijkt dat het linkerlid continu is, en dus Riemann-integreerbaar over B. Derhalve kunnen we ook nu formule (9.7) gebruiken om de integraal van f langs Φ te definiëren. We vinden zo dat

$$\int_\Phi \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x = \int_\Phi f(x) \, d_2x = \int_\Phi \langle F(x), \nu(x) \rangle \, d_2x.$$

Uit het volgende resultaat blijkt dat de hierboven gedefinieerde flux-integraal invariant is onder oriëntatiebehoudende herparametriseringen, terwijl hij van teken verandert bij oriëntatie-omkerende herparametriseringen. Om deze reden noemt men de flux-integraal een *georiënteerde integraal.*

Lemma 9.3.5 *Zij $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ een C^1-afbeelding en F een continu vectorveld op* $\mathrm{im}\,(\Phi)$. *Dan geldt voor iedere C^1-herparametrisering χ van B dat*

$$\int_{\Phi \circ \chi} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x = \eta \int_\Phi \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x \qquad (\eta = \pm 1).$$

Hierbij is $\eta = 1$ als χ oriëntatiebehoudend is, en $\eta = -1$ als χ oriëntatie-omkerend is.

Bewijs: Zij B^0 het domein van χ. Als in het begin van het bewijs van Lemma 9.2.9 volgt, voor $y \in B^0$:

$$D_1(\Phi \circ \chi)(y) \times D_2(\Phi \circ \chi)(y) = \det D\chi(y) \cdot [D_1\Phi(\chi(y)) \times D_2\Phi(\chi(y))].$$

Combineren we dit met de definitie van de flux van F door $\Phi \circ \chi$ dan volgt dat:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi \circ \chi} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x &= \int_{B^0} \langle F(\Phi \circ \chi(y)), D_1\Phi(\chi(y)) \times D_2\Phi(\chi(y) \rangle \, \det D\chi(y) \, dy \\ &= \eta \int_{B^0} \langle F \circ \Phi, D_1\Phi \times D_2\Phi \rangle(\chi(y)) \, |\det D\chi(y)| \, dy. \qquad (9.11) \end{aligned}$$

Hierbij hebben we de notatie $\langle F\circ\Phi, D_1\Phi\times D_2\Phi\rangle$ gebruikt voor de functie $B\to\mathrm{R}$ gedefinieerd door: $z\mapsto \langle F(\Phi(z)), D_1\Phi(z)\times D_2\Phi(z)\rangle$. Deze functie is continu op $B=\chi(B^0)$, en door toepassing van de substitutiestelling (Stelling 7.3.3) op (9.11) volgt derhalve dat:

$$\begin{aligned}\int_{\Phi\circ\chi}\langle F,\nu\rangle(x)\,d_2x &= \eta\int_B \langle F(\Phi(z)), D_1\Phi(z)\times D_2\Phi(z)\rangle\,dz\\ &= \eta\int_\Phi \langle F,\nu\rangle(x)\,d_2x.\end{aligned}$$

□

Definitie 9.3.6 Zij $\Phi: B\to\mathrm{R}^3$ een C^1-afbeelding, en F een continu vectorveld op $\Phi(\partial B)$. Dan definiëren we

$$\int_{\partial\Phi}\langle F(x)\,,\,d_1x\rangle = \sum_{1\le j\le 4}\int_{\partial_j\Phi}\langle F(x)\,,\,d_1x\rangle,$$

met $\partial_j\Phi$ de C^1-krommen in R^3 gegeven door:

$$\begin{aligned}\partial_1\Phi:&\ [a_1,b_1]\to\mathrm{R}^3, && x_1\mapsto\Phi(x_1,a_2);\\ \partial_2\Phi:&\ [a_2,b_2]\to\mathrm{R}^3, && x_2\mapsto\Phi(b_1,x_2);\\ \partial_3\Phi:&\ [a_1,b_1]\to\mathrm{R}^3, && x_1\mapsto\Phi(b_1-(x_1-a_1),b_2);\\ \partial_4\Phi:&\ [a_2,b_2]\to\mathrm{R}^3, && x_2\mapsto\Phi(a_1,b_2-(x_2-a_2)).\end{aligned}$$

Opmerking 9.3.7 De bovenstaande definitie is de voor de hand liggende generalisatie van Definitie 8.5.5 naar de algemene rechthoek B in R^2.

Stelling 9.3.8 (Stelling van Stokes) *Zij $U\subset\mathrm{R}^3$ open, F een C^1-vectorveld op U en $\Phi: B\to\mathrm{R}^3$ een C^2-afbeelding met* $\mathrm{im}\,(\Phi)\subset U$. *Dan is*

$$\int_{\partial\Phi}\langle F(x)\,,\,d_1x\rangle = \int_\Phi\langle \operatorname{rot}F,\nu\rangle(x)\,d_2x. \tag{9.12}$$

Bewijs: Het echte werk is gebeurd in het bewijs van Stelling 8.5.7. Uit de genoemde stelling zullen we de Stelling van Stokes afleiden.

Definieer de herparametrisering $\chi: I^2\to B$ als in Voorbeeld 9.2.5. Dan gaat men gemakkelijk na dat $\partial_j(\Phi\circ\chi)$ een oriëntatiebehoudende herparametrisering van $\partial_j\Phi$ is. Derhalve veranderen de beide integralen in (9.12) niet als men Φ door $\Phi\circ\chi$ vervangt. Daarom kunnen we zonder verlies van algemeenheid veronderstellen dat $B=I^2$. Met Stelling 8.5.7 volgt nu dat:

$$\int_{\partial\Phi}\langle F(x)\,,\,d_1x\rangle = \int_{I^2}\langle AF(\Phi(y))D_1\Phi(y), D_2\Phi(y)\rangle\,dy. \tag{9.13}$$

Nu is $AF(\Phi(y))D_1\Phi(y) = \operatorname{rot}F(\Phi(y))\times D_1\Phi(y)$ wegens Definitie 9.1.13. Voorts is

$$\langle \operatorname{rot}F(\Phi(y))\times D_1\Phi(y), D_2\Phi(y)\rangle = \langle \operatorname{rot}F(\Phi(y)), D_1\Phi(y)\times D_2\Phi(y)\rangle$$

wegens Lemma 9.1.11. Het rechterlid van (9.13) is derhalve te herschrijven als

$$\int_{I^2} \langle \operatorname{rot} F \circ \Phi, D_1\Phi \times D_2\Phi \rangle(y)\, dy = \int_\Phi \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle(x)\, d_2x.$$

□

Voorbeeld 9.3.9 Zij $R > 0$ en zij $B = [0, R] \times [0, 2\pi]$. Zij $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door:

$$\Phi(r, \alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha, R^2 - r^2).$$

Dan is $\operatorname{im}(\Phi)$ het deel van de paraboloïde $x_3 = R^2 - (x_1^2 + x_2^2)$ dat gelegen is in de halfruimte $x_3 \geq 0$. Zie Figuur 18.

Zij nu F een C^1-vectorveld gedefinieerd op een open omgeving van $\operatorname{im}(\Phi)$ in R^3. Er geldt dat $\partial_1\Phi(r) = \Phi(r, 0)$ en dat $\partial_3\Phi(r) = \Phi(R - r, 2\pi) = \Phi(R - r, 0)$. Hieruit blijkt dat de kromme $\partial_3\Phi$ een herparametrisering van $\partial_1\Phi$ is met tegengestelde oriëntatie. De integralen van F langs beide krommen hebben derhalve tegengestelde waarden en vallen bij sommatie tegen elkaar weg. Verder is $\partial_4\Phi(\alpha) = \Phi(0, 2\pi - \alpha) = (0, 0, R^2)$. Deze kromme is constant, zodat de integraal van F langs deze kromme gelijk aan nul is.

Volgens de Stelling van Stokes geldt derhalve dat:

$$\int_\Phi \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle(x)\, d_2x = \int_\gamma \langle F(x)\, ,\, d_1x \rangle, \tag{9.14}$$

waarin $\gamma = \partial_2\Phi : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^3$ gegeven wordt door

$$\gamma(\alpha) = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0).$$

Zie Figuur 18. Merk op dat het beeld van γ gelijk is aan de cirkel in het vlak $x_3 = 0$ met middelpunt 0 en straal R.

Figuur 18: Figuur bij Voorbeeld 9.3.9

We verifiëren nu de gevonden formule (9.14) voor het speciale vectorveld F op R^3 gedefinieerd door $F(x) = (-x_2, x_1, x_3)$.

We berekenen eerst het rechterlid van (9.14). Er geldt dat $\gamma'(\alpha) = R(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ en $F(\gamma(\alpha)) = R(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$, dus

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle F(x)\, ,\, d_1 x \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\alpha)), \gamma'(\alpha) \rangle \, d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 \, d\alpha \\ &= 2\pi R^2. \end{aligned} \tag{9.15}$$

Tenslotte berekenen we het linkerlid van (9.14). Met een directe berekening volgt dat $\mathrm{rot}\, F(x) = (0, 0, 2)$ voor alle $x \in \mathrm{R}^3$. Voorts geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial r}(r, \alpha) &= (\cos\alpha, \sin\alpha, -2r), \quad \text{en} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(r, \alpha) &= (-r\sin\alpha, r\cos\alpha, 0). \end{aligned}$$

De derde component van het uitwendig produkt van deze vectoren is gelijk aan r. Hieruit volgt dat

$$\langle\, (\mathrm{rot}\, F) \circ \Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial r} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} \rangle (r, \alpha) = 2r,$$

dus

$$\int_\Phi \langle\, \mathrm{rot}\ F\, ,\, \nu \,\rangle(x)\, d_2 x = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r\, d\alpha\, dr = 2\pi R^2.$$

Inderdaad is deze uitkomst gelijk aan de in (9.15) gevonden waarde.

Voorbeeld 9.3.10 We beschouwen de C^2-afbeelding $\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Phi(\alpha, z) = (\cos\alpha, \sin\alpha, z).$$

Het beeld $\mathrm{im}\,(\Phi)$ is de cilindermantel bestaande uit de punten $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3$ met $x_1^2 + x_2^2 = 1$ en $0 \le x_3 \le 1$. Zij F een C^1-vectorveld gedefinieerd op een open omgeving van $\mathrm{im}\,(\Phi)$.

Er geldt dat $\partial_2\Phi(z) = \Phi(2\pi, z) = (1, 0, z)$. Voorts is $\partial_4\Phi(z) = \Phi(0, 1 - z) = (1, 0, 1 - z)$. De laatste kromme is een oriëntatie-omkerende herparametrisering van de eerste. De integralen van F langs deze krommen zijn derhalve tegengesteld, zodat hun som geen bijdrage levert aan de integraal $\int_{\partial\Phi} \langle F(x)\, ,\, d_1 x \rangle$. Met behulp van de Stelling van Stokes zien we nu dat

$$\int_\Phi \langle\, \mathrm{rot}\, F\, ,\, \nu \,\rangle(x)\, d_2 x = \int_{\gamma_0} \langle F(x)\, ,\, d_1 x \rangle + \int_{\gamma_1} \langle F(x)\, ,\, d_1 x \rangle, \tag{9.16}$$

waarbij $\gamma_0 = \partial_1\Phi$ en $\gamma_1 = \partial_3\Phi$, zie Figuur 19. Merk op dat $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^3$, $\alpha \mapsto (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, terwijl $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}^3$, $\alpha \mapsto (\cos\alpha, -\sin\alpha, 1)$. De krommen γ_0, γ_1 hebben als beelden de eenheidscirkels in de vlakken $x_3 = 0$ respectievelijk $x_3 = 1$. (Let op de richtingen waarin deze cirkels doorlopen worden!)

Figuur 19: Figuur bij Voorbeeld 9.3.10

We controleren tenslotte de hierboven gevonden formule (9.16) voor het vectorveld F op R^3 gedefinieerd door:

$$F(x) = (4x_2x_3, 2x_1x_3, 3x_1x_2).$$

Eerst bepalen we het rechterlid van (9.16). Er geldt dat $\gamma_0'(\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$ en dat $F(\gamma_0(\alpha)) = (0, 0, 3\sin\alpha\cos\alpha)$. Hieruit volgt dat $\langle\, F(\gamma_0(\alpha)), \gamma_0'(\alpha)\,\rangle = 0$, dus dat

$$\int_{\gamma_0} \langle\, F(x)\,,\, d_1x\,\rangle = 0.$$

Ook geldt $\gamma_1'(\alpha) = (-\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)$, en $F(\gamma_1(\alpha)) = (-4\sin\alpha, 2\cos\alpha, -3\sin\alpha\cos\alpha)$. Derhalve is

$$\langle\, F(\gamma_1(\alpha)), \gamma_1'(\alpha)\,\rangle = 4\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = 6\sin^2\alpha - 2,$$

dus

$$\int_{\gamma_1} \langle\, F(x)\,,\, d_1x\,\rangle = 6\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\; d\alpha - 4\pi = 6\pi - 4\pi = 2\pi.$$

Het rechterlid van (9.16) is in dit geval dus gelijk aan 2π.

Tenslotte berekenen we het linkerlid van (9.16). Met een directe berekening volgt dat: $\operatorname{rot} F(x) = (x_1, x_2, -2x_3)$, dus

$$\operatorname{rot} F(\Phi(\alpha, z)) = (\cos\alpha, \sin\alpha, -2z).$$

Voorts geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(\alpha, z) &= (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0),\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z}(\alpha, z) &= (0, 0, 1),
\end{aligned}$$

dus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(\alpha, z) \times \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\alpha, z) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0).$$

We concluderen dat

$$\langle \operatorname{rot} F \circ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \rangle(\alpha, z) = 1,$$

dus het linkerlid van (9.16) is gelijk aan

$$\int_\Phi \langle \operatorname{rot} F\,, \nu \rangle(x)\; d_2 x = \int_0^1 \int_0^{2\pi} d\alpha\; dz = 2\pi.$$

Hiermee is (9.16) gecontroleerd voor de speciale keuze van het vectorveld F.

Opmerking 9.3.11 De bovenstaande voorbeelden suggereren een andere versie van de Stelling van Stokes. Deze versie berust op het concept 2-dimensionale deelvariëteit met rand (die rand is een 1-dimensionale deelvariëteit). Een volledige behandeling van dit begrip vereist de impliciete functiestelling, die pas in Analyse 3 aan de orde zal komen. Wij beperken ons daarom tot enige intuïtieve opmerkingen die wellicht een ander perspectief geven dat verhelderend kan werken.

Zij X een 2-dimensionale deelvariëteit van R^3 met rand ∂X. Die rand is een 1-dimensionale deelvariëteit in R^3. In Voorbeeld 9.3.9 is $X = \operatorname{im}(\Phi)$ en $\partial X = \operatorname{im}(\gamma)$. In Voorbeeld 9.3.10 is $X = \operatorname{im}(\Phi)$ en $\partial X = \operatorname{im}(\gamma_0) \cup \operatorname{im}(\gamma_1)$. Men kan 1-dimensionale deelvariëteiten altijd voorzien van een 'oriëntatie' (doorlooprichting). Men kan 2-dimensionale variëteiten in vele gevallen (maar niet altijd!) voorzien van een oriëntatie, d.w.z. de keuze van een positieve 'doorstromingsrichting'. De keuze van een oriëntatie op X induceert altijd een oriëntatie op ∂X via de 'kurketrekker-regel'. In Figuur 20 wordt aan de hand van enige voorbeelden gesuggereerd hoe dit in zijn werk gaat.

Figuur 20: De kurketrekker-regel voor deelvariëteiten met rand

Er is een theorie van integratie van vectorvelden langs georiënteerde 1- en 2-dimensionale variëteiten waardoor uitdrukkingen als

$$\int_X \langle F, d_2x \rangle \qquad \text{en} \qquad \int_{\partial X} \langle F(x) \, , d_1x \rangle \tag{9.17}$$

een precieze betekenis hebben. De Stelling van Stokes luidt in deze context dan:

Is X een georiënteerde 2-dimensionale deelvariëteit met rand, en is de rand ∂X voorzien van de geïnduceerde oriëntatie, dan geldt voor ieder C^1-vectorveld F gedefinieerd op een open omgeving van X in R^3 *dat:*

$$\int_X \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle(x) \, d_2x = \int_{\partial X} \langle F(x) \, , \, d_1x \rangle.$$

In Voorbeeld 9.3.9 is deze formule equivalent met (9.14); in Voorbeeld 9.3.10 is de formule equivalent met (9.16).

In de praktijk berekent men integralen als in (9.17) door opsplitsing in integralen over geschikt gekozen lokale parametriseringen (zie ook Opmerking 9.2.10). Die lokaal gekozen parametriseringen dienen positief georiënteerd te zijn. Daarmee wordt het volgende bedoeld. Voor een lokale parametrisering $\gamma : I \to \mathrm{R}^3$ van ∂X dient $\gamma'(t)$ de doorlooprichting van ∂X in $\gamma(t)$ te hebben ($t \in I$) en voor een lokale parametrisering $\Phi : B \to \mathrm{R}^3$ van X dient de vector $D_1\Phi(y) \times D_2\Phi(y)$ dezelfde richting te hebben als de doorstromingsrichting van X in het punt $\Phi(y)$ ($y \in B$). In de Voorbeelden 9.3.9 en 9.3.10 zijn de afbeeldingen Φ globale parametriseringen van de betreffende 2-dimensionale deelvariëteiten. In Voorbeeld 9.3.9 is γ een globale parametrisering van ∂X, terwijl in Voorbeeld 9.3.10 de krommen γ_0 en γ_1 lokale parametriseringen van ∂X zijn waarvan de beelden X als vereniging hebben.

