Handleiding bij het college Convexe Analyse A

E.P. van den Ban

Voorjaar 2001, eindversie

Inleiding

Deze handleiding dient ter ondersteuning van het college Convexe Analyse A, Voorjaar 2001. Basistekst bij het college is de Syllabus: Convexe Analyse, J. van Tiel, MC Syllabus 40, 1979. In deze Syllabus wordt convexiteit bestudeerd in een algemenere context dan wij in dit college zullen doen. In de Syllabus is V steeds een reële lineaire ruimte, die niet eindig-dimensionaal hoeft te zijn. Voorts is E steeds een topologische lineaire ruimte, die niet eindig dimensionaal hoeft te zijn.

Wij beperken ons in dit college tot de situatie dat V (en E) eindig dimensionaal zijn (dus isomorf met $\mathbb{R}^n$ voor zekere $n \in \mathbb{N}$). Hierdoor wordt een aantal bewijzen eenvoudiger. De scheidingstelling waarop we ons concentreren is die voor $\mathbb{R}^n$, zie Syll. 5.11. Van deze stelling geven we een eenvoudiger bewijs.

Delen van de Syllabus zijn voor de huidige cursus goed bruikbaar. Sommige stukken worden echter op direktere en eenvoudigere wijze behandeld. Doel van deze handleiding is precieze verwijzingen naar de Syllabus te geven, en bovendien precies aan te geven waar en op welke wijze van de Syllabus afgeweken wordt. Verwijzingen naar de Syllabus worden steeds met een vetgedrukt kopje Verwijzing aangegeven.

1 Convexe functies van één variabele

De stof van dit eerste hoofdstuk is de theorie van convexe functies van 1 variabele.

Verwijzing: Bestudeer 1.1 t/m 1.3, 2.1 t/m 2.4.

In paragraaf 2.5 van de syllabus wordt het volgende lemma gebruikt.

Lemma 1.1 *Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en zij $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie. Dan bestaat $\lim_{x\downarrow a} \varphi(x)$, met waarde in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ook bestaat $\lim_{x\uparrow b} \varphi(x)$, met waarde in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Bewijs: We bewijzen de eerste bewering. Het bewijs van de tweede verloopt op soortgelijke wijze. We beschouwen de verzameling $S = \varphi(\langle a, b\rangle)$ van functiewaarden. Deze is niet leeg. Veronderstel eerst dat S naar onder begrensd is. Dan heeft S een infimum $s = \inf S$. We zullen laten zien dat

$$\lim_{x \downarrow a} \varphi(x) = s. \tag{1}$$

Zij hiertoe $\varepsilon > 0$. Dan is $s + \varepsilon$ geen ondergrens van S, want s is de grootste. Derhalve is er een $c \in \langle a, b \rangle$ zo dat $\varphi(c) < s + \varepsilon$. Schrijf $\delta = c - a$, dus $c = a + \delta$. Dan is $\delta > 0$ en voor alle $x > a$ met $|x - a| < \delta$ geldt $x \in \langle a, c \rangle$, dus $s \leq \varphi(x) \leq \varphi(c) < s + \varepsilon$, dus $|\varphi(x) - s| < \varepsilon$. Hiermee is (1) bewezen.

In het overgebleven geval is S niet naar onderen begrensd. We zullen aantonen dat dan

$$\lim_{x \downarrow a} \varphi(x) = -\infty. \tag{2}$$

Zij $M > 0$. Dan is er een $c \in \langle a, b \rangle$ met $\varphi(c) < -M$. Zij $\delta = c - a$. Dan is $\delta > 0$; voor alle $x > a$ met $|x - a| < \delta$ geldt $x \in \langle a, c \rangle$, dus $\varphi(x) \leq \varphi(c) < -M$. Hieruit volgt (1). $\square$

Verwijzing: Bestudeer nu 2.5 t/m 2.8.

Aan het eind van Syll. § 2.8 wordt een beroep gedaan op het volgende lemma.

Lemma 1.2 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval, en $g : I \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie. Voor elke $c \in I$ bestaan*

$$g(c-) := \lim_{x \uparrow c} g(x) \qquad \text{en} \qquad g(c+) := \lim_{x \downarrow c} g(x)$$

als elementen van $\mathbb{R}$. Voor iedere $c \in I$ geldt $g(c-) \leq g(c) \leq g(c+)$. Voor iedere $c, d \in I$ met $c < d$ geldt $g(c+) \leq g(d-)$.

De functie g is continu in $c \in I$ dan en slechts dan als $g(c-) = g(c+)$. Tenslotte is de verzameling $D \subset I$ van discontinuïteitspunten van g hoogstens aftelbaar.

Bewijs: De limiet $g(c-)$ bestaat als element van $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wegens Lemma 1.1. Voor alle $x \leq c$ geldt $g(x) \leq g(c)$, dus met limietovergang voor $x \uparrow c$ volgt $g(c-) \leq g(c)$, dus i.h.b. $g(c-) \in \mathbb{R}$. Op dezelfde grond volgt $g(c) \leq g(c+) \in \mathbb{R}$. Zij $c, d \in I$ met $c < d$. Dan geldt dat $g(x) \leq g(y)$ voor alle x, y met $c < x < y < d$. Door limietovergang voor $x \downarrow c$ volgt hieruit $g(c+) \leq g(y)$ en door limietovergang voor $y \uparrow d$ volgt hieruit dat $g(c+) \leq g(d-)$.

De gelijkheid $g(c-) = g(c+)$ is gelijkwaardig met $g(c-) = g(c) = g(c+)$, hetgeen weer gelijkwaardig is met $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$, dus met de continuïteit van g in c.

Voor iedere $c \in D$ geldt $g(c-) < g(c+)$. We kunnen derhalve een $\varphi : D \to \mathbb{Q}$ kiezen met $\varphi(c) \in \langle g(c-), g(c+) \rangle \cap \mathbb{Q}$, voor alle $c \in D$. Voor alle $c, d \in I$ met $c < d$ volgt dat $\varphi(c) < g(c+) \leq g(d-) < \varphi(c)$. De functie φ is dus strikt monotoon stijgend, en derhalve injectief. Omdat $\mathbb{Q}$ aftelbaar is volgt zo dat D hoogstens aftelbaar is. $\square$

Verwijzing: Bestudeer 2.12 t/m 2.13.
Bestudeer voorts 2.20 t/m 2.26.

Definitie 2.21 kan als volgt meetkundig geïnterpreteerd worden. Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$. Als $a, b \in V$ dan noteren we met $[a, b]$ het gesloten lijnstuk dat a en b verbindt, dus

$$[a, b] := \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Met $\langle a, b\rangle$ noteren we het lijnstuk zonder eindpunten, dus $\langle a, b\rangle = [qa, b] \setminus \{a, b\}$.

Een deelverzameling $C \subset V$ heet **convex** indien voor elk tweetal punten $a, b \in C$ geldt dat $[a, b] \subset C$. Merk op dat de laatste conditie equivalent is met $\langle a, b\rangle$, aangezien $a, b \in C$. De meetkundige interpretatie van Def. 2.21 wordt nu gegeven door het volgende lemma.

Lemma 1.3 *Zij $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ een functie. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *De functie f is convex.*

(b) *De verzameling $A = \{(x, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) < \mu\}$ is convex.*

Bewijs: Zij $x, y \in \mathbb{R}, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Dan betekent $f(x) < \mu$ en $f(y) < \nu$ precies dat $(x, \mu) \in A$ en $(y, \nu) \in A$. De eis dat $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu$ voor alle $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ betekent precies dat $\lambda(x, \mu) + (1 - \lambda)(y, \nu) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda\mu, (1 - \lambda)\nu) \in A$ voor alle $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$, hetgeen weer gelijkwaardig is met de eis dat $\langle (x, \mu), (y, \nu)\rangle \subset A$. $\square$

Het bovenstaande laat zien dat convexiteit van functies gekarakteriseerd kan worden door convexiteit van verzamelingen. In de theorie van convexe functies van meer variabelen speelt deze meetkundige zienswijze een wezenlijke rol.