Nogmaals: de bovenstaande beschouwing is op dit moment uitermate intuïtief, met tal van ongedefinieerde begrippen. Het vergt de ontwikkeling van een theorie van integratie over deelvariëteiten om er precieze betekenis aan te geven. De beschouwing suggereert een kijk op de Stelling van Stokes die wellicht kan helpen bij het oplossen van problemen met behulp van de in dit dictaat ontwikkelde technieken.

De volgende stelling kan opgevat worden als de vlakke versie van de Stelling van Stokes. Het bewijs is analoog.

Stelling 9.3.12 **(Stelling van Green)** *Zij $\Phi : B \to \mathrm{R}^2$ een C^2-afbeelding die injectief is op B^{inw}, terwijl $\det D\Phi > 0$ op B^{inw}. Zij $F = (F_1, F_2)$ een C^1-vectorveld op een open omgeving van* $\operatorname{im}(\Phi)$ *in* R^2. *Dan is*

$$\int_{\Phi(B)} (D_1F_2(y) - D_2F_1(y)) \, dy = \int_{\partial\Phi} \langle F(x), d_1x \rangle. \tag{9.18}$$

Opmerking 9.3.13 De integraal in het rechterlid van de bovenstaande gelijkheid wordt op precies dezelfde manier gedefinieerd als in Definitie 9.3.6, maar nu met krommen in R^2 in plaats van R^3.

Bewijs: Op dezelfde wijze als in het bewijs van de Stelling van Stokes reduceren we tot het geval dat $B = I^2$ (met $I = [0,1]$). Met Stelling 8.5.7 vinden we dan dat

$$\int_{\partial\Phi} \langle\, F(x)\ ,\ d_1 x\,\rangle = \int_{I^2} \langle\, AF(\Phi(y))D_1\Phi(y), D_2\Phi(y)\,\rangle\ dy. \tag{9.19}$$

Nu is

$$\begin{aligned} AF(z) &= \begin{pmatrix} 0 & D_2F_1(z) - D_1F_2(z) \\ D_1F_2(z) - D_2F_1(z) & 0 \end{pmatrix} \\ &= [D_1F_2 - D_2F_1](z) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dus

$$AF(\Phi(y))D_1\Phi(y) = [D_2F_1 - D_1F_2](\Phi(y))\ (D_1\Phi_2(y), -D_1\Phi_1(y)),$$

en we zien dat

$$\begin{aligned} \langle\, AF(\Phi(y))D_1\Phi(y), D_2\Phi(y)\,\rangle &= [D_2F_1 - D_1F_2](\Phi(y)) \cdot \det D\Phi(y) \\ &= [D_2F_1 - D_1F_2](\Phi(y)) \cdot |\det D\Phi(y)|. \end{aligned}$$

De integraal in het rechterlid van (9.19) is daarom gelijk aan:

$$\int_{I^2} [D_2F_1 - D_1F_2](\Phi(y))\,|\det D\Phi(y)|\ dy.$$

De functie $D_2F_1 - D_1F_2$ is continu op im (Φ), terwijl de afbeelding Φ voldoet aan alle voorwaarden van de substitutiestelling. Met behulp van de substitutiestelling concluderen we tenslotte dat de hierboven gevonden integraal (en dus de integraal in het linkerlid van (9.19)) gelijk is aan die in het rechterlid van (9.18). □

Opmerking 9.3.14 Men kan de Stelling van Green ook afleiden uit de Stelling van Stokes. Immers via de injectieve lineaire afbeelding $x \mapsto (x, 0)$ kan men R^2 identificeren met de deelruimte $\mathrm{R}^2 \times \{0\}$ van R^3. Via deze identificatie correspondeert F met een vectorveld van de vorm $(F_1, F_2, 0)$. De rotatie van zo'n vectorveld wordt gegeven door

$$\mathrm{rot}\,(F_1, F_2, 0) = (0, 0, D_1F_2 - D_2F_1) = [D_1F_2 - D_2F_1]\, e_3.$$

Door de identificatie van R^2 met de deelruimte $\mathrm{R}^2 \times \{0\}$ van R^3 ziet men Φ als een afbeelding $B \to \mathrm{R}^3$ van de vorm $(\Phi_1, \Phi_2, 0)$. Uit de definiërende eigenschap van het uitprodukt volgt nu dat

$$\langle\, e_3, D_1(\Phi_1, \Phi_2, 0)(y) \times D_2(\Phi_1, \Phi_2, 0)(y)\,\rangle = \det \begin{pmatrix} 0 & D_1\Phi_1(y) & D_2\Phi_1(y) \\ 0 & D_1\Phi_2(y) & D_2\Phi_2(y) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det D\Phi(y).$$

De laatste determinant is positief voor alle $y \in B$, dus

$$\begin{aligned} &\langle\, \mathrm{rot}\,(F_1, F_2, 0) \circ (\Phi_1, \Phi_2, 0),\ D_1(\Phi_1, \Phi_2, 0) \times D_2(\Phi_1, \Phi_2, 0)\,\rangle = \\ &= [D_1F_2 - D_2F_1] \circ \Phi \cdot \langle\, e_3, D_1(\Phi_1, \Phi_2, 0) \times D_2(\Phi_1, \Phi_2, 0)\,\rangle \\ &= [D_1F_2 - D_2F_1] \circ \Phi \cdot |\det D\Phi|. \end{aligned} \tag{9.20}$$

De flux van het vectorveld $\operatorname{rot}(F_1, F_2, 0)$ door $(\Phi_1, \Phi_2, 0)$ wordt gegeven door de integraal van (9.20) over B. Wegens de substitutiestelling in R^2 is dit precies de integraal in het linkerlid van (9.18).

Voorbeeld 9.3.15 We beschouwen nogmaals het vectorveld F op R^2 uit Voorbeeld 8.3.3. Dus

$$F(x) = v + Lx,$$

met $v \in \mathrm{R}^2$, en $L : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ een lineaire afbeelding. Er geldt dat $D_1F_2(x) = L_{21}$ en $D_2F_1(x) = L_{12}$ voor alle $x \in \mathrm{R}^2$ (ga na). Zij Φ als in de bovenstaande stelling, dan volgt:

$$[L_{21} - L_{12}] \operatorname{vol}_2(\Phi(B)) = \int_{\partial\Phi} \langle\, F(x)\, ,\, d_1x\, \rangle. \tag{9.21}$$

Zij nu $r > 0$, zij $B = [0, r] \times [0, 2\pi]$ en zij $a \in \mathrm{R}^2$. We beschouwen de speciale afbeelding $\Phi : B \to \mathrm{R}^2$ gedefinieerd door:

$$\Phi(\rho, \alpha) = a + (\rho \cos\alpha, \rho \sin\alpha).$$

Dan is Φ injectief op B^{inw}. Voorts is $\det D\Phi(\rho, \alpha) = \rho > 0$ voor alle $(\rho, \alpha) \in B^{\mathrm{inw}}$. De afbeelding Φ voldoet derhalve aan alle voorwaarden van de Stelling van Green. Formule (9.21) geldt daarom voor deze speciale keuze van Φ.

Het beeld van Φ is een cirkelschijf met straal r en heeft dus oppervlakte πr^2. Het linkerlid van (9.21) is dus gelijk aan $\pi r^2\, (L_{21} - L_{12})$.

Het rechterlid kunnen we als volgt herschrijven. Er geldt dat $\partial_1\Phi(\rho) = (\rho, 0)$ en $\partial_3\Phi(\rho) = (r - \rho, 0)$. Deze krommen zijn elkaars omkering (zie Figuur 21). De integralen van F langs deze krommen vallen bij sommatie derhalve tegen elkaar weg. De kromme $\partial_4\Phi$ wordt gegeven door $\alpha \mapsto \Phi(0, 2\pi - \alpha) = a$, en is dus constant. De integraal van F langs deze kromme is derhalve 0. We concluderen dat het rechterlid van (9.21) gelijk is aan de integraal van F langs $\partial_2\Phi$. De laatste kromme wordt gegeven door $\partial_2\Phi(\alpha) = \Phi(r, \alpha) = \gamma(\alpha)$ met γ de kromme uit Voorbeeld 8.3.3. We concluderen langs deze weg opnieuw dat:

$$\pi r^2\, (L_{21} - L_{12}) = \int_{\gamma} \langle\, F(x)\, ,\, d_1x\, \rangle.$$

Figuur 21: Figuur bij Voorbeeld 9.3.15

Opmerking 9.3.16 Het bovenstaande voorbeeld suggereert een versie van de Stelling van Green analoog aan de versie van de Stelling van Stokes beschreven in Opmerking 9.3.11. We zullen deze versie hieronder intuïtief beschrijven.

Met behulp van de eerder genoemde impliciete functiestelling (die in Analyse 3 aan de orde zal komen) kan men het begrip begrensde open deelverzameling met omsluitende C^1-rand in R^n definiëren. Is U zo'n open deelverzameling, dan is de rand ∂U een C^1-deelvariëteit van dimensie $n-1$ (zie ook Opmerking 9.2.10). De kwalificatie 'omsluitend' geeft aan dat U overal langs zijn rand ∂U 'aan één kant ligt', zie Figuur 22 voor de betekenis hiervan.

Figuur 22: Open verzameling met een omsluitende resp. een niet-omsluitende rand

In het geval $n = 2$ is de rand ∂U een 1-dimensionale deelvariëteit. Deze rand kan georiënteerd worden volgens het volgende voorschrift: neem in een punt $x \in \partial U$ de eenheidsvector 'loodrecht' op ∂U die uit U wijst (men noemt deze vector de uitwendige normaal in x, voor een precieze definitie zijn de technieken van Analyse 3 nodig). De raakvector aan ∂U die verkregen wordt door x over een hoek $\frac{\pi}{2}$ in positieve richting te draaien correspondeert met de doorlooprichting van ∂U. In Figuur 23 wordt gesuggereerd hoe dit in zijn werk gaat.

De eerder genoemde versie van de Stelling van Green luidt in deze context als volgt:

Zij U een begrensde open verzameling met C^1-rand ∂U, en zij $F = (F_1, F_2)$ een C^1-vectorveld gedefinieerd op een open omgeving van de afsluiting $\bar{U}$. Dan geldt

$$\int_U [D_1 F_2 - D_2 F_1](x)\, dx = \int_{\partial U} \langle\, F(x)\, ,\, d_1 x\,\rangle.$$

Een andere notatie van de bovenstaande formule die men in de literatuur vaak tegenkomt ontstaat als men de notatie (x, y) voor de coördinaten in R^2 gebruikt, de notatie $dx\, dy$ voor $d(x, y)$, en de 1-vorm notatie voor de integraal van F langs ∂U (zie Opmerking 8.3.2):

$$\int_U [\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}]\, dx\, dy = \int_{\partial U} (F_1 dx + F_2 dy).$$

Figuur 23: Oriëntaties bij de Stelling van Green

9.4 De Stelling van Gauss

In deze paragraaf behandelen we de stelling van Gauss, ook *divergentiestelling* genaamd. Daarbij gaan we op intuïtieve wijze te werk. Bij de formulering worden begrippen gebruikt die pas in Analyse 3 precies gedefinieerd zullen worden. Voor een bewijs van de divergentiestelling verwijzen we naar het college Differentieerbare variëteiten. De stelling zal hier aan de hand van enige voorbeelden toegelicht worden.

Voor de formulering van de divergentiestelling is het begrip begrensde open deelverzameling van R^3 met omsluitende C^1-rand nodig. De rand ∂U van zo'n open verzameling U is een 2-dimensionale deelvariëteit van R^3 (zie ook Opmerking 9.3.16). Deze rand kan georiënteerd worden (d.w.z. voorzien van een richting van positieve doorstroming) als volgt. Voor iedere $x \in \partial U$ kan men het *raakvlak* $T_x\partial U$ in x aan ∂U definiëren. Voorts bestaat er precies één eenheidsvector $\nu(x) \in \mathrm{R}^3$ met

(a) $\nu(x) \perp T_x\partial U$;

(b) $\nu(x)$ wijst van U naar $\mathrm{R}^3 \setminus \bar{U}$.

De betekenis van de bovenstaande beweringen kan in precieze definities worden vastgelegd. Hiervoor is wederom de impliciete functiestelling vereist; we verwijzen naar Analyse 3. Door het bovenstaande wordt een continu vectorveld ν op ∂U gedefinieerd. Men noemt dit vectorveld wel de *uitwendige normaal* op ∂U. Zie Figuur 24 voor een illustratie van dit begrip.

Figuur 24: De uitwendige normaal

Definitie 9.4.1 Zij $U \subset \mathrm{R}^3$ een open verzameling en $F = (F_1, F_2, F_3)$ een C^1-vectorveld op U. Dan is de *divergentie* van F de functie $\operatorname{div} F : U \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$\operatorname{div} F(x) = D_1F_1(x) + D_2F_2(x) + D_3F_3(x). \tag{9.22}$$

Men kan formule (9.22) gemakkelijk onthouden door middel van de formele identiteit:

$$\operatorname{div} F = \left\langle \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Stelling 9.4.2 **(Stelling van Gauss)** *Zij U een begrensde open deelverzameling met omsluitende C^1-rand in R^3. Dan geldt voor ieder C^1-vectorveld gedefinieerd op een open omgeving van $\bar{U}$ dat:*

$$\int_U \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial U} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x. \tag{9.23}$$

Hierbij is ∂U georiënteerd volgens de uitwendige normaal.

Opmerking 9.4.3 Men kan aantonen dat de rand ∂U Jordan-meetbaar is met driedimensionaal volume nul. In verband hiermee verandert de integraal in het linkerlid van de bovenstaande identiteit niet als men als domein van integratie in plaats van U zijn afsluiting $\bar{U}$ neemt.

Voorbeeld 9.4.4 Zij $R > 0$ en zij $B_R = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| < R\}$. Dan is B_R een begrensde open verzameling met C^1-rand

$$\partial B_R = S_R = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| = R\}.$$

De uitwendige normaal op deze rand wordt gegeven door: $\nu(x) = x/\|x\| = x/R$. Volgens de divergentiestelling geldt voor ieder C^1-vectorveld gedefinieerd op een open omgeving van $\bar{B}_R$ dat:

$$\int_{\bar{B}_R} \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{S_R} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x. \tag{9.24}$$

We verifiëren deze formule eerst voor het speciale vectorveld $F(x) = x = (x_1, x_2, x_3)$. Dan is $\operatorname{div} F(x) = 3$. Voorts is $\langle F, \nu \rangle(x) = \langle x, x/R \rangle = R^{-1}\|x\|^2 = R$. Formule (9.24) is voor deze speciale keuze van het vectorveld dus gelijkwaardig met

$$\int_{\bar{B}_R} 3\, dx = \int_{S_R} R\, d_2x, \tag{9.25}$$

ofwel met

$$3\,\mathrm{vol}_3(\bar{B}_R) = R\,\mathrm{opp}(S_R).$$

De juistheid van deze formule volgt uit de reeds eerder bewezen formules $\mathrm{vol}_3(\bar{B}_R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ en $\mathrm{opp}(S_R) = 4\pi R^2$ (zie Opgave 7.2 (f) en Voorbeeld 9.2.12).

Tenslotte controleren we formule (9.24) ook voor de volgende speciale keuze van het vectorveld F :

$$F(x) = (x_1, 1, 1).$$

Dan is $\operatorname{div} F = 1$, dus de integraal in het linkerlid van (9.24) is gelijk aan $\operatorname{vol}_3(B_R) = \frac{4}{3}\pi R^2$. De integraal in het rechterlid berekenen we als volgt. Beschouw de C^1-afbeelding $\Phi : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Phi(\alpha, \theta) = R(\cos\alpha\cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta)$$

(sfeercoördinaten). Dan is $\operatorname{im}(\Phi)$ gelijk aan $\partial B_R = S_R$. De afbeelding Φ is C^1 en injectief op het inwendige van zijn domein. In Voorbeeld 9.2.12 zagen we dat

$$(D_1\Phi \times D_2\Phi)(\alpha, \theta) = R\cos\theta\, \Phi(\alpha, \theta).$$

Dit uitwendig produkt is ongelijk aan nul voor $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, en heeft de richting van de uitwendige normaal. De parametrisering Φ is dus positief georiënteerd (Opmerking 9.3.11) en we vinden:

$$\int_{S_R} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x = \int_{\Phi} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x.$$

Er geldt $F(\Phi(\alpha, \theta)) = (\cos\alpha\cos\theta, 1, 1)$, dus

$$\langle F \circ \Phi, D_1\Phi \times D_2\Phi \rangle(\alpha, \theta) = R^2 \cos\theta(\cos\alpha^2\cos^2\theta + \sin\alpha\cos\theta + \sin\theta).$$

Derhalve is

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x &= R^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos^2\alpha\cos^3\theta + \sin\alpha\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta]\, d\alpha\, d\theta \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\, d\alpha \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta + 0 + 0 \\
&= \pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\sin\theta \\
&= \pi R^2 \int_{-1}^{1} (1 - s^2)\, ds \\
&= \frac{4}{3}\pi R^2.
\end{aligned}$$

Deze waarde komt overeen met de eerder gevonden waarde van de integraal in het rechterlid van (9.24).