2 Convexe verzamelingen in een lineaire ruimte

De stof van dit college betreft de theorie van convexe verzamelingen in een lineaire ruimte V over $\mathbb{R}$. Wij zullen in het vervolg steeds veronderstellen dat V eindig dimensionaal is.

Verwijzing: Bestudeer 3.1 t/m 3.5.

Bij Syll. 3.5 is de volgende opmerking op zijn plaats. Zij $A \subset V$ een affiene deelruimte. Dan is er per definitie een lineaire deelruimte $L \subset V$ en een punt $a \in V$ met $A = a + L$.

Lemma 2.1 *De deelruimte L is uniek bepaald door A. Voor iedere $b \in V$ geldt $A = b + L \iff b \in A$.*

Bewijs: Zij ook $A = b + N$. Uit $0 \in L$ volgt $a \in A$, dus $a - b \in N$. Hieruit volgt dat $a + N = b + [(a - b) + N] = b + N = A$, dus $a + N = a + L$ en we concluderen dat $L = N$. Zij $b \in V$. Is $b \in A$, dan is $b \in a + L$, dus $b - a \in L$ dus $A = a + L = b + [(b - a) + L] = b + L$. Is omgekeerd $A = b + L$, dan volgt uit $0 \in L$ dat $b \in A$. $\square$

Uit de uniciteit van L blijkt dat de definitie $\dim A = \dim(a + L)$ zinvol is. In het onderstaande behandelen we nog een karakterisering van affiene deelruimte. Zijn $x, y \in V$, dan noteren we met $l_{x,y}$ de verzameling van affiene combinaties van x en y, dus $l_{x,y} = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Is $x \neq y$, dan is $l_{x,y}$ een lijn; is $x = y$, dan is $l_{x,y} = \{x\}$.

Lemma 2.2 *Zij $A \subset V$ een niet-lege deelverzameling. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *A is een affiene deelruimte van V;*

(b) *voor ieder tweetal $x, y \in A$ geldt dat $l_{x,y} \subset A$.*

Bewijs: Laat $b \in V$ zijn en schrijf $B = b + A$. Dan is B een affiene deelruimte dan en slechts dan als A dat is. Verder gaat men gemakkelijk na dat voor $x, y \in A$ geldt $l_{b+x,b+y} = b + l_{x,y}$. Haieruit blijkt dat B voldoet aan conditie (b) dan en slechts dan als A voldoet aan deze conditie. We zien hieraan dat het voldoende is de equivalentie van (a) en (b) voor B te bewijzen. Door $b \in -A$ te nemen bereiken we dat $0 \in B$. Hieruit volgt dat B affien is dan en slechts dan als B een lineaire deelruimte is. Is dit het geval dan geldt (b). Geldt omgekeerd (b), dan geldt voor iedere $x \in B$ dat $\mathbb{R}x = l_{0,x} \subset B$. Voor $x, y \in B$ geldt dat $x + y = 2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \in \mathbb{R}B \subset B$. Dus B is een lineaire deelruimte. $\square$

Verwijzing: Bestudeer 3.5 t/m 3.10.

Commentaar op 3.9, 3.10: hoekpunten van een convex polytoop

De definitie in 3.9 is niet helder. Vandaar het volgende commentaar op deze paragraaf en de opgaven 3.5 en 3.7 van de Syllabus.

We veronderstellen dat $C \subset V$ een convex polytoop is. Dus C is een verzameling van de vorm $\mathrm{co}\,(x_1, \ldots, x_n)$, met $x_j \in V$ voor $1 \leq j \leq n$.

Definitie 2.3 Onder een collectie hoekpunten van C verstaan we een minimale eindige deelverzameling $H \subset C$ met $\mathrm{co}\,(H) = C$. (Met minimaliteit bedoelen we hier dat H geen echte deelverzameling H_0 bevat met $\mathrm{co}\,(H_0) = C$.)

Uit § 3.9 van de Syllabus blijkt dat C een collectie hoekpunten heeft, namelijk de daar gevonden collectie $\{a_1, \ldots, a_k\}$. We zullen verderop zien dat C precies één collectie van hoekpunten heeft. Deze collectie valt samen met de collectie $\mathrm{ext}\,(C)$ van extremaalpunten van C; voor dit laatste begrip verwijzen we naar de definitie in § 3.10 in het boek.

In de volgende opgave wordt aangetoond dat de collectie hoekpunten van C samenvalt met de collectie extremaalpunten. Zie Syll. § 3.10.

Opgave 2.4

(a) Laat zien dat ieder extremaalpunt p van C tot $\{x_1, \ldots, x_n\}$ behoort. Hint: schrijf p als convexe combinatie $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ en veronderstel dat $\lambda_1 \neq 1$. Laat zien dat $p = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) q$ met $q \in \mathrm{co}\,(x_2, \ldots, x_n)$ en gebruik de eigenschap van een extremaalpunt.

(b) Zij H een collectie hoekpunten van C. Toon aan dat $\mathrm{ext}\,(C) \subset H$.

(c) Zij H een collectie hoekpunten van C. Toon aan dat $H \subset \text{ext}\,(C)$. Hint: schrijf $H = \{a_1, \ldots, a_k\}$, en veronderstel dat a_1 niet extremaal is. Schrijf a_1 als convexe combinatie van $p, q \in C \setminus \{a_1\}$. Schrijf vervolgens p en q als convexe combinaties van $a_1, \ldots, a_k$ en beredeneer dat $a_1 \in \text{co}\,(a_2, \ldots, a_k)$.

(d) Toon aan dat C precies één collectie van hoekpunten heeft en dat deze collectie samenvalt met de collectie $\text{ext}\,(C)$. In het bijzonder zien we dus dat de collectie van extremaalpunten van een convex polytoop eindig is.

Verwijzing: Bestudeer 3.11 t/m 3.14.

In Syll. § 3.14 wordt de definitie van algebraïsch inwendige A^{i} en algebraïsche afsluiting A^{a} van een deelverzameling $A \subset V$ gegeven. Is V eindig dimensionaal en A convex, dan vallen deze verzamelingen samen met het gebruikelijke topologische inwendige $\text{int}\,(A)$ respectievelijk de topologische afsluiting $\overline{A}$ van A, zoals we verderop zullen laten zien. We slaan daarom de behandeling van 3.15 tot en met 3.22 over, en gaan verder met 3.23 in de Syllabus.

Topologie op V

We brengen in herinnering dat V eindig dimensionaal is. Derhalve heeft V een basis $v_1, \ldots, v_n$, met $n = \dim V$. Zij $T : \mathbb{R}^n \to V$ de lineaire afbeelding die bepaald wordt door $Te_j = v_j$, voor $1 \le j \le n$ (hierin is $e_1, \ldots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$). Merk op dat T gegeven wordt door

$$T(x) = T(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j.$$

Omdat T basis in basis overvoert, is T een lineair isomorfisme, d.w.z. een bijectieve lineaire afbeelding. Merk op dat $T^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$ weer lineair is.

Via het lineaire isomorfisme T kunnen we het standaardinproduct van $\mathbb{R}^n$ overplanten op V. Het aldus gedefinieerde inproduct op V wordt gegeven door

$$\langle \xi \mid \eta \rangle_V = \langle T^{-1}\xi \mid T^{-1}\eta \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \eta_j,$$

als $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ en $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ de coordinaten van ξ en η ten aanzien van de basis $v_1, \ldots, v_n$ zijn.

Zij nu $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ een willekeurig inproduct op V. Dan kan men een norm op V definiëren door $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. Deze norm kan men weer gebruiken om een metriek d op V te definiëren, door $d(x, y) = \|x - y\|$. Hiermee is (V, d) een metrische ruimte. Volgens Analyse 1A zijn er nu een begrip van open verzameling en daarmee gerelateerde begrippen, zoals gesloten verzameling, limiet, continuïteit. Een belangrijke vraag is nu of deze begrippen afhankelijk zijn van de specifieke norm waarmee men start. Hieronder zullen we zien dat het antwoord op deze vraag ontkennend is.

Definitie 2.5 Twee normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ op V heten **equivalent** indien er constanten $C_{12}, C_{21} > 0$ bestaan zo dat

$$\|x\|_1 < C_{12}\|x\|_2 \quad \text{en} \quad \|x\|_2 < C_{21}\|x\|_1 \quad \forall x \in V.$$

Lemma 2.6 *Laten $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ twee equivalente normen op V zijn, en d_1, d_2 de bijbehorende metrieken. Dan geldt voor iedere verzameling $O \subset V$ dat O open is ten aanzien van d_1 dan en slechts dan als O open is ten aanzien van d_2.*

Bewijs: Zij $a \in V, R > 0$. We noteren met $B_j(a;R)$ de open bol met middelpunt a en straal R ten aanzien van de metriek d_j, voor $j = 1, 2$. We beginnen met de observatie dat uit de schatting van de bovenstaande definitie volgt, dat

$$B_1(a;R) \subset B_2(a;C_{21}R) \qquad \text{en} \qquad B_2(a;R) \subset B_1(a;C_{12}R).$$

Veronderstel dat O open is ten aanzien van d_1. Zij $a \in O$. Dan is a een inwendig punt van O ten aanzien van d_1, dus er is $\delta > 0$ zo dat $B_1(a;\delta) \subset O$. Hieruit volgt met het bovenstaande dat $B_2(a;C_{12}^{-1}\delta) \subset O$. Dus a is ook een inwendig punt ten aanzien van d_2. Hieruit blijkt dat O ook open is ten aanzien van d_2. De omgekeerde implicatie wordt op soortgelijke wijze bewezen. □

Lemma 2.7 *Zij V een eindig dimensionale lineaire ruimte. Dan is ieder tweetal normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_2$ op V equivalent.*

Bewijs: Door transport via een lineair isomorfisme zien we in dat het voldoende is deze stelling te bewijzen voor $V = \mathbb{R}^n$. Verder mogen we veronderstellen dat een van de twee gegeven normen, zeg $\|\cdot\|_1$ de standaard Euclidische is. We merken eerst op dat voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\|x\|_2 = \|\sum_{j=1}^n x_j e_j\|_2 \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\|_2 \leq nM\|x\|_1,$$

met $M = \max_{1 \leq j \leq n} \|e_j\|_2$. Hierbij is de driehoeksongelijkheid voor $\|\cdot\|_2$ gebruikt, en de schatting $|x_j| \leq \|x\|_1$, voor de Euclidische norm. Uit het bovenstaande volgt, voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, dat $\|x - y\|_2 \leq nM\|x - y\|_1$. De functie $x \mapsto \|x\|_2$ is dus continu ten aanzien van de Euclidische afstand. We beschouwen de Euclidische eenheidssfeer

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1\}.$$

Deze verzameling is gesloten en begrensd, dus $x \mapsto \|x\|_2$ neemt zijn minimum m aan op S in een punt $a \in S$. Omdat $a \neq 0$ geldt $m = \|a\|_2 > 0$. Zij nu $x \in V$. Dan is er een $\xi \in S$ zo dat $x = \|x\|_1\xi$. (Als $x \neq 0$ dan is $\xi = \|x\|_1^{-1}x$, als $x = 0$ dan voldoet iedere ξ.) Er geldt $\|\xi\|_2 \geq m$, en door vermenigvuldiging met $\|x\|_1$ verkrijgen we hieruit dat $\|x\|_2 \geq m\|x\|_1$, dus

$$\|x\|_1 \leq m^{-1}\|x\|_2.$$

Hiermee is de equivalentie van de normen bewezen. Voor de constanten uit Definitie 2.5 kan men $C_{21} = nM$ en $C_{21} = m^{-1}$ nemen. □

Uit de bovenstaande resultaten blijkt dat men kan werken met een willekeurige norm op V. De bijbehorende collectie $\mathcal{T}$ van open verzamelingen is onafhankelijk van de keuze van de norm. We brengen in herinnering dat de collectie $\mathcal{T}$ voldoet aan de volgende eigenschappen

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}$;

(b) $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$;

(c) $\mathcal{A} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \cup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T}$.

Een collectie deelverzamelingen $\mathcal{T}$ van een verzameling V die voldoet aan de bovenstaande eigenschappen (a)-(c) heet een **topologie** op V. Een verzameling voorzien van een topologie heet een **topologische ruimte**. De elementen van $\mathcal{T}$ heten ook in deze algemene context open verzamelingen.

Is V een eindig dimensionale lineaire ruimte, dan geeft iedere norm op V dus een topologie die onafhankelijk is van de keuze van de norm. Begrippen die puur in termen van open verzamelingen geformuleerd kunnen worden heten topologische begrippen. Deze begrippen zijn dan ook onafhankelijk van de keuze van een norm op V. We laten enkele van deze begrippen – en hun definities in termen van open verzamelingen – nog eens de revu passeren.

Een punt $a \in V$ heet **inwendig punt** van een deelverzameling A van V indien er een $O \in \mathcal{T}$ (een open verzameling) bestaat met $a \in O \subset A$. De collectie inwendige punten van A heet het **inwendige** van A en wordt genoteerd met $\text{int}\,(A)$; de notatie is een afkorting van het Engelse 'interior'.

Onder een **omgeving** van een punt $a \in V$ verstaan we een deelverzameling $U \subset V$ waarvan a inwendig punt is; d.w.z. er bestaat een open verzameling O met $a \in O \subset U$.

Een punt $a \in V$ heet **verdichtingspunt** van een deelverzameling $A \subset V$ indien voor iedere omgeving U van a geldt $U \cap A \neq \emptyset$. De collectie verdichtingspunten van A heet de **afsluiting** van A en wordt genoteerd met $\overline{A}$.

Een verzameling $A \subset V$ heet **gesloten** indien $V \setminus A$ open is (dus tot $\mathcal{T}$ behoort). Equivalent hiermee is de eis dat $\overline{A} = A$; m.a.w. ieder verdichtingspunt van A behoort tot A.

Is $f : V \rightarrowtail W$ een (partieel gedefinieerde) afbeelding tussen verzamelingen, dan noteren we het domein van f met $\text{Dom}\,(f)$. Zijn V en W topologische ruimten, en $a \in V$, $b \in W$, dan betekent $\lim_{x \to a} f(x) = b$ dat er voor elke omgeving B van b een omgeving A van a bestaat met $f(\text{Dom}\,(f) \cap A) \subset B$. Hieruit blijkt dat ook het **limietbegrip** een topologisch begrip is. De afbeelding f heet **continu** in een punt a indien $a \in \text{Dom}\,(f)$ en $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$; de afbeelding heet continu op een verzameling $A \subset V$ indien hij continu is in elk punt van A.

We merken op dat continuïteit van een afbeelding tussen topologische ruimten gekarakteriseerd kan worden in termen van volledige originelen van open en gesloten verzamelingen. Het bewijs verloopt precies zo als voor metrische ruimten in Analyse 1A.

Lemma 2.8 *Zij $f : V \to W$ een afbeelding tussen topologische ruimten. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *f is continu;*

(b) *Voor iedere open verzameling $O \subset W$ is $f^{-1}(O)$ open in V;*

(c) *Voor iedere gesloten verzameling $A \subset W$ is $f^{-1}(A)$ gesloten in V.*

Onder een **homeomorfisme** tussen topologische ruimten V en W verstaan we een bijectieve continue afbeelding $f : V \to W$ waarvan de inverse f^{-1} ook continu is.