Voorbeeld 9.4.5 (Flux van Newtonvectorveld) We beschouwen het C^1-vectorveld F op $\mathrm{R}^3 \setminus \{0\}$ gedefinieerd door $F(x) = \|x\|^{-3}x$. Uit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ leidt men direct af dat $\frac{\partial}{\partial x_j}\|x\| = \|x\|^{-1}x_j$, dus

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{x_j}{\|x\|^3} = \frac{\|x\|^2 - 3x_j^2}{\|x\|^5}.$$

Sommatie over $1 \leq j \leq 3$ geeft tenslotte dat $\operatorname{div} F = 0$. Zij nu $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ een begrensde open verzameling met een omsluitende C^1-rand $\partial\Omega$ die georiënteerd is volgens de uitwendige normaal. Dan geldt:

$$\int_\Omega \langle F, \nu \rangle \, d_2x = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad 0 \notin \bar{\Omega} \\ 4\pi & \text{als} \quad 0 \in \Omega. \end{cases}$$

Om dit aan te tonen merken we op dat $\bar{\Omega}$ de disjuncte vereniging van Ω en $\partial\Omega$ is. Uit beide voorwaarden betreffende de ligging van 0 t.a.v. Ω volgt derhalve dat $0 \notin \partial\Omega$. In beide gevallen is F daarom continu op $\partial\Omega$ zodat de integraal gedefinieerd is.

Veronderstel nu eerst dat $0 \notin \bar{\Omega}$. Dan is F een C^1-vectorveld op de open omgeving $\mathrm{R}^3 \setminus \{0\}$ van $\bar{\Omega}$. Volgens de divergentiestelling is dus:

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x = \int_\Omega \operatorname{div} F(x) \, dx = 0.$$

Veronderstel nu dat $0 \in \Omega$. Aangezien Ω open is bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $B(0;\delta) \subset \Omega$. Door eventueel δ te verkleinen kunnen we bereiken dat de gesloten bol $\bar{B}(0;\delta)$ tot Ω behoort. Zij U het complement van $\bar{B}(0;\delta)$ in Ω. Dan is $U = \Omega \cap \mathrm{R}^3 \setminus \bar{B}(0;\delta)$, dus U is open wegens Lemma 1.5.7 en Lemma 1.5.9. De rand van U is gelijk aan $\partial\Omega \cup \partial B(0;\delta)$, met $\partial B(0;\delta) = S_\delta = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| = \delta\}$. Deze rand is C^1 en omsluit U, zie Figuur 25. Nu is $0 \notin \bar{U}$, dus uit het eerste deel van het bewijs volgt dat

$$0 = \int_{\partial U} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x + \int_{S_\delta} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x. \tag{9.26}$$

Hierbij is S_δ als deel van ∂U georiënteerd volgens de uit U wijzende normaal, zie Figuur 25. Deze normaal wordt gegeven door $\nu(x) = -\|x\|^{-1}x$ $(x \in S_\delta)$. Er geldt dus dat

$$\langle F(x), \nu(x) \rangle = \langle \|x\|^{-3}x, -\|x\|^{-1}x \rangle = -\|x\|^{-4}\langle x, x \rangle = -\|x\|^{-2} = -\delta^{-2}$$

voor elke $x \in S_\delta$. Hieruit volgt:

$$\int_{S_\delta} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x = -\delta^{-2}\operatorname{opp}(S_\delta) = -4\pi.$$

Combineren we dit met (9.26), dan volgt $\int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle(x) \, d_2x = 4\pi$.

Figuur 25: Figuur bij Voorbeeld 9.4.5

De stelling van Gauss geldt ook voor begrensde open verzamelingen Ω met een omsluitende *stuksgewijze* C^1-rand $\partial\Omega$. Verzamelingen van dit type zijn afgebeeld in Figuur 26. Het linkerlid van (9.23) is in dit geval gedefinieerd als de som van de integralen over de C^1-stukken (de achterliggende gedachte is dat de C^1-stukken slechts overlappen langs 1-dimensionale variëteiten, die een bijdrage nul leveren aan oppervlakte-integralen). Ter illustratie geven we een laatste voorbeeld.

Figuur 26: Open verzamelingen met een omsluitende stuksgewijze C^1-rand

Voorbeeld 9.4.6 **(Halve bol)** Zij U de halve bol $\{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| < 1 \ x_3 > 0\}$. Dan is ∂U opgebouwd uit de C^1-stukken $\partial_1 U = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| = 1, \ x_3 \geq 0\}$ (de 'halve sfeer') en

$\partial_2 U = \{x \in \mathrm{R}^3 \mid \|x\| \leq 1,\ x_3 = 0\}$ (het 'grondvlak'). Deze worden georiënteerd volgens de uitwendige normaal.

Is F een C^1-vectorveld gedefinieerd op een open omgeving van $\bar{U}$, dan geldt volgens de hierboven genoemde divergentiestelling dat

$$\int_U \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial_1 U} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x + \int_{\partial_2 U} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x. \tag{9.27}$$

We beschouwen nu het vectorveld F op R^3 gedefinieerd door

$$F(x) = (x_1x_3^2, x_1^2x_2 - x_3^2, 2x_1x_2 + x_2^2x_3).$$

In het onderstaande berekenen we de integralen in (9.27) over U en $\partial_2 U$, en gebruiken dan de formule (9.27) om de flux van F door de halve sfeer $\partial_1 U$ te berekenen. (Ga na dat een directe berekening van deze flux gecompliceerd is.)

We bepalen eerst de integraal van div F over U. Een directe berekening leert dat $\operatorname{div} F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|x\|^2$. Zij $B = [0,1] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, en zij $\Psi : B \to \mathrm{R}^3$ gedefinieerd door

$$\Psi(r, \alpha, \theta) = r(\cos\alpha, \cos\theta, \sin\alpha\cos\theta, \sin\theta)$$

(bolcoördinaten). De afbeelding Ψ is injectief op B^{inw}, en er geldt $\Psi(B) = \bar{U}$. De afbeelding Ψ is C^1, en heeft Jacobiaan $|\det D\Psi(r, \alpha, \theta)| = r^2\cos\theta$. Deze is ongelijk aan 0 op B^{inw}. De substitutiestelling is derhalve toepasbaar op de integraal van div F over $\bar{U}$ en geeft:

$$\int_{\bar{U}} \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos\theta\, d\theta\, d\alpha, dr = \frac{2\pi}{5}.$$

De flux van F door $\partial_2 U$ berekenen we als volgt. De uitwendige normaal wordt op $\partial_2 U$ gegeven door $\nu(x) = -(0, 0, 1)$. Derhalve is $\langle F, \nu \rangle(x) = -2x_1x_2 + x_2^2x_3 = -2x_1x_2$ voor $x \in \partial_2 U$. Dus volgt:

$$\int_{\partial_2 U} \langle F, \nu \rangle(x)\, d_2x = -\int_{\partial_2 U} x_1x_2\, d_2x.$$

De laatste integraal is gelijk aan de integraal van $-x_1x_2$ over de eenheidsschijf in R^2 (zie Voorbeeld 9.2.11). Door poolcoördinaten en de substitutiestelling te gebruiken vinden we dat deze integraal gelijk is aan

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 -r^3 \cos\alpha \sin\alpha\, dr\, d\alpha = 0.$$

Combineren we de gevonden uitkomsten met (9.27) dan vinden we tenslotte dat de flux van F door de halve sfeer $\partial_1 U$ gelijk is aan $\frac{2\pi}{5}$.

Hoofdstuk 10

Complex differentieerbare functies

10.1 Het lichaam der complexe getallen

In het college Algebra A heeft u reeds kennis gemaakt met het lichaam C van de complexe getallen. In dit hoofdstuk introduceren we deze uitbreiding van het lichaam der reële getallen opnieuw. Daarbij zal blijken dat de uitbreiding vanuit het standpunt van de analyse verbluffend natuurlijk is.

In onze aanpak zal C gelijk zijn aan R^2, met daarop de extra structuur van de complexe vermenigvuldiging, zie de onderstaande formule (10.2). Dit betekent dat alle analyse die in dit dictaat voor R^2 ontwikkeld is van toepassing is op C.

Definitie 10.1.1 Het *lichaam* C van de complexe getallen is de verzameling

$$\mathrm{R}^2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathrm{R}\},$$

waarin een optelling en een vermenigvuldiging gedefinieerd zijn op de volgende manier:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \tag{10.1}$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{10.2}$$

Door het bovenstaande wordt inderdaad een lichaam gedefinieerd. Aan de in het dictaat Analyse 1 geformuleerde lichaamsaxioma's (L1) t/m (L9) (zie Analyse 1, § 3.1) is voldaan: (L1) t/m (L4) zijn bekend uit de theorie van de vectorruimten. Wat betreft de vermenigvuldiging: de associativiteit (L5) rekent men gemakkelijk na, de commutativiteit (L6) is evident. Verder is $(1,0)$ eenheidselement ten aanzien van de vermenigvuldiging, en uit $(a,b)\cdot(a,-b) = (a^2+b^2, 0)$ volgt dat de inverse van $(a,b) \in \mathrm{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gegeven wordt door:

$$(a,b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}).$$

Tenslotte verifieert men de distributiviteit (L9) weer eenvoudig.

Door $a \in \mathrm{R}$ te identificeren met $(a,0) \in \mathrm{C}$ kan men R als deellichaam van C opvatten (want $(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$ en $(a,0)\cdot(b,0) = (ab,0)$). Bovendien is $a(b,c) = (a,0)\cdot(b,c) = (ab,ac)$, dus de vermenigvuldiging met scalairen in de reële vectorruimte R^2 stemt na deze identificatie overeen met de vermenigvuldiging van complexe getallen met reële getallen. In het vervolg zullen we R steeds op de bovenstaande manier met een deel van C identificeren; in overeenstemming daarmee schrijven we $a = (a,0)$ voor $a \in \mathrm{R}$.

Het element $(0,1)$ wordt in het vervolg met i genoteerd. Ieder element $(a,b) \in \mathrm{C}$ kan nu geschreven worden in de vorm $(a,0)+b(0,1)$, en dus:

$$(a,b) = a + bi.$$

Het complexe getal i heeft de eigenschap: $i^2 = -1$. Het product van twee complexe getallen berekent men nu eenvoudig door de distributieve wet te gebruiken:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Uiteraard is deze formule in overeenstemming met (10.2).

Definitie 10.1.2 Zij $z \in \mathrm{C}$. Dan is $z = x + yi$ voor zekere getallen $x, y \in \mathrm{R}$. We definiëren nu:

(a) $\mathrm{Re}\, z = x$, het *reële deel* van z;

(b) $\mathrm{Im}\, z = y$, het *imaginaire deel* van z;

(c) $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, de *absolute waarde* of *modulus* van z;

(d) $\bar{z} = x - yi$, de *complex geconjugeerde* of *toegevoegd complexe* van z.

Opmerking 10.1.3 (a) Merk op dat $\mathrm{Im}\, z$ een reëel getal is!

(b) Merk op dat voor $z \in \mathrm{R}$ de modulus $|z|$ gelijk is aan de absolute waarde van het reële getal z.

(c) Merk op dat voor alle $z \in \mathrm{C}$ geldt $|z| = \|z\|$; modulus en Euclidische norm stemmen derhalve overeen. Als $z, w \in \mathrm{C}$, dan is $|z-w|$ gelijk aan de Euclidische afstand $\|z-w\|$ van z tot w.

De meetkundige voorstelling van R^2 als coördinatenvlak levert een meetkundige voorstelling van C. Men spreekt daarom vaak van het *complexe vlak*. De punten z met $\mathrm{Im}\, z = 0$ vormen de *reële as*, die met $\mathrm{Re}\, z = 0$ de *imaginaire as*. De complexe getallen met $\mathrm{Re}\, z = 0$ (dus de punten van de imaginaire as) noemt men *zuiver imaginair*.

In het volgende lemma worden enige veel gebruikte eigenschappen opgesomd. Het bewijs is eenvoudig.

Lemma 10.1.4 **(Eigenschappen)** *Voor alle* $z, w \in \mathrm{C}$ *geldt:*

(a) $\mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}\, z + \mathrm{Re}\, w$; $\quad \mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}\, z + \mathrm{Im}\, w$;

(b) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$; $\quad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$;

(c) $\bar{\bar{z}} = z$;

(d) $z = \bar{z} \iff z \in \mathrm{R}$;

(e) $|z| = |\bar{z}|$;

(f) $z\bar{z} = |z|^2$;

(g) $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (mits $z \neq 0$); *als* $|z| = 1$ *dan* $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

(h) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$; $\quad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$;

(i) $|zw| = |z||w|$; *als* $z \neq 0$ *dan* $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.

In termen van de hierboven ingevoerde complexe notaties kunnen enige eigenschappen van de Euclidische norm op R^2 als volgt geformuleerd worden (zie Lemma's 1.2.2 en 1.2.5 en Corollarium 1.2.4).

Lemma 10.1.5 *Zij* $z, w \in \mathrm{C}$. *Dan geldt:*

(a) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ *en* $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
(b) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (driehoeksongelijkheid);
(d) $|z - w| \geq ||z| - |w||$ (omgekeerde driehoeksongelijkheid).

We beëindigen deze paragraaf met enige opmerkingen over de continuïteit van complexwaardige functies. Wat betreft de optelling en de reële scalarvermenigvuldiging kunnen we C zien als R^2; derhalve zijn de rekenregels uit Lemma 1.3.5 voor functies R^n æ C van toepassing.
Met betrekking tot de vermenigvuldiging in C gelden de volgende rekenregels.

Lemma 10.1.6

(a) *De vermenigvuldigingsafbeelding* $\mu : \mathrm{C} \times \mathrm{C} \to \mathrm{C}$, $(z, w) \mapsto zw$ *is continu (als afbeelding* $\mathrm{R}^2 \times \mathrm{R}^2 \simeq \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^2$*).*
(b) *Laat* $f, g : \mathrm{R}^n$ æ C *een tweetal functies zijn en zij* $a \in \mathrm{R}^n$. *Veronderstel voorts dat* $\lim_{x\to a} f(x) = \beta$ *en* $\lim_{x\to a} g(x) = \gamma$. *Dan is* $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \beta\gamma$.
(c) *Laat* $f, g : \mathrm{R}^n$ æ C *een tweetal functies zijn en zij* $a \in \mathrm{R}^n$. *Als* f *en* g *continu zijn in* a, *dan is ook de functie* $fg : \mathrm{R}^n$ æ C, $x \mapsto f(x)g(x)$ *continu in* a.

Bewijs: (a) Als afbeelding $\mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^2$ wordt μ gegeven door de formule $\mu(x, y, u, v) = (xu - yv, xv + yu)$. Met behulp van de gebruikelijke rekenregels lezen we hieruit de continuïteit af.

(b) Uit het gegeven volgt dat de functie (f, g) limiet (β, γ) heeft voor $x \to a$ (Lemma 1.3.4). Uit de continuïteit van μ volgt dat $\lim_{(z,w)\to(\beta,\gamma)} \mu(z, w) = \beta\gamma$. Passen we nu Lemma 1.3.12 toe op de samenstelling $\mu \circ (f, g)$, dan vinden we

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \mu(f(x), g(x)) = \mu(\beta, \gamma) = \beta\gamma.$$

(c) Dit volgt uit onderdeel (b) en de definitie van continuïteit. □

Ten aanzien van deling geldt een soortgelijk resultaat dat op geheel analoge wijze bewezen wordt.

Lemma 10.1.7

(a) *De afbeelding* $\iota : \mathrm{C} \setminus \{0\} \to \mathrm{C}$, $z \mapsto z^{-1}$ *is continu.*

(b) *Laat* $f, g : \mathrm{R}^n$ æ C *een tweetal functies zijn en zij* $a \in \mathrm{R}^n$. *Veronderstel voorts dat* $\lim_{x \to a} f(x) = \beta$ *en* $\lim_{x \to a} g(x) = \gamma$. *Als* $\gamma \neq 0$, *dan is* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\beta}{\gamma}$.

(c) *Laat* $f, g : \mathrm{R}^n$ æ C *een tweetal functies zijn en zij* $a \in \mathrm{R}^n$. *Als* f *en* g *continu zijn in* a, *terwijl* $g(a) \neq 0$, *dan is ook de functie* $\frac{f}{g} : \mathrm{R}^n$ æ C, $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ *continu in* a.

Opmerking 10.1.8 Onder een *complexe veeltermfunctie* (of *complex polynoom*) verstaan we een functie $p : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ van de vorm:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

met gegeven $a_k \in \mathrm{C}$ $(0 \leq k \leq n)$. De a_k heten de coëfficiënten van p. Is $a_n \neq 0$, dan heet n de *graad* van p. Aangezien de eerstegraads veelterm $z \mapsto z$ continu op C is, zien we door herhaald toepassen van de bovenstaande rekenregels dat iedere complexe veelterm p continu is op C.