Gevolg 2.9 *Een homeomorfisme $f : V \to W$ beeldt open verzamelingen af op open verzamelingen en brengt zo een bijectie tot stand van alle open deelverzamelingen van V op alle open deelverzamelingen van W. Tevens brengt het een bijectie tot stand van alle gesloten deelverzamelingen van V op alle gesloten deelverzamelingen van W.*

Bewijs: We noteren de inverse van f met $g : W \to V$. De afbeeldingen f en g zijn beide continu. Is $T \subset W$ dan wordt het volledig origineel van T onder f gegeven door $f^{-1}(T) = g(T)$. Het volledig origineel van een verzameling $S \subset V$ onder g komt overeen met het beeld van S onder f, dus $g^{-1}(S) = f(S)$.

Is $O \subset V$ open, dan is $f(O) = g^{-1}(O)$ open in W vanwege het bovenstaande lemma. Is $U \subset W$ open, dan is $g(U) = f^{-1}(U)$ open, en $f(g(U)) = U$. De afbeelding $O \mapsto f(O)$ beeldt de open verzamelingen van V dus surjectief af op die van W. Ga na dat de afbeelding ook injectief, dus bijectief is. Het bewijs voor gesloten verzamelingen verloopt op soortgelijke wijze. $\square$

Na deze inleidende opmerkingen behandelen we een zeer nuttig lemma dat convexiteit verbindt met topologie, en in het vervolg nog vaak gebruikt zal worden. We veronderstellen steeds dat V een eindig dimensionale reële lineaire ruimte is en voorzien van de topologie die afkomstig is van een of andere norm. Zijn $a, b \in V$ dan zullen we de notatie $[a, b]$ gebruiken voor het gesloten lijnstuk dat a en b verbindt, dus

$$[a, b] := \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Voorts gebruiken we de notatie

$$[a, b\rangle := [a, b] \setminus \{b\} = \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t < 1\}$$

Lemma 2.10 (IJshoorn lemma) *Zij $C \subset V$ convex. Is $a \in \operatorname{int}(C)$ en $b \in \overline{C}$, dan is $[a, b\rangle \subset \operatorname{int}(C)$.*

Bewijs: Dit bewijs is een wat uitgebreidere versie van het bewijs van Syll., Stelling 3.23 (b). Zij $c \in \langle a, b\rangle$. Dan is $c = a + \lambda(b - a)$ voor een $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. We moeten bewijzen dat er een omgeving O van c bestaat met $O \subset C$.

Merk op dat $b = \lambda^{-1}(c + (\lambda - 1)a)$. De afbeelding $x \mapsto \lambda^{-1}(c + (\lambda - 1)x)$ is een homeomorfisme van V op zichzelf dat a overvoert in b. Er bestaat een open omgeving U van a met $U \subset C$. Wegens Gevolg 2.9 is $\lambda^{-1}(c + (\lambda - 1)U)$ een open omgeving van b. Er geldt $b \in \overline{C}$, dus er bestaat een $b_1 \in C \cap \lambda^{-1}(c + (\lambda - 1)U)$. Kies $a_1 \in U$ zo dat

$b_1 = \lambda^{-1}(c + (\lambda - 1)a_1)$. Dan geldt $c = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) = (1-\lambda)a_1 + \lambda b_1$. Nu hebben we bereikt dat $a_1 \in U \subset C$ en $b_1 \in C$. De verzameling U is een open omgeving van a_1, dus $(1-\lambda)U + \lambda b_1$ is een open omgeving van c; wegens convexiteit van C is deze omgeving bevat in C. Derhalve behoort c tot $\operatorname{int} C$. □

Lemma 2.11 *Zij $C \subset V$ convex. Dan zijn ook $\overline{C}$ en $\operatorname{int}(C)$ convex.*

Bewijs: Voor de convexiteit van $\overline{C}$ verwijzen we naar Syll., bewijs van Stelling 3.23 (a). De convexiteit van $\operatorname{int}(C)$ volgt uit het bovenstaande lemma. Immers, zij $a, b \in \operatorname{int}(C)$. Dan is $b \in \overline{C}$, dus $[a, b\rangle \subset \operatorname{int}(C)$, dus ook $[a, b] \subset \operatorname{int}(C)$. □

Het volgende lemma is alleen juist in de context van een eindig dimensionale lineaire ruimte V. We brengen in herinnering dat de begrippen algebraïsch inwendige en algebraïsche afsluiting gedefinieerd zijn in Syll. 3.14.

Lemma 2.12 *Zij $C \subset V$ convex. Het topologisch inwendige $\operatorname{int}(C)$ is gelijk aan het algebraïsch inwendige C^{i}.*

Bewijs: Zij $c \in \operatorname{int}(C)$. Dan is er een open omgeving U van c met $U \subset C$. Zij $v \in V$. De afbeelding $\varphi : t \mapsto c + tv$, $\mathbb{R} \to V$ is continu, dus er is een $\delta > 0$ zo dat $\varphi([-\delta, \delta]) \subset U$. Hieruit blijkt dat $c \in C^{\mathrm{i}}$. We concluderen dat $\operatorname{int}(C) \subset C^{\mathrm{i}}$.

Voor de omgekeerde inclusie hebben we de eindig dimensionaliteit van V nodig. Zij $c \in C^{\mathrm{i}}$. Door transleren over $-c$ zien we dat we zonder verlies van algemeenheid mogen veronderstellen dat $c = 0 \in C^{\mathrm{i}}$. Door een lineair isomorfisme $V \simeq \mathbb{R}^n$ te gebruiken zien we dat we zonder verlies van algemeenheid mogen veronderstellen dat $V = \mathbb{R}^n$.

Voor iedere $1 \leq j \leq n$ bestaat er een $\delta_j > 0$ zo dat $\delta_j[-e_j, e_j] \subset C$. Zij $\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \delta_j$. Dan is wegens de convexiteit

$$C \supset \delta \operatorname{co}(\cup_{1 \leq j \leq n}[-e_j, +e_j]) \supset \delta \operatorname{co}\{\pm e_j \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

We zullen laten zien dat de laatste verzameling de verzameling δU bevat, met

$$U := \prod_{1 \leq j \leq n} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].$$

Aangezien U, dus δU, een omgeving van 0 is volgt dan dat $c = 0 \in \operatorname{int}(C)$. Hiermee zal het bewijs voltooid zijn.

Dat de geclaimde inclusie geldt is als volgt in te zien. Zij $p \in U$. Dan is

$$p = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varepsilon_j,$$

met $0 \leq \lambda_j \leq \frac{1}{n}$ en met $\varepsilon_j = \pm e_j$. We merken op dat $\sum_{j \geq 1} \lambda_j \leq 1$, dus $\lambda_0 := 1 - \sum_{j \geq 1} \lambda_j \geq 0$. Er geldt $p = \lambda_0 \, 0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varepsilon_j$, dus

$$p \in \operatorname{co}(\{0\} \cup \{\pm e_j \mid 1 \leq j \leq n\}) = \operatorname{co}\{\pm e_j \mid 1 \leq j \leq n\}.$$

□

In de Syllabus is een convex lichaam in V gedefinieerd als een convexe verzameling $C \subset V$ met $\mathrm{int}\,(C) \neq \emptyset$. Analoog is een algebraïsch convex lichaam in V gedefinieerd als een convexe verzameling $C \subset V$ met $C^{\mathrm{i}} \neq \emptyset$. Wegens het bovenstaande lemma vallen deze twee begrippen samen in de eindig dimensionale context.

Lemma 2.13 *Zij $C \subset V$ een convex lichaam. De topologische afsluiting $\overline{C}$ is gelijk aan de algebraïsche afsluiting C^{a}.*

Bewijs: Veronderstel eerst dat $c \in C^{\mathrm{a}}$. Dan is er een $a \in C$ zo dat $[a, c\rangle \subset C$. Zij U een omgeving van c. Wegens de continuiteit van $\gamma : t \mapsto a + t(c - a)$ in 1 is er een $\delta \in \langle 0, 1\rangle$ zo dat $\gamma(\langle 1 - \delta, 1\rangle) \subset U$. Hieruit blijkt dat $U \cap C \neq \emptyset$. Dus $c \in \overline{C}$.