Onder een *complexe rationale functie* verstaan we een functie $f : \mathrm{C}$ æ C van de vorm $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, met p en q complexe veeltermen, $q \neq 0$. Met de bovenstaande rekenregels leiden we af dat f continu is op zijn domein, d.w.z. op de verzameling van $z \in \mathrm{C}$ met $q(z) \neq 0$.

10.2 Poolcoördinaten

Aangezien C gedefinieerd is als R^2 met daarop de extra structuur van de complexe vermenigvuldiging, is alle analyse voor R^2 die tot nu toe ontwikkeld is ook geldig voor C. Zo kan men spreken van differentieerbaarheid van een functie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ (Definitie 2.3.1). Schrijf $f = (f_1, f_2) = f_1 + i f_2$, met f_1, f_2 reëelwaardige functies $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$. We gebruiken ook de voor de hand liggende notaties: $\mathrm{Re}\, f = f_1$ en $\mathrm{Im}\, f = f_2$. Wegens Lemma 1.3.4 is f differentieerbaar op R dan en slechts dan als $f_1 = \mathrm{Re}\, f$ en $f_2 = \mathrm{Im}\, f$ dat zijn. Bovendien wordt de afgeleide in dat geval gegeven door $f' = f_1' + i f_2'$.

Lemma 10.2.1 *Er is precies één differentieerbare functie* $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ *met* $\varphi'(t) = i\varphi(t)$ *voor alle* $t \in \mathrm{R}$ *en met* $\varphi(0) = 1$. *Deze functie wordt gegeven door* $\varphi(t) = \cos t + i \sin t$.

Bewijs: Is $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ een functie, dan schrijven we $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1 + i\varphi_2$, met $\varphi_1, \varphi_2 : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$. Er geldt dat $i\varphi(t) = i\varphi_1 - \varphi_2 = (-\varphi_2, \varphi_1)$. Met de hierboven gemaakte opmerking blijkt hieruit dat de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn.

(a) de functie φ is differentieerbaar en voldoet aan: $\varphi' = i\varphi$ en $\varphi(0) = 1$;

(b) de functies φ_1 en φ_2 zijn differentieerbaar en voldoen aan $\varphi_1' = -\varphi_2$, $\varphi_2' = \varphi_1$ en $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_2(0) = 0$.

In Analyse 1 is bewezen dat er precies één tweetal functies (φ_1, φ_2) is dat aan (b) voldoet, namelijk $(\varphi_1, \varphi_2) = (\cos, \sin)$. □

Het bovenstaande lemma verschaft motivatie voor de volgende definitie.

Definitie 10.2.2 Voor $t \in \mathbb{R}$ definiëren we de *e-macht* van het imaginaire getal *it* door

$$e^{it} := \cos t + i \sin t.$$

Merk op dat $|e^{it}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. Het complexe getal e^{it} is dus gelegen op de cirkel

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

met middelpunt 0 en straal 1 in het complexe vlak; deze cirkel wordt ook wel de *complexe eenheidscirkel* genoemd.

De meetkundige betekenis van het volgende lemma is evident.

Lemma 10.2.3 (Eigenschappen) *Voor alle $\varphi \in \mathbb{R}$ en $\psi \in \mathbb{R}$ geldt:*

(a) $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i\varphi + i\psi}$;
(b) $(e^{i\varphi})^{-1} = e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}}$.

Bewijs: Voor (a) merken we op dat:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}e^{i\psi} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \\ &= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\ &= e^{i(\varphi+\psi)}. \end{aligned}$$

Voor (b) merken we op dat uit (a) volgt: $e^{-i\varphi}e^{i\varphi} = e^0 = 1$. Voorts is $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi = \overline{e^{i\varphi}}$. □

Voorbeeld 10.2.4 (Formule van De Moivre) Door herhaald toepassen van Lemma 10.2.3 volgt dat

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi},$$

voor $\varphi \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{Z}$. Door beide imaginaire e-machten in reëel en imaginair deel te ontbinden volgt de *Formule van De Moivre*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Met de formule van De Moivre kan men onder meer $\cos n\varphi$ en $\sin n\varphi$ uitdrukken in $\cos\varphi$ respectievelijk $\sin\varphi$. We lichten dit toe voor $n = 3$.

$$\sin 3\varphi = \mathrm{Im}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,$$

$$\cos 3\varphi = \mathrm{Re}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = -3\cos\varphi + 4\cos^3\varphi.$$

Uit deze formules leidt men vervolgens af:

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi,$$

$$\cos^3\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi.$$

Lemma 10.2.5 (Ontbinding in poolcoördinaten)

(a) *Iedere* $z \in \mathbb{C}$ *is te schrijven als* $z = re^{i\varphi}$, met $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$.

(b) *Als* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, *dan geldt* $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(c) *Als* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *dan geldt de ontbinding in* (a) *voor unieke* $r > 0$ *en* $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

Bewijs: (a): Zij $r = |z|$. Dan is $z = rw$ voor zekere $w \in \mathbb{T}$ (als $|z| = 0$, dan $r = 0$, en de formule geldt voor iedere w). Uit Analyse 1, Stelling 7.5.7, volgt dat de functie $t \mapsto e^{it}$ de reële rechte $\mathbb{R}$ afbeeldt op de eenheidscirkel $\mathbb{T}$. Er is dus een $\varphi \in \mathbb{R}$ met $w = e^{i\varphi}$.

(b): Uit Lemma 10.2.3 volgt dat $e^{2k\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1$ voor alle $k \in \mathbb{Z}$. Is $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ dan volgt dus $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}e^{2k\pi i} = e^{i\varphi_2}$. Is omgekeerd $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2}$, dan zijn er $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ zo dat $\psi_j := \varphi_j + 2\pi k_j \in [0, 2\pi[$ voor $j = 1, 2$. Met het zojuist bewezene volgt nu dat $e^{i\psi_1} = e^{i\psi_2}$. In Analyse 1, Stelling 7.5.7 is bewezen dat $t \mapsto e^{it}$ het interval $[0, 2\pi[$ injectief afbeeldt naar $\mathbb{T}$. Derhalve is $\psi_1 = \psi_2$, dus $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi(k_2 - k_1) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(c): Is $z = re^{i\psi}$, dan is $\psi + 2k\pi \in]-\pi, \pi]$ voor een $k \in \mathbb{Z}$. Schrijf $\varphi = \psi + 2k\pi$. Dan is $z = re^{i\varphi}$. Er zijn dus $r > 0$ en $\varphi \in]-\pi, \pi]$ te vinden zo dat $z = re^{i\varphi}$. Is bovendien $z = r'e^{i\varphi'}$ met $r' > 0$, $\varphi' \in]-\pi, \pi]$, dan is $r = |z| = r'$, dus ook $e^{i\varphi} = e^{i\varphi'}$. Uit deze laatste formule volgt met onderdeel (b) dat $\varphi - \varphi' = 2\pi k$ voor een $k \in \mathbb{Z}$. Uit $\varphi, \varphi' \in]-\pi, \pi]$ volgt echter $|\varphi - \varphi'| < 2\pi$, dus $k = 0$, dus $\varphi = \varphi'$. Hiermee is de uniciteit aangetoond. □

In het vervolg schrijven we $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definitie 10.2.6 (Argument) Zij $z \in \mathbb{C}^*$, dan heet de unieke $\varphi \in]-\pi, \pi]$ waarvoor $z = |z|e^{i\varphi}$ *het argument* van z, notatie: $\arg z$. De getallen $|z|$ en $\arg z$ heten de *poolcoördinaten* van z.

Meetkundig is het argument van z de hoek die de halfrechte vanuit 0 door z maakt met de positieve reële as. De functie arg is een afbeelding van $\mathbb{C}^*$ naar $]-\pi, \pi]$, die constant is op halfrechten vanuit 0. Voor het argument kan men eenvoudig allerlei formules bewijzen, die elk slechts op een deel van het complexe vlak gelden:

Lemma 10.2.7 *Zij* $z = x + iy$ *met* $x, y \in \mathbb{R}$ *en* $z \neq 0$. *Dan geldt:*

(a) $\arg z = \arctan \frac{y}{x}$ *als* $x > 0$;

(b) $\arg z = \arcsin \frac{y}{|z|}$ *als* $x \geq 0$;

(c) $\arg z = \arccos \frac{x}{|z|}$ *als* $y \geq 0$;

(d) $\arg z = -\arccos \frac{x}{|z|}$ *als* $y < 0$;

(e) $\arg \bar{z} = -\arg z$ *tenzij* $y = 0$ *en* $x \leq 0$.

Lemma 10.2.8 (Continuïteit van modulus en argument)

(a) *De functie* $z \mapsto |z|$ *is uniform continu op* $\mathbb{C}$;

(b) *De functie* $z \mapsto \arg z$ *is continu op* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

(*Hierbij is* $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$).

Bewijs: (a): Uit de driehoeksongelijkheid (Lemma 10.1.5 (c)) leidt men af dat

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

Als dus $|z - w| < \varepsilon$ dan is ook $||z| - |w|| < \varepsilon$, waaruit het gewenste volgt.

(b): Dit volgt onmiddellijk uit de formules van Lemma 10.2.7. □

In het vervolg analyseren we de complexe vermenigvuldiging meetkundig met behulp van poolcoördinaten.

Lemma 10.2.9 *Bij de vermenigvuldiging van twee complexe getallen worden de absolute waarden vermenigvuldigd en de argumenten modulo 2π opgeteld.*

Bewijs: Dit volgt uit Lemma 10.1.4 (i) en Lemma 10.2.3. □

Is $\alpha \in \mathbb{C}$ dan definiëren we de 'vermenigvuldigingsafbeelding' $V_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door $V_\alpha : z \mapsto \alpha z$. Als afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is dit een lineaire afbeelding, immers

$$V_\alpha(z + w) = \alpha(z + w) = \alpha z + \alpha w = V_\alpha(z) + V_\alpha(w)$$

vanwege de distributieve wet, terwijl voor $z \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$ geldt: $V_\alpha(\lambda z) = \lambda V_\alpha(z)$ vanwege de commutativiteit van de vermenigvuldiging.

Schrijven we $\alpha = a + ib$, dan geldt $V_\alpha(1, 0) = \alpha \cdot 1 = \alpha = (a, b)$ en $V_\alpha(0, 1) = \alpha i = (-b, a)$. De matrix van V_α ten aanzien van de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ wordt derhalve gegeven door

$$\operatorname{mat}(V_{a+bi}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

In het bijzonder volgt hieruit dat voor $r \geq 0$ en $\varphi \in \mathbb{R}$ geldt:

$$\operatorname{mat}(V_{re^{i\varphi}}) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldiging met $re^{i\varphi}$ correspondeert meetkundig dus met een rotatie over hoek φ, gevolgd door een scalarvermenigvuldiging met r. Hieruit volgt nogmaals Lemma 10.2.9.

10.3 Wortels en de hoofdstelling van de algebra

Het volgende resultaat is een toepassing van de ontbinding in poolcoördinaten.

Lemma 10.3.1 *Voor ieder complex getal $w \in \mathbb{C}$ bestaat een $z \in \mathbb{C}$ met $z^2 = w$.*

Bewijs: Schrijf $w = re^{i\varphi}$, met $r = |w|$ en $\varphi \in \mathbb{R}$. Dan voldoet $z = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\varphi}$. Immers:

$$z^2 = (\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\varphi})^2 = (\sqrt{r})^2\, e^{\frac{1}{2}i\varphi + \frac{1}{2}i\varphi} = re^{i\varphi} = w.$$

□

Het bovenstaande idee kunnen we algemener gebruiken om bij gegeven gehele $p \geq 1$ en $w \in \mathrm{C}$ de oplossingen van de vergelijking

$$z^p = w \tag{10.3}$$

te vinden. Als $w = 0$, dan is $z = 0$ de enige oplossing van de vergelijking. In het vervolg concentreren we ons daarom op het geval $w \neq 0$. We behandelen nu eerst het geval $w = 1$.

Gevolg 10.3.2 *Zij p geheel, $p \geq 1$. Dan heeft de vergelijking $z^p = 1$ precies p oplossingen. Deze worden gegeven door:*

$$z = e^{k\frac{2\pi i}{p}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}. \tag{10.4}$$

Opmerking 10.3.3 De in (10.4) gedefinieerde complexe getallen heten de complexe *p-de eenheidswortels,* ze verdelen de eenheidscirkel T in p delen van gelijke lengte.

Bewijs: Veronderstel dat $z^p = 1$. Dan is $|z|^p = 1$, en aangezien $|z| \geq 0$ volgt hieruit dat $|z| = 1$. Dus $z = e^{i\varphi}$ met $\varphi \in \mathrm{R}$. Uit $z^p = 1$ volgt nu dat $e^{ip\varphi} = 1 = e^0$, dus $p\varphi = 2\pi m$ voor zekere $m \in \mathrm{Z}$. Hieruit volgt dat $\varphi = 2\pi m/p$. Schrijf $m = np + k$ met $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, dan volgt (10.4). Omgekeerd volgt uit (10.4) dat $z^p = 1$. De oplossingen van de vergelijking $z^p = 1$ worden dus inderdaad precies gegeven door (10.4). Wegens Lemma 10.2.5 (c) zijn de gegeven oplossingen twee aan twee verschillend. □

Lemma 10.3.4 *Zij p geheel, $p \geq 1$. Zij $w \in \mathrm{C} \setminus \{0\}$. Dan heeft de vergelijking $z^p = w$ precies p oplossingen. Deze worden gegeven door*

$$z = \sqrt[p]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{p}} \zeta_k, \quad k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \tag{10.5}$$

met $\zeta_k = e^{k\frac{2\pi i}{p}}$ de p-de eenheidswortels.

Bewijs: Schrijf $w = re^{i\varphi}$ met $r = |w|$ en $\varphi = \arg w$. Dan gaat men gemakkelijk na dat $z_0 = \sqrt[p]{r}e^{\frac{i\varphi}{p}}$ voldoet aan $z_0^p = w$. De elementen (10.5) laten zich herschrijven als $z = z_0\zeta$, met ζ een p-de eenheidswortel, en voldoen derhalve aan de vergelijking $z^p = w$.

Laat omgekeerd $z \in \mathrm{C}$ voldoen aan $z^p = w$. Schrijf $\zeta = \frac{z}{z_0}$. Dan is

$$\zeta^p = \left(\frac{z}{z_0}\right)^p = \frac{z^p}{z_0^p} = 1,$$

dus ζ is een p-de eenheidswortel. Iedere oplossing van de vergelijking $z^p = w$ is derhalve van de vorm (10.5). □

Voorbeeld 10.3.5 De oplossingen van de vergelijking $z^4 = -2$ kunnen als volgt gevonden worden. Er geldt: $|-2| = 2$, en $\arg(-2) = \pi$, dus de oplossingen worden gegeven door $z = \sqrt[4]{2}e^{i\psi}$ met

$$\psi \in \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

De oplossingen zijn derhalve:

$$z = \sqrt[4]{2}\,\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt[4]{2}}.$$

In het vervolg is p steeds een complexe veeltermfunctie van de graad $n \geq 1$. Dus

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \tag{10.6}$$

met coëfficiënten $a_j \in \mathrm{C}$, $a_n \neq 0$. Onder een *nulpunt* of *wortel* van p in C verstaan we een $\alpha \in \mathrm{C}$ met $p(\alpha) = 0$.

In de rest van deze paragraaf zullen we de volgende belangrijke generalizatie van Lemma 10.3.4 bewijzen.

Stelling 10.3.6 **(Hoofdstelling van de algebra)** *De veelterm p heeft tenminste één nulpunt in* C.

Ons eerste doel is te bewijzen dat $|p(z)|$ een minimale waarde op C aanneemt. Zij

$$m = \inf\{|p(z)| \mid z \in \mathrm{C}\}.$$

(Deze definitie is correct, want de vermelde deelverzameling van R is niet-leeg en naar onderen begrensd door 0.) We zullen laten zien dat er een $\alpha \in \mathrm{C}$ bestaat met $|p(\alpha)| = m$. Daartoe zullen we Gevolg 1.6.5 gebruiken. Probleem daarbij is dat C niet begrensd is. Dit kunnen we ondervangen met het volgende lemma, dat zegt dat $|p(z)|$ groot wordt als $|z| \to \infty$.

Lemma 10.3.7 *Voor iedere $M > 0$ bestaat er een $R > 0$ zo dat $|z| \geq R \Rightarrow |p(z)| \geq M$.*

Bewijs: De volgende schatting brengt tot uitdrukking dat de term $a_n z^n$ de overige domineert:

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n|\,|1 + a_n^{-1}a_{n-1}\,z^{-1} + \cdots + a_n^{-1}a_0\,z^{-n}| \\
&\geq |a_n z^n|\,(\,1 - |a_n^{-1}a_{n-1}\,z^{-1} + \cdots + a_n^{-1}a_0\,z^{-n}|\,) \\
&= |a_n||z|^n\,(1 - |r(z^{-1})|),
\end{aligned}$$

waarin we de notatie:

$$r(w) = a_n^{-1}(a_{n-1}w + \cdots a_0 w^n)$$

gebruikt hebben. De functie r is een veelterm, dus continu. Derhalve is $\lim_{w\to 0} r(w) = r(0) = 0$. In het bijzonder bestaat er dus een $\delta > 0$ zo dat $|w| < \delta \Rightarrow |r(w)| \leq \frac{1}{2}$. Voor $z \in \mathrm{C}$ met $|z| > 1/\delta$ geldt dus $|r(z^{-1})| \leq \frac{1}{2}$, zodat:

$$|p(z)| \geq |a_n||z|^n(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}|a_n||z|^n.$$

Nemen we $R = \max\{(2|a_n|^{-1}M)^{1/n}, \delta^{-1} + 1\}$ dan geldt voor $|z| \geq R$ dat $|p(z)| \geq M$. $\square$

Lemma 10.3.8 *Er is een $\alpha \in \mathrm{C}$ zo dat $|p(\alpha)| = m$.*

Bewijs: Wegens het voorgaande lemma bestaat er een $M > 0$ zo dat $|z| \geq M \Rightarrow |p(z)| \geq m+1$. De functie $z \mapsto |p(z)|$ is (als samenstelling van de continue functies p en $w \mapsto |w|$) continu, dus neemt op de gesloten en begrensde verzameling $\bar{B}(0; M) = \{z \in \mathrm{C} : |z| \leq M\}$ zijn minimum aan in een punt α. Merk op dat $|p(\alpha)| \geq m$.

Voor alle $z \in \mathrm{C}$ geldt: (a) $|z| \leq M \Rightarrow |p(z)| \geq |p(\alpha)|$ en (b) $|z| \geq M \Rightarrow |p(z)| \geq m + 1$. In ieder geval geldt dus dat $\min(|p(\alpha)|, m+1)$ een ondergrens voor $\{|p(z)| : z \in \mathrm{C}\}$ is, dus $\min(|p(\alpha)|, m+1) \leq m$. We concluderen dat $|p(\alpha)| \leq m$, en wegens het hierboven reeds opgemerkte concluderen we tenslotte dat $|p(\alpha)| = m$. □

Voltooiing van het bewijs van de hoofdstelling. We zullen het bewijs van de hoofdstelling voltooien door aan te tonen dat $m = 0$ moet zijn. Veronderstel dat $m \neq 0$, dus $m > 0$. Dan zullen we laten zien dat we voor kleine $\varepsilon > 0$ een z_ε in de buurt van α kunnen vinden zo dat $|p(z_\varepsilon)| \leq (1-\varepsilon)|p(\alpha)|$. Dit is dan in tegenspraak met het feit dat $|p(z)| \geq m = |p(\alpha)|$ voor alle $z \in \mathrm{C}$.

We vinden z_ε door $p(z)$ te herschrijven als

$$p(z) = p(\alpha) + b_1(z-\alpha)^1 + \cdots b_n(z-\alpha)^n, \tag{10.7}$$

met coëfficienten $b_j \in \mathrm{C}$. Dat dit kan ziet men eenvoudig in door in het rechterlid van (10.6) de substitutie $z = \alpha + (z - \alpha)$ uit te voeren en vervolgens te ordenen naar machten van $z - \alpha$. In het bijzonder ziet men zo dat $b_n = a_n \neq 0$. Laat k het kleinste positieve gehele getal zijn met $b_k \neq 0$. Dan kunnen we (10.7) herschrijven als

$$\begin{aligned} p(z) &= p(\alpha) + b_k(z-\alpha)^k + b_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots b_n(z-\alpha)^n \\ &= p(\alpha) + b_k(z-\alpha)^k + R(z). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Het idee is nu dat $R(z)$ een orde kleiner is dan de overige termen van de bovenstaande identiteit als $z \to \alpha$. We proberen daarom eerst z_ε zo te vinden dat

$$p(\alpha) + b_k(z_\varepsilon - \alpha)^k = (1 - 2\varepsilon)\, p(\alpha), \tag{10.9}$$

oftewel

$$(z_\varepsilon - \alpha)^k = -\frac{2\varepsilon}{b_k}\, p(\alpha). \tag{10.10}$$

Dit is mogelijk voor iedere $\varepsilon > 0$, op grond van Lemma 10.3.4. Combineren we (10.8) en (10.9) dan vinden we:

$$p(z_\varepsilon) = (1 - 2\varepsilon)\, p(\alpha) + R(z_\varepsilon). \tag{10.11}$$

Merk op dat uit (10.10) volgt dat

$$|z_\varepsilon - \alpha| = \sqrt[k]{\frac{2\varepsilon\, |p(\alpha)|}{|b_k|}} = C\varepsilon^{1/k} \qquad (\varepsilon \downarrow 0),$$

met $C > 0$. Dus

$$\frac{|R(z_\varepsilon)|}{\varepsilon} \leq b_{k+1}C^{k+1}\varepsilon^{1/k} + \cdots + b_n C^n \varepsilon^{\frac{n-k}{k}}$$

en de laatste uitdrukking heeft limiet 0 voor $\varepsilon \downarrow 0$. In het bijzonder geldt dus dat $|R(z_\varepsilon)| < \varepsilon |p(\alpha)|$ voor $\varepsilon > 0$ voldoende dicht bij 0. Combineren we dit met (10.11) dan zien we dat voor $\varepsilon > 0$ voldoende dicht bij 0 de gewenste schatting

$$|p(z_\varepsilon)| \leq (1-\varepsilon)|p(\alpha)|$$

geldt. Hiermee is het bewijs voltooid. □

Gevolg 10.3.9 **(Ontbinding in lineaire factoren)** *De veelterm p heeft ten hoogste n complexe nulpunten. Zij $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ een nummering van de nulpunten van p. Dan zijn er unieke $m_j \in \mathrm{Z}_{>0}$, $1 \leq j \leq k$ zo dat*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - \alpha_j)^{m_j}.$$

Opmerking 10.3.10 Het getal m_j heet de *multipliciteit* van de wortel α_j. Merk op dat $1 \leq k \leq n$ en dat $m_1 + \cdots + m_k = n$.

Bewijs: Dit volgt door toepassing van de hoofdstelling en het succesievelijk uitdelen van lineaire factoren. We verwijzen naar de algebra colleges. □

10.4 Complex differentiëren

Aangezien deling mogelijk is in C kan men de definitie van differentieerbaarheid uit Analyse 1 direct generaliseren naar functies f : C æ C. Dit leidt tot het begrip *complexe differentieerbaarheid* dat we in deze paragraaf zullen bestuderen. Anderzijds kan men spreken over totale differentieerbaarheid van dergelijke functies (opgevat als functies R^2 æ R^2). Later in deze paragraaf zullen we het verband tussen deze twee begrippen onderzoeken.

Definitie 10.4.1 **(Complex differentieerbaar)** Een functie f : C æ C heet *complex differentieerbaar* in een punt $a \in \mathrm{C}$ als a inwendig punt van $\mathrm{dom}(f)$ is en $\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ bestaat (in C). De waarde van de limiet heet de *afgeleide* van f in a en wordt genoteerd met $f'(a)$ of $\frac{df}{dz}(a)$, dus:

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}. \tag{10.12}$$

Voorbeeld 10.4.2 (a) De constante functie $f : z \mapsto c$ is in elk punt van C complex differentieerbaar met afgeleide 0.

(b) De functie $g : z \mapsto z$ is differentieerbaar op C en er geldt: $g'(z) = 1$ voor alle $z \in \mathrm{C}$.

De bovenstaande definitie is analoog aan Definitie 7.1.1 uit het Analyse 1 dictaat. De volgende bekende stellingen uit Analyse 1 blijven gelden. De bewijzen gaan in essentie onveranderd door (met C in plaats van R); we laten ze daarom achterwege.

Stelling 10.4.3 **(Anal. 1, Stelling 7.1.6)** *Zij* f : C æ C *complex differentieerbaar in* $a \in$ C. *Dan is* f *continu in* a.

Stelling 10.4.4 **(Rekenregels, Anal. 1, Stelling 7.2.1)** *Laten* f, g : C æ C *complex differentieerbaar in* $a \in$ C *zijn, en zij* $\lambda \in$ C. *Dan geldt:*

(a) λf *is complex differentieerbaar in* a *en* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$;

(b) $f + g$ *is complex differentieerbaar in* a *en* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

(c) fg *is complex differentieerbaar in* a *en* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(d) *Indien* $g(a) \neq 0$, *dan is* $\frac{f}{g}$ *complex differentieerbaar in* a *en er geldt:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Door herhaald toepassen van de rekenregels leiden we af:

Gevolg 10.4.5 *Zij* $n \geq 1$. *De functie* $z \mapsto z^n$ *is complex differentieerbaar op* C *met afgeleide:*

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}.$$

Complexe veeltermen en rationale functies zijn differentieerbaar in elk punt van hun domein.

Stelling 10.4.6 **(Kettingregel, Anal. 1, Stelling 7.2.2)** *Is* f : C æ C *complex differentieerbaar in* $a \in$ C *en is* g : C æ C *complex differentieerbaar in* $f(a)$, *dan is de samenstelling* $g \circ f$ *complex differentieerbaar in* a *met afgeleide:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Stelling 10.4.7 **(Afgeleide van inverse, Anal. 1, Stelling 7.2.4)** *Zij* $V, W \subset$ C *en laat* $f : V \to W$ *een bijectieve afbeelding zijn met inverse* $g : W \to V$. *Is* f *complex differentieerbaar in* $a \in$ C, *terwijl* $f'(a) \neq 0$, *en is* g *continu in* $f(a)$, *dan is* g *complex differentieerbaar in* $f(a)$ *en er geldt:*

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Opmerking 10.4.8 Eigenschappen van differentieerbaarheid die verband houden met de ordening van R (stelling van Rolle, middelwaardestelling) hebben geen direct analogon voor complex differentieerbare functies.

In het vervolg bestuderen we het verband tussen de complexe differentieerbaarheid en de totale differentieerbaarheid van een functie f : C æ C. Is $\alpha \in$ C dan schrijven we V_α voor de reëel lineaire afbeelding $z \mapsto \alpha z$, zie ook §10.2.

Lemma 10.4.9 *Zij f : C æ C complex differentieerbaar in een punt $a \in \mathrm{dom}(f)$. Dan is f totaal differentieerbaar in a met afgeleide $Df(a) = V_{f'(a)}$.*

Bewijs: Definieer de functie ρ : C æ C door $\rho(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$. Dan volgt uit (10.12) dat $\lim_{h\to 0} \frac{\rho(h)}{h} = 0$. Nu is $|h^{-1}\rho(h)| = |h|^{-1}|\rho(h)|$, dus er volgt ook:

$$\rho(h) = o(|h|) \quad (h \to 0).$$

Uit de definitie van ρ volgt dat

$$f(a+h) = f(a) + V_{f'(a)}(h) + \rho(h).$$

Aangezien $V_{f'(a)}$ lineair is als afbeelding $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ concluderen we dat f totaal differentieerbaar is in a, met totale afgeleide $Df(a) = V_{f'(a)}$. □

De natuurlijke vraag doet zich nu voor wanneer omgekeerd totale differentieerbaarheid complexe differentieerbaarheid impliceert. De volgende stelling geeft een antwoord.

Stelling 10.4.10 *Zij f : C æ C een functie en a een inwendig punt van $\mathrm{dom}(f)$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *f is complex differentieerbaar in a;*

(b) *f is totaal differentieerbaar in a en de totale afgeleide $Df(a)$ is complex lineair (d.w.z. commuteert met de complexe scalarvermenigvuldiging);*

(c) *f is totaal differentieerbaar in a en de partiële afgeleiden van f in a voldoen aan:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a); \tag{10.13}$$

(d) *f is totaal differentieerbaar in a en $Df(a) = V_\alpha$ voor een $\alpha \in \mathrm{C}$.*

Bewijs: '(a) ⇒ (b)': Laat (a) gelden. Volgens Lemma 10.4.9 is f totaal differentieerbaar in a met totale afgeleide $Df(a) = V_{f'(a)}$. De laatste afbeelding is complex lineair.

'(b) ⇒ (c)': Laat (b) gelden. Dan is

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = Df(a)(1,0) = Df(a)V_{i^{-1}}(0,1) = V_{i^{-1}}Df(a)(0,1) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

'(c) ⇒ (d)': Laat (c) gelden. Noem $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Dan is

$$\begin{aligned} Df(a)(1,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \alpha = V_\alpha(1,0), \\ Df(a)(0,1) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \alpha i = V_\alpha(0,1). \end{aligned}$$

Hieruit blijkt dat $Df(a) = V_\alpha$.

'(d) $\Rightarrow$ (a)': Laat (d) gelden. Dan is $f(a+h) = f(a) + V_\alpha(h) + \rho(h) = f(a) + \alpha h + \rho(h)$, met $\rho(h) = o(|h|)$ $(h \to 0)$. Hieruit volgt dat voor $h \to 0$ geldt:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = h^{-1} V_\alpha(h) + h^{-1}\rho(h) = \alpha + o(1).$$

De limiet van het bovenstaande differentiequotiënt voor $h \to 0$ is dus gelijk aan α. Hieruit volgt de complexe differentieerbaarheid van f in a; merk op dat $f'(a) = \alpha$. $\square$

Opmerking 10.4.11 (Cauchy-Riemann vergelijkingen) Vooral de gelijkwaardigheid van (a) en (c) wordt in de praktijk veel gebruikt. Schrijven we $f = f_1 + if_2$ voor de splitsing van f in reëel en imaginair deel, dan is

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x}, \qquad \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial y} - i\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Door uitgeschreven in componenten verkrijgen we uit (10.13) daarom het volgende equivalente stelsel van vergelijkingen, dat ook bekend staat als het stelsel Cauchy-Riemann vergelijkingen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(a), \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(a). \tag{10.14}$$

De Cauchy-Riemann vergelijkingen worden in de praktijk vooral als volgt gebruikt:

Is f een complexwaardige C^1 functie op een open deel $U \subset \mathbb{C}$ en voldoet f op U aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen, dan is f in ieder punt van U complex differentieerbaar.

Dit resultaat volgt door combinatie van Stelling 4.2.6 met Stelling 10.4.10.

Opmerking 10.4.12 De implicatie '(a) $\Rightarrow$ (c)' uit Stelling 10.4.10 kan ook als volgt direct ingezien worden. Uit de complexe differentieerbaarheid van f in a volgt:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a). \end{aligned}$$

Anderzijds is de complexe afgeleide gelijk aan:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih) - f(a)}{ih} \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)}{ih} \\ &= \frac{1}{i}\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)}{h} \\ &= \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a). \end{aligned}$$

Voorbeeld 10.4.13 De functie $f : z \mapsto \overline{z}$ is niet complex differentieerbaar. Want

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}.$$

Voor reële h is dit gelijk aan 1, voor zuiver imaginaire h aan -1. Hieruit volgt dat de limiet van de bovenstaande uitdrukking niet bestaat voor $h \to 0$.

In de R^2-notatie wordt f beschreven door $f(x,y) = (x,-y)$. Hieruit blijkt dat f een C^1-functie op C is, dus overal totaal differentieerbaar. De partiële afgeleiden van f worden gegeven door $\frac{\partial f}{\partial x} = (1,0)$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = (0,-1)$ en voldoen inderdaad in geen enkel punt aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen.

Op analoge wijze ziet men in dat de functies $z \mapsto \operatorname{Re} z$ en $z \mapsto \operatorname{Im} z$ overal totaal differentieerbaar maar nergens complex differentieerbaar zijn.

Opmerking 10.4.14 **(Meetkundige betekenis Cauchy-Riemann vergelijkingen)** De vergelijking (10.13) heeft de volgende meetkundige betekenis.

Beschouw de krommen $\mathbf{c} : t \mapsto f(a+t)$ en $\mathbf{d} : t \mapsto f(a+it)$. Hun raakvectoren in $f(a)$ worden gegeven door:

$$\mathbf{c}'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad \mathbf{d}'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Uit (10.13) volgt nu dat

$$\mathbf{d}'(0) = i\,\mathbf{c}'(0).$$

De raakvector $\mathbf{d}'(0)$ is derhalve het beeld van de raakvector $\mathbf{c}'(0)$ onder de rotatie over de hoek $\frac{\pi}{2}$. In het bijzonder hebben de gegeven raakvectoren gelijke lengte en staan ze loodrecht op elkaar. Hieruit concluderen we dat de f-beelden van de lijnen $x = a_1$ en $y = a_2$ elkaar in $f(a)$ loodrecht snijden.

Later zullen we het voorgaande fraai geïllustreerd zien voor de complexe exponentiële afbeelding, zie Figuur 27.

10.5 De complexe exponentiële functie

Aangezien de exonentiële functie reeds gedefinieerd is op zowel R als iR ligt de volgende definitie voor de hand:

Definitie 10.5.1 De *complexe exponentiële functie*, $\exp : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$, wordt gedefinieerd door:

$$\exp(x+iy) := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (x, y \in \mathrm{R}).$$

In plaats van $\exp z$ schrijven we ook e^z.

Stelling 10.5.2 *De exponentiële functie* exp *is complex differentieerbaar op* C, *met complexe afgeleide* $\exp' = \exp$.