Nu de omgekeerde inclusie. We beschouwen een willekeurige $c \in \overline{C}$. Kies $a \in \mathrm{int}\,(C)$. Dan volgt uit Lemma 2.10 dat $[a, c\rangle \subset C$. Dus $c \in C^{\mathrm{a}}$. □

Opmerking 2.14 Later zullen we zien dat topologische afsluiting en algebraïsche afsluiting van $C \subset V$ ook samenvallen als V eindig dimensionaal is en C een convexe deelverzameling. De eis dat $\mathrm{int}\,(C) \neq \emptyset$ is dus overbodig in de eindig dimensionale context.

Nog een stelling over convexe lichamen.

Lemma 2.15 *Zij $C \subset V$ een convex lichaam. Dan geldt*

(a) $\mathrm{int}\,(\overline{C}) = \mathrm{int}\,(C)$.

(b) $\overline{\mathrm{int}\,(C)} = \overline{C}$.

Bewijs: (a): De inclusie '$\supset$' is evident. Voor de omgekeerde inclusie veronderstellen we dat $c \in \mathrm{int}\,(\overline{C})$. Kies $a \in \mathrm{int}\,(C)$. Dan is er vanwege de continuïteit van $\gamma : t \mapsto c + t(a - c)$ een $\delta > 0$ zo dat $\gamma([-\delta, +\delta]) \subset \mathrm{int}\,(\overline{C}) \subset \overline{C}$. In het bijzonder geldt dus dat $b = \gamma(\delta) \in \overline{C}$. Nu is $c \in [a, b\rangle$ (ga na!), dus wegens Lemma 2.10 geldt $c \in \mathrm{int}\,(C)$.

(b): De inclusie '$\subset$' is evident. Voor de omgekeerde inclusie beschouwen we een willekeurig element $c \in \overline{C}$. Kies $a \in \mathrm{int}\,(C)$, dan geldt wegens Lemma 2.10 dat $[a, c\rangle \subset \mathrm{int}\,(C)$, dus $c \in \mathrm{int}\,(C)^{\mathrm{a}} = \overline{\mathrm{int}\,(C)}$. □

Tenslotte nog een ander resultaat dat convexiteit en topologie verbindt. Voor het bewijs verwijzen we naar de Syllabus, Stelling 3.24.

Lemma 2.16 *Zij $A \subset V$ open. Dan is het convexe omhulsel* $\mathrm{co}\,(A)$ *open.*

Opgave 2.17 Geef een voorbeeld van een gesloten deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^2$ waarvan het convexe omhulsel $\mathrm{co}\,(A)$ niet gesloten is.

Verwijzing: Bestudeer Syll, 5.1, 5.2 en 5.3.

Opmerking 2.18 In 5.3 komt het begrip **compactheid** aan de orde. Voor de algemene definitie van compactheid van een deelverzameling K van een topologische ruimte V verwijzen we naar het college topologie. Is V een metrische ruimte, dan kan men bewijzen dat compactheid van K equivalent is met het in Analyse 1B geïntroduceerde begrip rij-compactheid. We brengen in herinnering dat rij-compactheid behouden blijft onder continue afbeeldingen. Verder brengen we in herinnering dat een deelverzameling K van $\mathbb{R}^n$ (en dus van een eindig dimensionale lineaire ruimte V) rij-compact is dan en slechts dan als hij gesloten en begrensd is.

Verwijzing: Bestudeer Syll. 5.7 en Definitie 5.8.

In Definitie 5.8 wordt gesproken over de geïnduceerde topologie. Hiermee wordt het volgende bedoeld. Is V een verzameling voorzien van een topologie $\mathcal{T}$ en is $W \subset V$, dan is $\mathcal{T}_W := \{O \cap W \mid O \in \mathcal{T}\}$ een topologie op W. Deze topologie heet de geïnduceerde.

Merk op: is V voorzien van een metriek d dan induceert d een metriek d_W op W. Is $\mathcal{T}$ de topologie (collectie open verzamelingen) bij d, dan is $\mathcal{T}_W$ de topologie bij d_W. Geïnduceerde metriek en topologie zijn dus compatibel.

Is $C \subset \mathbb{R}^n$, of algemener $C \subset V$, met V een eindig dimensionale lineaire ruimte, dan kan men de op C geïnduceerde topologie dus als volgt krijgen. Kies een norm op V. Dit geeft een afstand d op V, die een afstand d_C op C induceert. De hierbij behorende topologie is de geïnduceerde topologie.

Het volgende lemma is nuttig voor een goed begrip van Syll. 5.8.

Lemma 2.19 *Zij $C \subset V$ een convexe deelverzameling met $0 \in C$. Dan is het affiene opspansel W van C een lineaire deelruimte van V. Bovendien is C een convex lichaam in W.*

Bewijs: Uit $0 \in C$ volgt $0 \in W$, dus W is een lineaire deelruimte. Er geldt dat $\dim C = \dim W$; pas nu Syll. St. 5.7 toe. $\square$

Gevolg 2.20 *Zij $C \subset V$ convex. Dan is $\overline{C} = C^{\mathrm{a}}$.*

Bewijs: Als $C = \emptyset$ dan valt er niets te bewijzen. Is $C \neq \emptyset$, dan kunnen we door translatie reduceren tot het geval dat $0 \in C$. Zij W het affiene opspansel van C. Dan is W lineair, C een convex lichaam in W, dus wegens Lemma 2.13 is C^{a} gelijk aan de afsluiting van C in W; deze afsluiting is gelijk aan $\overline{C}$, omdat W gesloten is. $\square$

We geven hieronder een ander bewijs van Stelling 5.9 uit de Syllabus. Deze stelling speelt een belangrijke rol in het bewijs van de scheidingsstelling in $\mathbb{R}^n$ (Syll., Stelling 5.11). Eerst een nuttig lemma.

Lemma 2.21 *Laat $T : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen eindig dimensionale lineaire ruimten zijn. Als T surjectief is, dan is T open, d.w.z., voor iedere open deelverzameling $O \subset V$ is $T(O)$ open in W.*

Bewijs: De ruimte $U = \ker T = \{x \in V \mid Tx = 0\}$ is een lineaire deelruimte van V. Zij $\dim V = n$ en zij $k = \dim V - \dim U$. We kiezen een basis $v_1, \ldots, v_n$ van V zo dat $\operatorname{span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\} = U$. Zij $U^c = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Dan is $V = U \oplus U^c$. Zij $P : V \to U^c$ de bijbehorende lineaire projectie met kern U. Dus $P(v_j) = v_j$ voor $1 \leq j \leq k$ en $P(v_j) = 0$ voor $j > k$. We merken op dat $T = T^c \circ P$, met $T^c = T|_{U^c}$. De afbeelding T^c heeft kern $\ker T \cap U^c = U \cap U^c = \{0\}$, dus is injectief. Tevens is T^c surjectief, dus bijectief, en daarmee een lineair isomorfisme van U^c op W. Daarom is T^c een homeomorfisme, en dus open. Voldoende is dus aan te tonen dat P open is. Hiertoe gebruiken we de hierboven ingevoerde basis. Zij $S : V \to \mathbb{R}^n$ de lineaire afbeelding gedefinieerd door $Sv_j = e_j$ voor alle $1 \leq j \leq n$. Zij $S^c : U^c \to \mathbb{R}^k$ de lineaire afbeelding gedefinieerd door $S^c(v_j) = e_j$, voor $1 \leq j \leq k$. Dan zijn S en S^c lineaire isomorfismen, dus homeomorfismen. Het is dus voldoende aan te tonen dat $P' := S^c \circ P \circ S^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ open is. Men gaat gemakkelijk na dat P' de projectie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ op de eerste k coordinaten is (check op de standaardbasis). We zullen laten zien dat deze afbeelding inderdaad open is. Zij $O \subset \mathbb{R}^n$ een open deel. Zij $b \in P'(O)$. Dan is $b = P'(a)$ voor een $a \in O$. Voor voldoend kleine $\delta > 0$ geldt dat het cartesisch product $U = \prod_{1 \leq j \leq n}]a_j - \delta, a_j + \delta[\subset O$. Het P'-beeld van U is het product van de eerste k open intervallen dus open in $\mathbb{R}^k$. Hieruit blijkt dat $P'(U)$ een open omgeving van b in $P'(O)$ is. Elk punt van $P'(O)$ is dus inwendig, dus $P'(O)$ is open. $\square$

Stelling 2.22 *Laat $T : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen eindig dimensionale lineaire ruimten zijn. Zij $C \subset V$ een convexe verzameling. Dan geldt $T(\overline{C}) \subset \overline{T(C)}$. Voorts geldt:*

$$\operatorname{ri}(T(C)) = T(\operatorname{ri}(C)).$$

Bewijs: Als $C = \emptyset$, dan is het resultaat triviaal. We veronderstellen daarom dat $C \neq \emptyset$.

Voor de eerste bewering merken we op dat T continu is, dus $T^{-1}(\overline{T(C)})$ is een gesloten verzameling die C omvat, en daarmee ook $\overline{C}$. Er volgt dat $T(\overline{C}) \subset \overline{T(C)}$. Merk op dat de convexiteit van C hier geen enkele rol speelt.

We geven het bewijs van de tweede bewering eerst in het geval dat $0 \in C$. Zij $V_0 = \operatorname{aff}(C)$. Dan bevat V_0 de oorsprong, dus V_0 is een lineaire deelruimte. Zij $W_0 = T(V_0)$. Dan is $T_0 := T|V_0 : V_0 \to W_0$ een surjectieve lineaire afbeelding. Een surjectieve lineaire afbeelding is open, zie het bovenstaande lemma. Er geldt dat $\operatorname{ri}(C)$ gelijk is aan het inwendig $\operatorname{int}(C)$ van C, gezien als deel van V_0. We zullen laten zien dat $T_0(\operatorname{int}(C))$ gelijk is aan $\operatorname{int}(T_0(C))$, het inwendige van $T_0(C)$ ten aanzien van W_0. Hieruit volgt het gestelde. Omdat T_0 open is, is $T_0(\operatorname{int}(C))$ een open deel van W_0, bevat in $T_0(C)$, dus in $\operatorname{int}(T_0(C))$. We zien dat $T_0(\operatorname{int}(C)) \subset \operatorname{int}(T_0(C))$. In het bijzonder zien we dat C en $T_0(C)$ convexe lichamen zijn in V_0 respectievelijk W_0.

De omgekeerde inclusie bewijzen we als volgt. Kies $x \in \operatorname{int}(C)$. Dan is $T_0(x) \in \operatorname{int}(T_0(C))$. Zij $z \in \operatorname{int}(T_0(C))$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat het element $z' = z + \delta(z - T_0(x))$ tot $T_0(C)$ behoort. We merken op dat $z \in [T_0(x), z'\rangle$. Er is een $y' \in C$ met $T_0(y') = z'$. Omdat C een convex lichaam is, is $[x, y'\rangle \subset \operatorname{int}(C)$. Hieruit volgt dat $[T_0(x), z'\rangle = T_0([x, y'\rangle) \subset T_0(\operatorname{int}(C))$, dus in het bijzonder dat $z \in T_0(\operatorname{int}(C))$. Hiermee is ook de omgekeerde inclusie bewezen.

Tenslotte geven we het bewijs voor een algemene convexe verzameling $C \subset V$. Kies $a \in C$. De verzameling $C_0 := -a + C$ is convex en bevat 0. Uit het eerste deel van het bewijs volgt dat $\mathrm{ri}(T(C_0)) = T(\mathrm{ri}(C_0))$. Hieruit volgt dat $\mathrm{ri}(T(C)) = \mathrm{ri}(T(a + C_0)) = \mathrm{ri}(T(a) + T(C_0)) = T(a) + \mathrm{ri}(T(C_0)) = T(a) + T(\mathrm{ri}(C_0)) = T(a + \mathrm{ri}(C_0)) = T(\mathrm{ri}(C))$. $\square$

3 Lineaire functionalen en hypervlakken

In de paragraaf is V een eindig dimensionale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.

Definitie 3.1 Een **lineaire functionaal** op V is een lineaire afbeelding $V \to \mathbb{R}$. De collectie van alle lineaire functionalen op V wordt genoteerd met V^*. Voorzien van de voor de hand liggende optelling en scalarvermenigvuldiging is V^* weer een lineaire ruimte, die we de **duale ruimte** van V noemen.

Veronderstel dat V dimensie n heeft, en zij $v_1, \dots, v_n$ een basis van V. Voor iedere $1 \leq i \leq n$ is er precies één $v^i \in V^*$ met $v^i(v_j) = \delta_{ij}$ voor alle $1 \leq j \leq n$. Met andere woorden, v^i heeft de rij-matrix $(\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$ ten aanzien van de basis $v_1, \dots, v_n$. Is $\xi \in V^*$, dan is

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi(v_i) v^i;$$

dit blijkt door linker- en rechterlid op elk van de basis vectoren $v_1, \dots, v_n$ te laten werken, en lineariteit te gebruiken. Er volgt dat de functionalen $v^1, \dots, v^n$ de ruimte V^* opspannen. Zijn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ en is $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i v^i = 0$, dan blijkt door beide leden van deze identiteit op de j-de basisvector te laten werken dat $\lambda_j = 0$, voor elke $j \leq j \leq n$. Hieruit volgt dat de collectie functionalen $v^1, \dots, v^n$ lineair onafhankelijk is. We concluderen dat $v^1, \dots, v^n$ een basis van V^* is. Deze basis wordt de **duale basis** ten aanzien van $v_1, \dots, v_n$ genoemd. In het bijzonder zien we dat V^* dezelfde dimensie heeft als V.

Voorbeeld 3.2 We beschouwen de lineaire ruimte $\mathbb{R}^n$. In verband met matrixvermenigvuldiging is het gebruikelijk de elementen van deze ruimte te noteren als kolomvectoren. De werking van een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ op een element $x \in \mathbb{R}^n$ wordt dan gegeven door de linksvermenigvuldiging van de kolomvector x met de matrix van L.

De duale ruimte $(\mathbb{R}^n)^*$ bestaat uit de lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; deze kan men representeren door $1 \times n$-matrices, ofwel rijvectoren ter lengte n. Een rijvector $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ correspondeert zo met het element ξ van $(\mathbb{R}^n)^*$ gegeven door

$$\xi(x) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Aldus kan men $(\mathbb{R}^n)^*$ opvatten als de ruimte der rij-vectoren ter lengte n, voorzien van de coordinaatsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging. De duale basis van de standaardbasis $e_1, \ldots, e_n$ wordt zo gegeven door $e^1, \ldots, e^n$, met

$$e^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0), \qquad 1 \text{ op de } i\text{-de plaats.}$$

De afbeelding $V \times V^* \to \mathbb{R}$, $(x, \xi) \to \xi(x)$ wordt vaak ook genoteerd met $(x, \xi) \mapsto \langle x \mid \xi \rangle$.

Veronderstel nu dat V is voorzien van een positief definiet inproduct $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Voor iedere $v \in V$ definiëren we de lineaire functionaal $\iota(v) \in V^*$ door

$$\iota(v)(x) = \langle x \mid v \rangle.$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\iota : V \to V^*$ een lineaire afbeelding is. Bovendien is de kern $\ker(\iota) = \{v \in V \mid \iota(v) = 0\}$ gelijk aan de nulruimte, dus ι is injectief. Omdat $\dim V = \dim V^*$ volgt hieruit dat ι een lineair isomorfisme (d.w.z., een bijectieve lineaire afbeelding) van V op V^* definieert.