Bewijs: Schrijf $\exp = f_1 + if_2$ voor de ontbinding van exp in reëel en imaginair deel. In het vervolg schrijven we steeds $z = x + iy$. Dan is $f_1(z) = e^x \cos y$ en $f_2(z) = e^x \sin y$. Beide functies zijn C^1-functies op C, dus ook exp is C^1 op C. In het bijzonder is exp totaal differentieerbaar in ieder punt van C (Stelling 4.2.6).

Voor de partiële afgeleiden van exp geldt:

$$\frac{\partial \exp}{\partial x}(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z, \quad \frac{\partial \exp}{\partial y}(z) = e^x(-\sin y + i \cos y) = ie^z.$$

Hieruit blijkt dat exp voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen. Dus exp is complex differentieerbaar op C (Stelling 10.4.10). Voor de complexe afgeleide vinden we:

$$\exp'(z) = V_{\exp'(z)}(1) = D\exp(z)(1,0) = \frac{\partial \exp}{\partial x}(z) = \exp(z).$$

□

Lemma 10.5.3 (Eigenschappen) *De complexe exponentiële functie heeft de volgende eigenschappen.*

(a) *voor* $z, w \in \mathrm{C}$ *geldt:* $e^{z+w} = e^z e^w$ *en* $(e^z)^{-1} = e^{-z}$;

(b) *voor alle* $z \in \mathrm{C}$ *geldt:* $e^z \neq 0$;

(c) exp *beeldt* C *af op* $\mathrm{C} \setminus \{0\}$;

(d) *zij* $z \in \mathrm{C}$, *dan:* $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$ *voor een* $k \in \mathrm{Z}$;

(e) *zij* $z, w \in \mathrm{C}$, *dan:* $e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2k\pi i$ *voor een* $k \in \mathrm{Z}$;

(f) *voor alle* $z \in \mathrm{C}$ *geldt:* $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$.

Bewijs: (a): Dit volgt direct uit de definitie en de overeenkomstige eigenschap voor de reële en de imaginaire e-macht.

(b): Voor $x, y \in \mathrm{R}$ geldt: $e^x \neq 0$ en $e^{iy} \neq 0$, dus $e^{x+iy} = e^x e^{iy} \neq 0$.

(c): Zij $z \neq 0$. Neem $w = \log|z| + i\varphi$ met $\varphi = \arg z$. Dan is (zie § 10.2)

$$e^w = e^{\log|z|}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z.$$

(d): Schrijf $z = x + iy$. Dan $e^z = 1 \iff e^x = 1$ en $e^{iy} = 1$. Pas nu Lemma 10.2.3 toe.

(e): Dit volgt uit (d) en (a).

(f): Zij $z = x + iy$. Dan $|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x$. □

Figuur 27: De complexe exponentiële afbeelding

Om *meetkundig inzicht* in het gedrag van de complexe exponentiële functie te verkrijgen gaan we na hoe rechte lijnen evenwijdig aan de reële resp. imaginaire as door exp worden afgebeeld. Neem $a \in \mathrm{C}$ willekeurig, en beschouw de krommen $l : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ en $m : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ gedefinieerd door $l(t) = a + t$ en $m(t) = a + it$. Hun beelden zijn de rechte lijnen door a evenwijdig aan de y- respectievelijk de x-as.

We beschouwen nu de beeldkrommen **c** en **d** die ontstaan door de exponentiële afbeelding te laten werken op l respectievelijk m. Dus:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(t) &= \exp(l(t)) = e^{a+t} = e^{a_1+t}e^{ia_2};\\ \mathbf{d}(t) &= \exp(m(t)) = e^{a+it} = e^{a_1}e^{ia_2+it}.\end{aligned}$$

Merk op dat im ($\mathbf{c}$) gelijk is aan de halfrechte vanuit 0 die een hoek a_2 met de x-as maakt; im ($\mathbf{d}$) is de cirkel met middelpunt 0 en straal e^{a_1}, zie Figuur 27.

Beide krommen snijden elkaar loodrecht, zoals eerder opgemerkt werd in Opmerking 10.4.14.

10.6 De complexe goniometrische en hyperbolische functies

Uit $e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathrm{R})$ volgen de belangrijke formules:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad (x \in \mathrm{R}). \tag{10.15}$$

Opmerking 10.6.1 De bekende goniometrische formules zijn handig af te leiden uit de bovenstaande formules. We geven een voorbeeld:

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \end{aligned}$$

De formules (10.15) kunnen we gebruiken om de goniometrische functies te definiëren op het gehele complexe vlak:

Definitie 10.6.2 (Complexe goniometrische functies) De functies $\cos : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ en $\sin : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ zijn gedefinieerd door :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (z \in \mathrm{C}).$$

De bekende formules voor de sinus en cosinus blijven merendeels gelden; men kan ze afleiden uit de eigenschappen van de exponentiële functie. Hieronder volgt een opsomming.

Lemma 10.6.3 (Eigenschappen) *Voor alle $z, w \in \mathrm{C}$ geldt:*

(a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

(b) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,

(c) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,

(d) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$,

(e) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$,

(f) $\sin' z = \cos z$, $\cos' z = -\sin z$,

(g) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

Opmerking 10.6.4 Zoals bekend gelden voor $z \in \mathrm{R}$ de belangrijke schattingen $|\cos z| \leq 1$ en $|\sin z| \leq 1$. Deze schattingen gelden niet algemeen voor $z \in \mathrm{C}$, zoals blijkt uit de volgende voorbeelden.

$$\begin{aligned} \cos i &= \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) = 1,543\ldots \\ \sin i &= \frac{1}{2}i(e - \frac{1}{e}) = 1,175\ldots \cdot i. \end{aligned}$$

Merk op dat wel geldt: $\cos^2 i + \sin^2 i = 1$.

De *hyperbolische functies* functies cosh en sinh, gedefinieerd op R, werden ingevoerd in Analyse 1. De daar gegeven definitie kan nu dienst doen op C. Dus:

Definitie 10.6.5 (Complexe hyperbolische functies) De functies *cosinus hyperbolicus* en *sinus hyperbolicus* worden gedefinieerd door:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad (z \in \mathrm{C}).$$

De volgende eigenschappen worden weer gemakkelijk afgeleid uit de bovenstaande definities en de eigenschappen van de exponentiële functie.

Lemma 10.6.6 (Eigenschappen) *Voor alle $x, y \in \mathrm{R}$ en alle $z \in \mathrm{C}$ geldt:*

(a) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,

(b) $\cosh z = \cos iz$, $i \sinh z = \sin iz$,

(c) $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$,

(d) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$,

(e) $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

10.7 De complexe logaritme

De reële exponentiële functie $\exp : x \mapsto e^x$ is op R injectief, maar niet surjectief. Immers het beeld van R onder exp is gelijk aan de positive reële halfrechte $]0, \infty[$.

De reële logaritmische functie log is gedefinieerd als de inverse van $\exp : \mathrm{R} \to]0, \infty[$ en heeft als domein dus het interval $]0, \infty[$. Er geldt:

$$e^{\log x} = x \quad (x > 0), \qquad \log(e^x) = x \quad (x \in \mathrm{R}).$$

Bij de complexe exponentiële functie $\exp : z \mapsto e^z$ is de situatie dramatisch anders. De functie exp is op C niet injectief; hij is periodiek met periode $2\pi i$ (zie (e) van Lemma 10.5.3). Het beeld van C onder exp is gelijk aan $\mathrm{C}^* = \mathrm{C} \setminus \{0\}$ (zie (c) van Lemma 10.5.3). Zij

$$S = \{z \in \mathrm{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}\, z \leq \pi\}.$$

De restrictie van exp tot de strip S is wèl injectief (zie (e) van Lemma 10.5.3) en heeft als beeld de verzameling C^*.

Definitie 10.7.1 De *complexe logaritme* is de functie $\log : \mathrm{C}^* \to S$ die de inverse is van de functie $\exp : S \to \mathrm{C}^*$.

Opmerking 10.7.2 Er geldt dus: $e^{\log z} = z$ $(z \neq 0)$. Voorts geldt voor $z \in \mathrm{C}$ met $-\pi < \mathrm{Im}\, z \leq \pi$ dat $\log(e^z) = z$. Omdat $\mathrm{R} \subset S$, stemt log op de positieve reële as overeen met de reële logaritme. De reële logaritme is hiermee dus *voortgezet* tot een groter definitiegebied.

Lemma 10.7.3 *Voor alle $z \in \mathrm{C}^*$ geldt:*

$$\log z = \log|z| + i \arg z.$$

Opmerking 10.7.4 In poolcoördinaten kunnen we het bovenstaande formuleren als: voor alle $r > 0$ en $\varphi \in]-\pi, \pi]$ geldt:

$$\log(re^{i\varphi}) = \log r + i\varphi.$$

Bewijs: Voor $z \in \mathrm{C}^*$ geldt $|z| \neq 0$, dus: $\log|z| + i \arg z \in S$, en $e^{\log|z| + i \arg z} = e^{\log|z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = z$. □

Stelling 10.7.5 *De complexe logaritme is complex differentieerbaar op $\mathrm{C} \setminus \mathrm{R}_{\leq 0}$ met afgeleide:*

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}.$$

Bewijs: $z \mapsto |z|$ is continu (Lemma 10.2.8). en $x \mapsto \log x$ $(x > 0)$ is continu, dus $z \mapsto \log|z|$ is continu. Verder is $z \mapsto \arg z$ continu op $\mathrm{C} \setminus \mathrm{R}_{\leq 0}$ (Lemma 10.2.8). Dus (zie Lemma 10.7.3) is $z \mapsto \log z$ continu op $\mathrm{C} \setminus \mathrm{R}_{\leq 0}$. Uit Stelling 10.4.7 (en Definitie 10.7.1) volgt nu dat log op $\mathrm{C} \setminus \mathrm{R}_{\leq 0}$ continu differentieerbaar is en dat

$$\log'(z) = \frac{1}{\exp'(\log z)} = \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z}.$$

□

Opmerking 10.7.6 (a) In de punten van de negatieve reële as, $\mathrm{R}_{<0}$, is de logaritme zelfs niet continu. Want als $x \in \mathrm{R}_{<0}$, dan is

$$\lim_{z \to x, \mathrm{Im}\, z < 0} \log z = \log|x| - \pi i,$$

terwijl

$$\lim_{z \to x, \mathrm{Im}\, z \geq 0} \log z = \log|x| + \pi i.$$

Door $\mathrm{R}_{<0}$ uit het definitiegebied van de logaritme weg te laten, verkrijgt men een functie die op zijn definitiegebied continu is, en zelfs complex differentieerbaar. Men noemt in dit verband de halve rechte $\mathrm{R}_{<0}$ een *coupure* voor de logaritme.

(b) In plaats van S kan men ook een andere deelverzameling van C kiezen waarop exp injectief is, bijvoorbeeld de strip $S_\alpha = \{z \in \mathrm{C} \mid \alpha < \mathrm{Im}\ z \leq \alpha + 2\pi\}$, waarbij $\alpha \in \mathrm{R}$ vast is gekozen. Bij iedere keuze hoort een andere logaritmefunctie en een andere coupure. Merk wel op dat verschillende log-waarden in een bepaald punt z alleen een geheel veelvoud van $2\pi i$ kunnen verschillen. De in Definitie 10.7.1 gedefinieerde logaritme noemt men wel de *hoofdwaarde* van de logaritme.

(c) Formules voor de reële logaritme gelden niet altijd voor de complexe logaritme. Zo is $\log(i^4) = \log 1 = 0$, maar $4 \log i = 2\pi i$. Algemeen geldt, voor $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}^*$:

$$\log(\prod_{j=1}^{n} z_j) = (\sum_{j=1}^{n} \log z_j) + 2k\pi i,$$

waarbij $k \in \mathbb{Z}$ zodanig is dat

$$-\pi < (\sum_{j=1}^{n} \arg z_j) + 2k\pi i \leq \pi.$$

10.8 Complexe machten

Definitie 10.8.1 Voor $z, w \in \mathbb{C}$ met $z \neq 0$ definieert men $z^w = e^{w \log z}$.

Opmerking 10.8.2 (a) Voor vaste $z \neq 0$ is de functie $w \mapsto z^w$ op $\mathbb{C}$ gedefinieerd. Hij is differentieerbaar met afgeleide $w \mapsto z^w \log z$.

(b) Voor vaste $w \in \mathbb{C}$ is de functie $z \mapsto z^w$ gedefinieerd op $\mathbb{C}^*$. Hij is discontinu op $\mathbb{R}_{<0}$, behalve als $w \in \mathbb{Z}$ (bij het passeren van de negatieve reële as maken de functiewaarden een 'sprong' met een factor $e^{2\pi i w}$; voor $w \in \mathbb{Z}$ is die factor 1). Voor $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ is $z \mapsto z^w$ differentieerbaar met afgeleide $z \mapsto wz^{w-1}$.

Lemma 10.8.3 *Voor $u, v \in \mathbb{C}$ en $z \in \mathbb{C}^*$ geldt:*

$$z^{u+v} = z^u z^v.$$

Bewijs:

$$z^{u+v} = e^{(u+v)\log z} = e^{u \log z} e^{v \log z} = z^u z^v.$$

□

Opmerking 10.8.4 Uit Opmerking 10.7.6 (c) volgt dat $(zw)^u = z^u w^u$ en $(z^u)^v = z^{uv}$ niet altijd gelden. Zo is bijvoorbeeld:

$$((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \text{terwijl} \quad ((-1)^{\frac{1}{2}})^2 = i^2 = -1.$$

Merk voorts op dat $(-1)^{2\times\frac{1}{2}} = -1 \neq ((-1)^2)^{\frac{1}{2}}$. Een tweede voorbeeld is:

$$(-i)^{\frac{1}{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad \text{maar} \quad (-1)^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}} = i\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Een derde voorbeeld:

$$(e^{8i})^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\log(e^{8i})} = e^{\frac{1}{4}(8-2\pi)i} = e^{(2-\frac{\pi}{2})i} = -e^{2i}.$$

Lemma 10.8.5 *Als $x \in \mathrm{R}$, $x > 0$ en $z \in \mathrm{C}$, dan is*

$$|x^z| = x^{\mathrm{Re}\, z}.$$

Bewijs: $|x^z| = |e^{z \log x}| = e^{\mathrm{Re}\,(z \log x)} = e^{(\mathrm{Re}\, z)\log x} = x^{\mathrm{Re}\, z}$. Hierbij is eigenschap (f) van Lemma 10.5.3 gebruikt, en het feit dat $\log x$ reëel is (dit is zo omdat x reëel positief is). □

Voorbeeld 10.8.6 (a) $i^i = e^{i \log i} = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0,2079\ldots$

(b) Voor $w = \frac{1}{2}$ krijgt men de functie $z \mapsto \sqrt{z}$, gedefinieerd voor alle $z \neq 0$. In poolcoördinaten: $\sqrt{re^{i\varphi}} = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\varphi}$. In het bijzonder is $\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$. Dat $\sqrt{-1}$ niet gelijk is aan $-i$ is een gevolg van de in § 10.7 gemaakte keuze van de strip S. De functie $z \mapsto \sqrt{z}$ is discontinu voor alle z op de negatieve reële as.

(c) $\sqrt[3]{re^{i\varphi}} = \sqrt[3]{r}e^{\frac{1}{3}i\varphi}$. Bijvoorbeeld $\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. Dus niet $\sqrt[3]{-1} = -1$, wat we op R gewend zijn.

(d) Zij $x > 0$. De gelijkheid $(x^i)^i = \frac{1}{x}$ geldt dan en slechts dan als $x \in]e^{-\pi}, e^{\pi}]$. Dit zien we als volgt in. Neem $k \in \mathrm{Z}$ zo dat $-\pi < \log x - 2k\pi \leq \pi$, dus zo dat $e^{(2k-1)\pi} < x \leq e^{(2k+1)\pi}$. Dan is $\log(x^i) = \log(e^{i \log x}) = i(\log x - 2k\pi)$, dus $(x^i)^i = e^{i \log(x^i)} = e^{ii(\log x - 2k\pi)} = \frac{e^{2k\pi}}{x}$. Het te bewijzene is hiervan een speciaal geval.

10.9 Vector- en complexwaardige integralen

In deze paragraaf behandelen we complexwaardige, en algemener vectorwaardige, integralen, ter voorbereiding op de complexe lijnintegralen die in de volgende paragraaf aan de orde zullen komen.

Gemotiveerd door Lemma 2.3.2 behandelen we integreerbaarheid van vectorwaardige functies $f : \mathrm{R}$ æ R^p componentsgewijs als volgt.