Definitie 3.3 Onder een lineaire deelruimte van V **van codimensie** 1 verstaan we een lineaire deelruimte $L \subset V$ waarvoor een vector $v \in V \setminus \{0\}$ bestaat zo dat $L \oplus \mathbb{R}v = V$.

Een **hypervlak** in V is een deelverzameling H van de vorm $H = a + L$ met $a \in V$ en $L \subset V$ een lineaire deelruimte van codimensie 1.

Het volgende lemma is een speciaal geval van Lemma 2.1.

Lemma 3.4 *Is H een hypervlak in V, dan is er precies één deelruimte L van codimensie 1 zo dat $H = a + L$ voor een $a \in V$. Bovendien geldt voor elke $b \in V$ dat $H = b + L \iff b \in H$.*

Zij $L \subset V$ een lineaire deelruimte van codimensie 1. Dan is er een $v \in V \setminus \{0\}$ met $V = L \oplus \mathbb{R}v$. We definiëren de lineaire functionaal $f \in V^*$ door $f = 0$ op L en $f(v) = 1$. Dan is $L = \ker f = f^{-1}(0)$. Immers, zij $x \in V$ en schrijf $x = y + \lambda v$ met $y \in L$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan is $f(x) = \lambda$. Dus $f(x) = 0 \iff \lambda = 0 \iff x \in L$.

Lemma 3.5 *De codimensie 1 lineaire deelruimten van V zijn de ruimten van de vorm $\ker f$ met $f \in V^* \setminus \{0\}$. Zijn $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ en is $\ker f = \ker g$ dan zijn f en g proportioneel, d.w.z., er bestaat er een $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zo dat $f = \lambda g$.*

Bewijs: De eerste bewering volgt uit de tekst voorafgaande aan het lemma. Voor het bewijs van de tweede bewering schrijven we $L = \ker f$. Dan is $V = L \oplus \mathbb{R}v$ voor een geschikte vector $v \in V \setminus \{0\}$. Uit $f = g = 0$ op L en $f, g \neq 0$ volgt dat $f(v) \neq 0$ en $g(v) \neq 0$. Derhalve bestaat een $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zo dat $g(v) = \lambda f(v)$. Nu is $g = \lambda f$ op L en op $\mathbb{R}v$ dus op V. $\square$

Opmerking 3.6 Is V voorzien van een inproduct, en is L een codimensie 1 hypervlak dan is $L = n^\perp$, met $n \in L^\perp$ een normaalvector ongelijk nul. We merken op dat $L = \ker f$, met $f = \iota(n) = \langle \cdot \mid n \rangle$.

Zij $H \subset V$ een hypervlak. Dan is $H = a + L$ met $a \in V$ en $L \subset V$ een lineaire deelruimte van codimensie 1. Zij $f \in V^*$ zo dat $L = \ker f$. Dan geldt voor alle $x \in H$ dat $f(x) = f(a + (x - a)) = f(a) + f(x - a) = f(a)$. Dus $H \subset f^{-1}(a)$. De omgekeerde inclusie geldt ook. Immers zij $x \in f^{-1}(a)$, dan is $f(x) = f(a)$, dus $f(x - a) = 0$ dus $x - a \in L$ en we zien dat $x \in a + L = H$.

Lemma 3.7 *De hypervlakken in V zijn de deelverzamelingen $H \subset V$ van de vorm $H = f^{-1}(\alpha)$ met $f \in V \setminus \{0\}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. Zijn $f, g \in V^* \setminus \{0\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $f^{-1}(\alpha) = g^{-1}(\beta)$, dan is er een unieke $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zo dat $g = \lambda f$. Bovendien geldt $\beta = \lambda\alpha$.*

Bewijs: Is H een hypervlak, dan is $H = a + L$ met L een codimensie 1 lineaire deelruimte. Er is een $f \in V^* \setminus \{0\}$ zo dat $L = \ker f$. Voor $x \in V$ geldt: $f(x) = f(a) \iff f(x - a) = 0 \iff x \in a + L = H$, dus $H = f^{-1}(\alpha)$ met $\alpha = f(a)$.

Is omgekeerd $f \in V^* \setminus \{0\}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan is $L := \ker f$ een codimensie 1 lineaire deelruimte. Kies $v \in V \setminus \{0\}$ zo dat $V = L \oplus \mathbb{R}v$. Dan is $f(v) \neq 0$ aangezien $f \neq 0$. Dus $\alpha = \lambda f(v)$ voor een $\lambda \in \mathbb{R}$ en we zien dat $a := \lambda v \in f^{-1}(\alpha)$. Voor $x \in V$ geldt $f(x) = \alpha \iff f(x) - f(a) = \alpha \iff x - a \in L$; dus $f^{-1}(\alpha) = a + L$ is een hypervlak.

We bewijzen tenslotte de laatste bewering. Uit de bovenstaande redenering blijkt dat $H = a + \ker f = b + \ker g$ voor zekere $a, b \in V$. Hieruit volgt dat $\ker f = \ker g$ en $a \in H$, $b \in H$; zie Lemma 3.4. We concluderen met Lemma 3.5 dat $g = \lambda f$ en $\beta = g(b) = \lambda f(b) = \lambda\alpha$. □

Opmerking 3.8 Is V voorzien van een inproduct, dan volgt uit het bovenstaande, gecombineerd met Opmerking 3.6 dat de hypervlakken in V de verzamelingen van de vorm $s + n^\perp$ zijn met $s, n \in V$, $n \neq 0$.

Als $A \subset V$, $f \in V^*$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ dan spreken we af dat we $f(A) \geq \alpha$ schrijven voor de bewering dat $f(x) \geq \alpha$ voor alle $x \in A$. Voorts spreken we af dat

$$f(A) > \alpha \quad :\iff \quad \forall x \in A: \;\; f(x) > \alpha.$$

Op soortgelijke wijze voeren we de notaties $f(A) \leq \alpha$ en $f(A) < \alpha$ in.

Is H een hypervlak in V, dan is $H = f^{-1}(\alpha)$ met $f \in V^* \setminus \{0\}$, en $\alpha \in \mathbb{R}$. De verzamelingen $\langle -\infty, \alpha]$ en $[\alpha, \infty\rangle$ zijn gesloten delen van $\mathbb{R}$. Wegens de continuïteit van f zijn hun volledige originelen onder f gesloten deelverzamelingen van V. Deze volledige originelen

$$\{x \in V \mid f(x) \leq \alpha\} \quad \text{en} \quad \{x \in V \mid f(x) \geq \alpha\}$$

zijn wegens het bovenstaande lemma onafhankelijk van de specifieke keuze van f, op hun volgorde na. We noemen deze gesloten delen de door H bepaalde gesloten halfruimten van V. Merk op dat de doorsnede van deze halfruimten gelijk is aan H.

Op soortgelijke wijze definiëren we de door H bepaalde open halfruimten

$$\{x \in V \mid f(x) < \alpha\} \quad \text{en} \quad \{x \in V \mid f(x) > \alpha\}.$$

Merk op dat V gelijk is aan de disjunkte vereniging van deze halfruimten en H.

Definitie 3.9 Zij $A, B \subset V$ en H een hypervlak in V.
We zeggen dat H de verzamelingen A en B **scheidt** als $A \subset h_1$ en $B \subset h_2$, met h_1, h_2 de door H bepaalde gesloten halfruimten.
De scheiding heet **echt** als A en B niet beide bevat zijn in H.
De scheiding heet **strikt** als $A \subset \operatorname{int}(h_1)$ en $B \subset \operatorname{int}(h_2)$.

Uit de beschrijving van de halfruimten h_1 en h_2 met behulp van lineaire functionalen zien we dat scheiding ook als volgt gekarakteriseerd kan worden.. Zijn $f \in V^*$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat H gegeven wordt door de vergelijking $f = \alpha$. Dan worden h_1 en h_2 gegeven of door respectievelijk de vergelijkingen $f \leq \alpha$ en $f \geq \alpha$ of door respectievelijk de vergelijkingen $f \geq \alpha$ en $f \leq \alpha$. Door de laatste vergelijkingen te herschrijven als $-f \leq -\alpha$ en $-f \geq -\alpha$ zien we dat we f en α altijd zo kunnen kiezen dat $h_1 : f \leq \alpha$ en $h_2 : f \geq \alpha$.