Definitie 10.9.1 (Integreerbaarheid van vectorwaardige functies) Zij $a, b \in \mathrm{R}$, $a < b$. Een functie $f : [a, b] \to \mathrm{R}^p$ heet *Riemann-integreerbaar* over $[a, b]$ als iedere component f_j $(1 \leq j \leq p)$ een Riemann-integreerbare functie $[a, b] \to \mathrm{R}$ is. Is f Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ dan definiëren we de integraal van f over het interval $[a, b]$ door

$$\int_a^b f(x)\, dx := (\int_a^b f_1(x)\, dx, \ldots, \int_a^b f_p(x)\, dx).$$

Door toepassing van het bovenstaande met $p = 2$ zien we dat een functie $f : [a, b] \to \mathrm{C}$ Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ is als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ zijn. Bovendien geldt in geval van integreerbaarheid dat:

$$\mathrm{Re} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\, dt,$$

$$\mathrm{Im} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\, dt.$$

Voorbeeld 10.9.2 We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^2 + i \sin \pi x$. Er geldt: $\operatorname{Re} f(x) = x^2$ en $\operatorname{Im} f(x) = \sin \pi x$. Dus:

$$\int_0^1 (x^2 + i \sin \pi x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + i \int_0^1 \sin \pi x\, dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 - \frac{i}{\pi}\cos \pi x\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}i.$$

Lemma 10.9.3 *Laten $f, g : [a, b] \to \mathrm{R}^p$ Riemann-integreerbare functies zijn, en $\lambda \in \mathrm{R}$. Dan zijn ook $f + g$ en λf Riemann-integreerbaar over $[a, b]$, en er geldt:*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx, \qquad \int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx. \tag{10.16}$$

Is $f : [a, b] \to \mathrm{C}$ Riemann-integreerbaar en $\lambda \in \mathrm{C}$ dan is ook λf Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ en de tweede formule in (10.16) geldt.

Bewijs: De eerste twee beweringen volgen door splitsing in componenten en toepassing van het overeenkomstige lemma voor reëelwaardige functies.

Voor het bewijs van de laatste bewering schrijven we $f = f_1 + i f_2$ en $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ voor de splitsingen in reëel en imaginair deel. Dan is $\lambda f = (\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2) + i(\lambda_2 f_1 + \lambda_1 f_2)$ en de bewering volgt uit het overeenkomstige lemma voor reëelwaardige functies. □

Definitie 10.9.1 is zo ingericht dat de hoofdstelling van de integraalrekening (Analyse 1, Stelling 10.4.3) doorgaat voor vectorwaardige functies:

Stelling 10.9.4 *Laat $f : [a, b] \to \mathrm{R}^p$ een continue functie zijn. Dan heeft f een primitieve op $[a, b]$ (i.e. een differentieerbare functie $F : [a, b] \to \mathrm{R}^p$ met $F' = f$), n.l. de functie $t \mapsto \int_a^t f(s)\, ds$. D.w.z.*

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(s)\, ds = f(t) \quad (t \in [a, b]).$$

Als $F : [a, b] \to \mathrm{R}^p$ een willekeurige primitieve van f op $[a, b]$ is dan geldt:

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Bewijs: Het bewijs bestaat uit toepassing van Stelling 10.4.3 uit Analyse 1 op de componenten van f. □

Voorbeeld 10.9.5 Zij $a \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$. Uit Stellingen 10.5.2 en 10.4.6 volgt dat de functie $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$, $z \mapsto e^{iaz}$ complex differentieerbaar is op C, met als afgeleide de functie $z \mapsto iae^{iaz}$. Hieruit volgt dat de beperking $f := \varphi|\mathrm{R} : \mathrm{R} \to \mathrm{C}$ differentieerbaar is op R, met als afgeleide de functie $\mathrm{R} \to \mathrm{C}$, $t \mapsto iae^{iat}$ (ga na!). Derhalve is de functie $\mathrm{R} \to \mathrm{C}$, $t \mapsto (ia)^{-1}e^{iat}$ een primitieve van $t \mapsto e^{iat}$. Met Stelling 10.9.4 vinden we derhalve dat:

$$\int_p^q e^{iat}\, dt = \frac{e^{iaq} - e^{iap}}{ia}.$$

Door ontbinding in reëel en imaginair deel ziet men dat deze formule equivalent is met het tweetal bekende formules:

$$\int_p^q \cos at\ dt = \sin aq - \sin ap, \qquad \int_p^q \sin at\ dt = \cos ap - \cos aq.$$

Voorbeeld 10.9.6 Soms kan men complexe primitieven gebruiken om reële integralen te berekenen. Als voorbeeld beschouwen we de integraal $\int_0^{2\pi} e^t \sin t\ dt$. Er geldt dat

$$e^t \sin t = e^t\, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{(1+i)t} - e^{(1-i)t}).$$

Met een soortgelijke redenatie als in het voorgaande voorbeeld leiden we hieruit af dat een primitieve van deze functie gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2i}(\frac{e^{(1+i)t}}{1+i} - \frac{e^{(1-i)t}}{1-i}) \\ &= \frac{1}{4i}[(1-i)e^{(1+i)t} - (1+i)e^{(1-i)t}] \\ &= \frac{1}{2}e^t\,(\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

Er volgt tenslotte dat

$$\int_0^{2\pi} e^t \sin t\ dt = F(2\pi) - F(0) = \frac{1}{2}(1 - e^{2\pi}).$$

De 'driehoeksongelijkheid voor integralen' van scalaire functies laat zich generalizeren naar het vectorwaardige geval.

Stelling 10.9.7 *Laat $f : [a,b] \to \mathrm{R}^p$ een Riemann-integreerbare functie zijn. Dan is ook de functie $||f|| : [a,b] \to \mathrm{R}$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:*

$$||\int_a^b f(t)\ dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||\ dt.$$

Bewijs: Uit Analyse 1 is bekend dat product en som van Riemann-integreerbare functies weer Riemann-integreerbaar zijn (Analyse 1, Propositie 10.6.3 (i) en Gevolg 10.3.2 (c)). Hieruit volgt dat $||f||^2 = f_1^2 + \cdots + f_p^2$ Riemann-integreerbaar is. De functie $w : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $y \mapsto \sqrt{\max(0,y)}$ is continu, en met Analyse 1, Propositie 10.6.3 (iii) volgt dat $||f|| = w \circ ||f||^2$ Riemann-integreerbaar over $[a,b]$ is.

De ongelijkheid leiden we door limietovergang af uit de overeenkomstige driehoeksongelijkheid voor Riemann-sommen. De precieze argumentatie is als volgt. Zij $\varepsilon > 0$. Voor iedere $1 \leq j \leq p$ is er een verdeling V_j van $[a,b]$ zo dat $\overline{S}(f_j, V_j) - \underline{S}(f_j, V_j) < \varepsilon$. Voorts is er een verdeling W van $[a, b]$ zo dat $\overline{S}(\|f\|, W) - \underline{S}(\|f\|, W) < \varepsilon$. Zij nu $V = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de gemeenschappelijke verfijning van $V_1, \ldots, V_p, W$. Zij $\Xi = (\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ een keuze van strooipunten bij V. Dan geldt voor de bijbehorende Riemann-sommen:

$$\left| S(f_j, \Xi) - \int_a^b \|f_j(x)\| \, dx \right| < \varepsilon, \quad \left| S(\|f\|, \Xi) - \int_a^b \|f(x)\| \, dx \right| < \varepsilon. \tag{10.17}$$

We schrijven $S(f, \Xi) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$. Dan zien we met de driehoeksongelijkheid voor eindige sommen dat

$$\|S(f, \Xi)\| \leq S(\|f\|, \Xi).$$

Voorts volgt direct uit de definities dat $S(f, \Xi) = (S(f_1, \Xi), \ldots, S(f_p, \Xi))$. De j-de component van $\int_a^b f(x) \, dx - S(f, \Xi)$ is dus gelijk aan $\int_a^b f_j(x) \, dx - S(f_j, \Xi)$ en we vinden dat:

$$\| S(f, \Xi) - \int_a^b f(x) \, dx \| \leq \sum_{j=1}^p \left| S(f_j, \Xi) - \int_a^b \|f_j(x)\| \, dx \right| < p\varepsilon.$$

Hieruit volgt dat

$$\| \int_a^b f(x) \, dx \| \leq \|S(f, \Xi)\| + p\varepsilon \leq S(\|f\|, \Xi) + p\varepsilon.$$

Combineren we deze schatting met de tweede schatting in (10.17) dan vinden we:

$$\| \int_a^b f(x) \, dx\| \leq \int_a^b \|f(x)\| \, dx + (p+1)\varepsilon,$$

voor *willekeurige* $\varepsilon > 0$. Hieruit volgt de gewenste schatting. □

Opmerking 10.9.8 Toepassing van Stelling 10.9.7 met $p = 2$ geeft het volgende:

Zij $f : [a, b] \to \mathrm{C}$ Riemann-integreerbaar. Dan is ook de functie $|f| : x \to |f(x)|$ Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ en er geldt:

$$| \int_a^b f(x) \, dx| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

10.10 De Stelling van Cauchy

Definitie 10.10.1 Zij $\gamma : [a, b] \to \mathrm{C}$ een stuksgewijze C^1-kromme. Zij voorts $f : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathrm{C}$ een continue functie. Dan definiëren we de *complexe lijnintegraal* van f langs γ door:

$$\int_\gamma f(z) \, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt. \tag{10.18}$$

Opmerking 10.10.2 In het bovenstaande is $\varphi : t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ een begrensde complexwaardige functie op $[a, b]$, die continu is behalve eventueel in een eindig aantal punten. Derhalve is φ Riemann-integreerbaar over $[a, b]$ (zie ook Definitie 8.1.21).

Voorbeeld 10.10.3 Zij $\alpha \in \mathrm{C}$, zij $r > 0$ en zij $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathrm{R}$ gedefinieerd door $\gamma(t) = \alpha + re^{it}$. Dan is im (γ) de cirkel met straal r en middelpunt α. Zij $f : \mathrm{C} \setminus \{\alpha\} \to \mathrm{C},\ z \mapsto (z - \alpha)^{-1}$. Dan is $f(\gamma(t)) = r^{-1}e^{-it}$, terwijl $\gamma'(t) = rie^{it}$, dus

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\alpha}\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i.$$

Opmerking 10.10.4 Door splitsing in reëel en imaginair deel: $f = f_1 + if_2$ en $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ ziet men dat de complexe lijnintegraal in (10.18) herschreven kan worden als:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b \langle\, (f_1, -f_2), \gamma'(t)\,\rangle\, dt + i\langle\, (f_2, f_1), \gamma'(t)\,\rangle\, dt \\ &= \int_\gamma \langle\, \bar{f}(z)\,,\, d_1 z\,\rangle + i \int_\gamma \langle\, J\bar{f}(z)\,,\, d_1 z\,\rangle,\end{aligned}$$

waarbij de vectorvelden $\bar{f}$ en $J\bar{f}$ op $\mathrm{C} = \mathrm{R}^2$ gedefinieerd zijn door $\bar{f}(z) = (f_1, -f_2)$ en $J\bar{f} = (f_2, f_1)$. Merk op dat $J\bar{f}$ gezien kan worden het vectorveld dat ontstaat door op de kolomvector $\bar{f} = (f_1, -f_2)$ de 2×2-matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

toe te passen.

Uit het voorgaande blijkt dat de theorie van georiënteerde lijnintegralen doorgaat voor complexe lijnintegralen. Zo verandert een complexe lijnintegraal met een factor $\eta = \pm 1$ bij vervanging van de kromme door een herparametrisering; heeft deze dezelfde oriëntatie dan is $\eta = 1$, anders is $\eta = -1$; vergelijk Lemma 8.3.5.

We brengen in herinnering dat voor een vectorveld F op R^2 de 2×2 matrix AF gedefinieerd is door $AF(x) = (D_jF_i(x) - D_iF_j(x))_{ij}$. De conditie $AF = 0$ is dus gelijkwaardig met $D_2F_1 = D_1F_2$.

Lemma 10.10.5 *Zij $U \subset \mathrm{C}$ een open deel en zij $f : U \to \mathrm{C}$ een C^1-functie. Dan is f complex differentieerbaar op U dan en slechts dan als $A\bar{f} = A(J\bar{f}) = 0$ op U.*

Bewijs: De functie f is C^1 op U, dus ook totaal differentieerbaar in ieder punt van U (Stelling 4.2.6).

Er geldt $\bar{f} = (f_1, -f_2)$ en $J\bar{f} = (f_2, f_1)$. Derhalve is de conditie $A\bar{f} = A(J\bar{f}) = 0$ gelijkwaardig met het vervuld zijn van de Cauchy-Riemann vergelijkingen (10.14). Wegens Stelling 10.4.10 is dit gelijkwaardig met de complexe differentieerbaarheid van f op U. □

Zij $U \subset \mathrm{C}$ open. In het vervolg zullen we met een complex differentieerbare functie op U bedoelen: een complex differentieerbare functie $U \to \mathrm{C}$ die bovendien C^1 is op U.

Opmerking 10.10.6 (a) Is $f : U \to \mathrm{C}$ complex differentieerbaar, dan is $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ op U. Hieraan ziet men dat het C^1 zijn van f gelijkwaardig is met het continu zijn van de complexe afgeleide f'.

(b) Men kan bewijzen dat iedere complex differentieerbare functie op een open verzameling *automatisch* C^1 is. Wij zullen dit resultaat hier niet bewijzen, en in de praktijk steeds het C^1 zijn van optredende complex differentieerbare functies controleren.

Stelling 10.10.7 **(Stelling van Cauchy)** *Zij $U \subset \mathrm{C}$ open en $f : U \to \mathrm{C}$ complex differentieerbaar. Is γ_0, γ_1 een tweetal C^1-krommen in U dat homotoop is in U, dan is*

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

In het bijzonder geldt: is γ_0 samentrekbaar in U, dan is $\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = 0$.

Bewijs: Uit het complex differentieerbaar zijn van f volgt dat de C^1-vectorvelden $\bar{f}$ en $J\bar{f}$ voldoen aan $A\bar{f} = A(J\bar{f}) = 0$. Met Stelling 8.5.14 volgt nu dat de integralen

$$\int_{\gamma_j} \langle\, \bar{f}(z)\,,\, d_1 z\,\rangle, \quad \text{en} \quad \int_{\gamma_j} \langle\, J\bar{f}(z)\,,\, d_1 z\,\rangle$$

onafhankelijk zijn van $j \in \{0, 1\}$. Hieruit volgt wegens Opmerking 10.10.4 de gewenste identiteit. □

Voor de toepassingen is ook het volgende gevolg van de Stelling van Cauchy zeer interessant.

Stelling 10.10.8 **(Integraalformule van Cauchy)** *Zij $\alpha \in \mathrm{C}$, $R > 0$ en zij f een complex differentieerbare functie op de open schijf $B(\alpha, R)$ met middelpunt α en straal R. Zij $0 < r < R$ en zij $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathrm{C}$ gedefinieerd door $\gamma(t) = \alpha + re^{it}$ (de cirkel met middelpunt α en straal r, eenmaal in positieve richting doorlopen). Dan is*

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz = 2\pi i f(\alpha).$$

Bewijs: Schrijf γ_r voor de boven gedefinieerde kromme; hiermee brengen we de afhankelijkheid van r tot uitdrukking. Zijn $0 < r_1 < r_2 < R$, dan zijn de krommen γ_{r_1} en γ_{r_2} homotoop in $B(\alpha, R) \setminus \{\alpha\}$. Ga zelf na dat door $\Gamma(s, t) = \alpha + (r_1 + s(r_2 - r_1))e^{it}$ een homotopie gedefinieerd wordt. De functie $z \mapsto (z - \alpha)^{-1} f(z)$ is complex differentieerbaar op $B(\alpha, R) \setminus \{\alpha\}$. Wegens de Stelling van Cauchy is

$$I(r) := \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - \alpha}\, dz$$

derhalve onafhankelijk van de keuze van r. Noem de gemeenschappelijke waarde I. Dan geldt dat $\lim_{r \downarrow 0} I(r) = I$. We zullen in het onderstaande aantonen dat anderzijds $\lim_{r \downarrow 0} I(r) = 2\pi i f(\alpha)$. Dit levert het gewenste resultaat.

Met behulp van Definitie 10.10.1 vinden we:

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{it})}{re^{it}}\, ire^{it}\, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})\, dt. \end{aligned} \tag{10.19}$$

De functie $(r,t) \mapsto f(\alpha + re^{it})$, $[0,R[\times[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ is continu. Met behulp van Stelling 5.1.3 vinden we nu dat de integraal in (10.19) continu afhangt van $r \in [0,R[$. In het bijzonder verkrijgt men de limiet voor $r \downarrow 0$ door $r = 0$ in te vullen. Hieruit volgt dat

$$\lim_{r \downarrow 0} I(r) = i \int_0^{2\pi} f(\alpha)\, dt = 2\pi i f(\alpha).$$

□

We eindigen dit dictaat met twee toepassingen van de Stelling van Cauchy. Voor andere fraaie toepassingen verwijzen we naar een college Complexe Functie Theorie. Eerst behandelen we nog een nuttig lemma.

Lemma 10.10.9 *Zij γ een C^1-kromme in* $\mathbb{C}$, *en zij $f : \mathrm{im}\,(\gamma) \to \mathbb{C}$ een continue functie met $|f(z)| \le M$ voor alle $z \in \mathrm{im}\,(\gamma)$ (voor een gegeven $M > 0$). Dan is*

$$|\int_\gamma f(z)\, dz| \le Ml(\gamma),$$

met $l(\gamma)$ de in Definitie 8.1.1 gedefinieerde lengte van γ.

Bewijs: Zij $[a,b]$ het domein van de kromme γ. Dan:

$$\begin{aligned} |\int_\gamma f(z)\, dz| &= |\int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt| \\ &\le \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt \\ &\le M \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = Ml(\gamma). \end{aligned}$$

Merk op dat in de eerste schatting Opmerking 10.9.8 gebruikt is. □

Voorbeeld 10.10.10 **(Bewijs hoofdstelling van de algebra)** Met behulp van de Integraalformule van Cauchy kan de hoofdstelling van de algebra op fraaie wijze bewezen worden. Laat $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een complexe veeltermfunctie van de graad $n \ge 1$ zijn. We veronderstellen dat p geen nulpunten heeft en zullen aantonen dat dit tot een tegenspraak leidt. Uit de veronderstelling volgt dat de functie $z \mapsto \frac{1}{p(z)}$ complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$ is. Definieer voor $r > 0$ de kromme $\gamma_r : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ door $\gamma_r(t) = re^{it}$. Dan volgt uit de Integraalformule van Cauchy, toegepast op p^{-1}, dat

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{p(z)z} = \frac{2\pi i}{p(0)}.$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $R > 0$ zo dat $|z| \geq R \Rightarrow |p(z)| > \varepsilon^{-1}$ (Lemma 10.3.7). Hieruit volgt met Lemma 10.10.9 dat

$$|\int_{\gamma_R} \frac{dz}{p(z)z}| \leq \frac{l(\gamma_R)\varepsilon}{R} = 2\pi\varepsilon,$$

dus

$$\frac{1}{|p(0)|} \leq \varepsilon.$$

Deze schatting geldt voor iedere keuze van $\varepsilon > 0$; daaruit leiden we af dat $|p(0)|^{-1} = 0$, in tegenspraak met $|p(0)| > 0$. □

Voorbeeld 10.10.11 Tenslotte gebruiken we de integraalformule van Cauchy om de integraal

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx \tag{10.20}$$

te berekenen. De functie $\frac{1}{1+x^2}$ is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over R, en domineert de absolute waarde van de integrand in het rechterlid van (10.20); met Stelling 10.7.3 (ii) uit Analyse 1 concluderen we nu dat de integraal in het rechterlid van (10.20) convergeert. Derhalve geldt $I = \lim_{r\to\infty} I(r)$, waarbij

$$I(r) = \int_{-r}^{r} \frac{\cos x}{1 + x^2}\, dx.$$

Vervangen we in deze integraal cos door sin dan ontstaat een oneven integrand, en de integraal krijgt waarde nul. Daarom:

$$I(r) = \int_{-r}^{r} \frac{e^{ix}}{1 + x^2}\, dx.$$

We zullen deze integraal vergelijken met een integraal over een geschikt gekozen gesloten kromme in het complexe vlak.

We beschouwen de open verzameling $U = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, en de complex differentieerbare functie $f : U \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = (1+z^2)^{-1}e^{iz}$. Schrijf $g(z) = (z+i)e^{iz}$, en zij $\sigma : [0, 2\pi] \to U$ gedefinieerd door $\sigma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$ (de cirkel met middelpunt i en straal $\frac{1}{2}$, eenmaal in positieve zin doorlopen). Dan geldt wegens de integraalformule van Cauchy dat

$$\int_\sigma f(z)\, dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z - i}\, dz = 2\pi i g(i) = \frac{\pi}{e}.$$

Anderzijds is de integraal in het linkerlid gelijk aan de integraal over iedere C^1-kromme in U die in U homotoop is met σ. Een dergelijke kromme definiëren we als volgt.

Figuur 28: Lijnintegralen van $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$

Voor $r > 1$ definiëren we de kromme $\alpha_r : [-r, r] \to U$ door $\alpha_r(t) = t$. Voorts definiëren we voor $r > 1$ de kromme $\beta_r : [0, \pi] \to U$ door $\beta_r(t) = re^{it}$. Dit geeft het in het bovenhalfvlak gelegen deel van de cirkel met middelpunt 0 en straal r, eenmaal in positieve zin doorlopen. Zij γ_r een aaneenschakeling van α_r en β_r die C^1 is. Dan is γ_r in U homotoop met σ, zie Figuur 28. Derhalve is:

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \frac{\pi}{e}.$$

Anderzijds is de integraal in het linkerlid gelijk aan de som van de integralen over α_r, respectievelijk β_r. De integraal over α_r is gelijk aan $I(r)$. Derhalve is

$$I(r) = \frac{\pi}{e} - \int_{\beta_r} f(z)\, dz. \tag{10.21}$$

Voor $z = x + iy$ met $z \in \mathrm{im}\,(\beta)$ geldt: $y \geq 0$, dus $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$. Voorts geldt voor zulke z dat $|z| = r$, dus $|1 + z^2| \geq ||z^2| - 1| = r^2 - 1$. Hieruit volgt dat voor $z \in \mathrm{im}\,(\beta_r)$ geldt:

$$|f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|1 + z^2|} \leq \frac{1}{r^2 - 1}.$$

Lemma 10.10.9 gebruikend vinden we nu de schatting:

$$|\int_{\beta_r} f(z)\, dz| \leq \frac{2\pi r}{r^2 - 1}.$$

Deze integraal heeft derhalve limiet 0 als $r \to \infty$. Passen we dit toe op (10.21) dan vinden we:

$$I = \lim_{r\to\infty} I(r) = \frac{\pi}{e} - \lim_{r\to\infty} \int_{\beta_r} f(z)\, dz = \frac{\pi}{e}.$$

Inhoudsopgave

1 Functies van meer veranderlijken **1**
1.1 Inleiding 1
1.2 Inprodukt en norm 2
1.3 Limieten van functies van meer veranderlijken 5
1.4 Het visualiseren van functies van meer veranderlijken 10
1.5 Open en gesloten in $\mathbb{R}^n$ 13
1.6 De stelling van Bolzano-Weierstrass 18

2 Partieel differentiëren **21**
2.1 Partiële afgeleiden 21
2.2 Toepassing: extrema 23
2.3 Het differentiëren van vectorwaardige functies 26
2.4 Richtingsafgeleiden 28
2.5 Hogere orde partiële afgeleiden 31

3 De gradiënt van een functie **35**
3.1 Intermezzo: de symbolen van Landau 35
3.2 Gradiënt en benadering van de groei 39
3.3 Kettingregel voor differentiëren langs een kromme 43
3.4 Eigenschappen van de gradiënt 46

4 De totale afgeleide **51**
4.1 Totale differentieerbaarheid 51
4.2 De Jacobimatrix 56
4.3 De kettingregel 59

5 Integralen met een parameter **65**
5.1 Continuïteit in de parameter 65
5.2 Differentiatie onder het integraalteken 67

6 Dubbele integralen **71**
6.1 Herhaalde integratie 71
6.2 Riemann-integratie (herhaling Analyse 1) 72
6.3 Dubbele integralen en volume 75

7 Integratie en volume in $\mathbb{R}^n$ (inleiding) **81**
7.1 Inleiding 81
7.2 Integreerbaarheid 81
7.3 De substitutiestelling 87

8 Lijnintegralen en primitiveren **95**
8.1 De lijnintegraal van een functie 95
8.2 De lengte van de eenheidscirkel 104
8.3 Lijnintegralen van vectorvelden 105
8.4 Primitiveren van een vectorveld 112
8.5 Het bestaan van een primitieve 116

9 De stellingen van Stokes, Green en Gauss **123**
9.1 Het uitwendig produkt 123
9.2 De oppervlakte-integraal van een functie 128
9.3 De stellingen van Stokes en Green 133
9.4 De Stelling van Gauss 144

10 Complex differentieerbare functies **151**
10.1 Het lichaam der complexe getallen 151
10.2 Poolcoördinaten 154
10.3 Wortels en de hoofdstelling van de algebra 157
10.4 Complex differentiëren 161
10.5 De complexe exponentiële functie 165
10.6 De complexe goniometrische en hyperbolische functies 167
10.7 De complexe logaritme 169
10.8 Complexe machten 171
10.9 Vector- en complexwaardige integralen 172
10.10De Stelling van Cauchy 175
Index 182

Index

A

Aaneenschakeling, van krommen 101
Aangrijppunt, van vector 47
Absolute waarde 152
Afgeleide, als functie 52
—, complexe 161
—, totale 51
Afsluiting, van verzameling 15
Afstand, in $\mathbb{R}^n$ 2
Algebra, hoofdstelling van de 157, 178
Anti-symmetrische matrix 127
Arbeid, interpretatie van lijnintegraal 107
Argument, van complex getal 156

B

Beginpunt, van kromme 26
Begrensde verzameling 4
Blok, n-dimensionaal 81
Bol, oppervlakte van 132
Bolomgeving 14
Bolzano-Weierstrass, stelling van 18
Boogsamenhang, van een verzameling 112
Bovenintegraal 73
Bovensom 72, 82

C

C^2-functie 31
Cauchy, Integraalformule van 177
—, Stelling van 177
Cauchy-Riemann, vergelijkingen van 164
Cauchy-Schwarz, ongelijkheid van 2
Complex differentieerbaar 161
— geconjugeerde 152
Complexe exponentiële functie 165
— vlak 152
Componentsgewijs differentiëren 26
— totaal differentiëren 56
Compositie, van functies 9
Continuïteit, van functie op $\mathbb{R}^n$ 6
Convergente rij in $\mathbb{R}^n$ 4
Cosinus, complexe 168
—, hyperbolicus 169
Coupure, voor de logaritme 170
Curl 128

D

De Moivre, formule van 155
Dichtheid, langs kromme 97
Differentiatie, onder integraalteken 67
Differentieerbaar, complex 161
—, totaal 51
Divergentie, van vectorveld 145
Divergentiestelling 144
Doorstroming, van vectorveld 127
Driehoeksongelijkheid, voor complexe modulus 153
—, voor Euclidische norm 3
Dubbele integraal 71

E

e-Macht, van complex getal 165
—, van imaginair getal 155
Eenheidscirkel, complexe 155
—, lengte van 104
Eenheidswortels 158
Eenvorm 105
Eindpunt, van kromme 26
Enkelvoudig samenhangend 119
Euclidische afstand 4
— norm, op $\mathbb{R}^n$ 2
Euler, Gamma-functie van 65
Exponentiële functie, complexe 165
Extremum 23

F

Flux, van vectorveld 127, 133
Flux-integraal, definitie 133
—, interpretatie 133

G

Gamma-functie, van Euler 65
Gauss, Stelling van 144
Georiënteerde integraal 99
Gesloten kromme 119
— verzameling in $\mathbb{R}^n$ 15
Goniometrische functies, complexe 168
Graad, van complex polynoom 154
Gradiënt 24
Grafiek 10
Green, Stelling van 140
Groei, benadering van 39
—, mate van 47

—, richting van grootste 47
Grote 'oh' van Landau 35

H
Herhaalde integratie 83
Herparametrisering, van interval 97
—, van kromme 98
—, van rechthoek 128
Homotopie, van krommen 119
Homotopie-invariantie, van integraal 120
Hoofdstelling van de algebra 157, 178
Hoofdwaarde, van de logaritme 170
Hyperbolische 168

I
Imaginair deel 152
— getal, e-macht van 155
Imaginaire as 152
Indexverzameling 82
Infinitesimale volume veranderende factor 92
Integraal, dubbele 71
—, Flux- 134
—, georiënteerde 99, 106, 134
—, met parameter 65
—, niet-georiënteerde 99, 130
—, van eenvorm 105
—, van scalaire functie langs kromme 97
—, van vectorveld langs kromme 105
—, van vectorwaardige functies 172
Integratie, in R^n 81
Integreerbaarheidscondities 112
Inwendig punt, ten aanzien van een verzameling 112
— punt 14
Inwendige, van een verzameling 14

J
Jacobiaan 87
Jacobimatrix 57
Jordan-meetbaar 86

K
Karakteristieke functie 83
Kegel, volume van 91
Kettingregel, voor differentiëren langs kromme 44
—, voor Jacobimatrices 61
—, voor partiële afgeleiden 62
—, voor totale afgeleide 59
Kleine 'oh' van Landau 35
Kolomvector, element in R^n 57
—, gradiënt als 58
Kritiek punt 24
Kromme, gesloten 119
— 26

L
Landau, symbolen van 35
Lengte, van cirkel 96
—, van eenheidscirkel 104
—, van grafiek 96
—, van kromme 95
Lichaam, der complexe getallen 151
Lijnintegraal, van complexe functie 175
—, van vectorveld 105
Lijnstuk 95
Limiet, van functie op R^n 6
Lineaire afbeelding 51
— ruimte, R^n 1
— substitutie, in integraal 89
Logaritme, complexe 169
—, hoofdwaarde van 170
Lokaal constante functie 109
— maximum 23
— minimum 23
Lokale parametrisering 131
Loodrecht, op niveauverzameling 48

M
Maas, van verdeling 73
Macht, complexe 171
Majorantie criterium 36
Matrix van lineaire afbeelding 56
Maximum, lokaal 23
Meetbaar, Jordan- 86
Minimum, lokaal 23
Modulus 152
Moivre, Formule van De 155
Monoom 8
Monotonie, van integraal 87
Multipliciteit, van wortel 161

N
Negatief georiënteerde basis 126
Niveaulijn 11
Niveauoppervlak 11
Niveauverzameling 11
Norm, algemeen begrip van 3
Normaal, uitwendige 144
Nulpunt, van veelterm 159

O
Omgeving, van een punt 39
Onderintegraal 73

Ondersom 72, 82
Ongeoriënteerde oppervlakte 125
Ontbinding, van veelterm in lineaire factoren 161
Open omgeving 39
— verzameling, in R^n 14
—, in een verzameling 112
Oppervlakte, ongeoriënteerde 125
—, van bol 132
—, van cirkelschijf 90
Oppervlakte-integraal, van scalaire functie 130
Optelling, in R^n 1
Oriëntatie-omkerende herparametrisering 98, 129
Oriëntatiebehoudende herparametrisering 98, 129
Oriëntatie 98
Orthonormale basis 2

P

Paraboloïde 91
Parallellepipedum 89
Parameter, integraal met 65
Partieel differentiëren 21
Partiële afgeleide, hogere orde 31
— afgeleiden, verwisseling van 31
— afgeleide 22, 27
Permutatie, van integratievolgorde 83
Pi, definitie van π 104
Piramide 92
Poincaré, Lemma van 114
Polynoom, complex 154
—, op R^n 8
Poolcoördinaten 90
Poolcoördinaten, complex 156
Positief georiënteerde basis 126
Potentiaal, scalaire 109
Primitieve, existentie van 120
—, van vectorveld 109

Q

Quaternionen 1

R

Raaklijn 39
Raakrichting, aan verzameling 48
Raakruimte, aan grafiek 42
Raakvlak 144
Rand, van verzameling 16
Rationale functie, complexe 154
— functie, op R^n 8
Regulier punt, van afbeelding 87
Rekenregels, voor complex differentiëren 162
—, voor integratie in R^n 86
—, voor limieten van functies 7
—, voor limieten van rijen 5
—, voor totale afgeleide 55
Reëele as 152
— deel 152
Richting, van grootste groei 47
Richtingsafgeleide 28
Richtingsdifferentieerbaar 28
Riemann-bovenintegraal 73, 82
Riemann-integraal 82
Riemann-integreerbaar 73, 82
Riemann-onderintegraal 73, 82
Riemann-som 74
Rijmatrix 58
Rotatie, van vectorveld 128

S

Samenhang, van verzameling 109
Samenstelling, van functies 9
Samentrekbare kromme 119
Scalaire functie 6
— potentiaal 109
Scalarvermenigvuldiging 1
Scheef lichaam, der quaternionen 1
Sfeer 9
Sinus, complexe 168
—, hyperbolicus 169
Snelheidsvector, aan kromme 27
Standaardbasis, in R^n 2
Standaardinprodukt, op R^n 2
Stationair punt 24
Stervormige verzameling 113
Stirling, formule van 39
Stokes, Stelling van 135
Strooipunten 74
Stuksgewijze C^1-kromme 100
Substitutieregel, voor limieten 9
Substitutiestelling, voor integratie 87

T

Taylor, formule van, met rest 37
Toegevoegd complexe 152
Topologisch begrip 119
Totaal differentieerbaar 51
Totale afgeleide 51
— differentieerbaarheid, voldoende voorwaarde 59
Translatie-invariantie, van Riemann-integraal 89

U

Uitprodukt 123
Uitwendig produkt 123
Uitwendige normaal 144
Uniforme continuïteit, van functie op R^n 6

V

Vectoren in R^n 1
Vectorveld, integraal van 106
— 47
Vectorwaardige functie 6
Veelterm, ontbinding in factoren 161
Veeltermfunctie, complex 154
—, op R^n 8
Verdeling, van blok 82
—, van interval 72
Verdichtingspunt 15
Verwaarloosbaar 86
Verwisseling van partiële afgeleiden 31
—, van integratievolgorde 71
Volume, n-dimensionaal 86
—, in R^n 81
—, onder grafiek 77
—, van kegel 91

W

Wortel, multipliciteit van 161
—, van veelterm 159

Z

Zadelpunt 25
Zuiver imaginair getal 152