Hieruit volgt het volgende resultaat.

Lemma 3.10 *Het hypervlak H scheidt de verzamelingen A en B dan en slechts dan als er $f \in V^*$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat H gegeven wordt door $f = \alpha$ en zo dat*

$$f(A) \leq \alpha \leq f(B).$$

De scheiding is echt als bovendien A en B niet beide in H gelegen zijn, m.a.w. als in de bovenstaande ongelijkheid niet beide tekens '$\leq$' door '$=$' vervangen kunnen worden.
De scheiding is strikt als

$$f(A) < \alpha < f(B).$$

4 Scheidingsstellingen in $\mathbf{R}^n$

In deze paragraaf zullen we de scheidingsstelling voor convexe verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ behandelen. Omdat het prettiger is coordinaatsvrij te werken, beschouwen we in plaats van $\mathbb{R}^n$ een eindig dimensionale lineaire ruimte V.

Stelling 4.1 *Laat A, B een tweetal convexe verzamelingen zijn in V, met $A \cap \operatorname{int} B = \emptyset$. Dan bestaat er een hypervlak H in V dat A en B echt scheidt.*

Allereerst gebruiken we een nuttig lemma, dat de scheiding van twee verzamelingen $A, B \subset V$ door een hypervlak vertaalt naar een eigenschap van de vectoriële verschilverzameling

$$A - B := A + (-B) = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Lemma 4.2 *Laten A en B twee niet-lege deelverzamelingen van V zijn, en zij $A - B$ het vectoriële verschil. Dan zijn de volgende twee beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De verzamelingen A en B worden gescheiden door een hypervlak.*

(b) *De verzamelingen $\{0\}$ en $A - B$ worden gescheiden door een hypervlak.*

De gelijkwaardigheid van (a) en (b) geldt ook als 'gescheiden' overal vervangen wordt door 'echt gescheiden' of door 'strikt gescheiden'.

Bewijs: Veronderstel dat (a). Dan is er een $f \in V^*$ en een $c \in \mathbb{R}$ zo dat $f \geq c$ op A en $f \leq c$ op B. Voor $a \in A$ en $b \in B$ geldt dus $f(a - b) = f(a) - f(b) \geq c - c = 0$. We concluderen dat (b) geldt. Is de scheiding in (a) echt, dan mogen we zonder verlies van algemeenheid veronderstellen dat er een $a \in A$ bestaat met $f(a) > c$. Hieruit volgt, voor iedere $b \in B$ dat $f(a-b) > 0$, dus ook de scheiding in (b) is echt. Is tenslotte de scheiding in (a) strikt dan geldt de hierboven gegeven redenering met strikte ongelijktekens. De scheiding in (b) is dan ook strikt.

Veronderstel nu dat (b). Dan bestaan er een $g \in V^*$ en $d \in \mathbb{R}$ zo dat $g(0) \leq d$ en $g \geq d$ op $A - B$. We concluderen dat $g \geq d \geq 0$ op $A - B$. We beschouwen de deelverzamelingen $g(A)$ en $g(B)$ van $\mathbb{R}$. Uit het gegeven volgt dat voor alle $\alpha \in g(A)$ en alle $\beta \in g(B)$ geldt $\alpha - \beta \geq 0$ dus $\beta \leq \alpha$. Hieruit volgt dat $g(B)$ naar boven begrensd en dat $g(A)$ naar onderen begrensd is, dus $\alpha_0 = \inf g(A)$ en $\beta_0 = \sup g(B)$ bestaan. Bovendien geldt dat $\alpha \geq \beta_0$ voor alle $\alpha \in g(A)$, dus ook $\alpha_0 \geq \beta_0$. We concluderen dat $g \geq \alpha_0$ op A, terwijl $g \leq \beta_0 \leq \alpha_0$ op B. Hieruit volgt (a). Is de scheiding in (b) echt, dan kunnen we $d \geq 0$ zo kiezen dat er een $a \in A$ en $b \in B$ bestaan zo dat $g(a - b) > d$. Hieruit volgt dat $g(a) - g(b) > 0$ dus $g(b) < g(a)$; dus $g(a) > \alpha_0$ of $g(b) < \alpha_0$. De scheiding in (a) is dus ook echt. Is de scheiding in (b) strikt, dat kunnen we $d > 0$ kiezen, terwijl $g > d$ op $A - B$. Hieruit volgt dat $g(a) - g(b) > d$ voor alle $a \in A, b \in B$, dus $\beta_0 \leq \alpha_0 - d$. Hieruit blijkt dat A en B strikt gescheiden worden. $\square$

We brengen in herinnering (Opmerking 2.18) dat een deelverzameling $C \subset V$ compact is dan en slechts dan als C rij-compact is. Dit laatste is weer equivalent met de uitspraak dat C gesloten en begrensd is.

Lemma 4.3 *Zij $\|\cdot\|$ een norm op V en $A \subset V$ een niet-lege gesloten deelverzameling die 0 niet bevat. Dan neemt de functie $d : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ een minimale waarde aan, d.w.z., er is een $a \in A$ zo dat $d(x) \geq d(a)$ voor alle $x \in A$.*

Bewijs: Kies een punt $a_0 \in A$. Dit kan omdat $A \neq \emptyset$. Zij $R = \|a_0\|$. Dan is de gesloten bol $\bar{B}(0; R) = \{x \in V \mid \|x\| \leq R\}$ gesloten en begrensd. Dus ook de verzameling $A_0 := A \cap \bar{B}(0; R)$ is gesloten en begrensd. Merk op dat $a_0 \in A_0$, dus $A_0 \neq \emptyset$. De functie d is continu, dus neemt een minimale waarde aan op A_0. Er is dus een punt $a \in A_0$ zo dat

$$d(x) \geq d(a) \tag{3}$$

voor alle $x \in A_0$. In het bijzonder geldt dus dat $R = d(a_0) \geq d(a)$. Is $x \in A \setminus A_0$ dan is $x \notin \bar{B}(0; R)$, dus $d(x) > R \geq d(a)$. We concluderen dat de ongelijkheid (3) geldt voor alle $x \in A$. $\square$

Lemma 4.4 *Zij $C \subset V$ een gesloten convexe verzameling en $p \in V$ een punt met $p \notin C$. Dan bestaat er een hypervlak dat p en C strikt scheidt.*

Bewijs: Door een translatie over $-p$ toe te passen zien we dat we zonder verlies van algemeenheid mogen veronderstellen dat $p = 0$.

We voorzien dat ruimte V van een inproduct $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Dit inproduct definieert een norm $\| \cdot \|$ op V. We beschouwen de functie $\delta : C \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\delta(x) = \|x\|^2 = \langle x \mid x \rangle$. De functie δ neemt zijn minimum aan op C wegens het bovenstaande lemma, zeg in een punt $c \in C$. Er geldt dat $c \neq 0$.

Zij $x \in C$ willekeurig. Dan geldt dat $c + t(x - c) \in C$ voor elke $t \in [0, 1]$. Hieruit volgt weer dat $\langle c \mid c \rangle \leq \langle c + t(x - c) \mid c + t(x - c) \rangle = \langle c \mid c \rangle + 2t\langle x - c \mid c \rangle + t^2\|x - c\|^2$, dus dat

$$t(2\langle x - c \mid c \rangle + t\|x - c\|^2) \geq 0 \qquad (0 < t \leq 1).$$

Door in het bovenstaande door t te delen en de limiet te nemen voor $t \downarrow 0$ leiden we af dat

$$\langle x - c \mid c \rangle \geq 0 \qquad \forall\, x \in C.$$

We definiëren het element $f \in V^*$ door $f(x) = \langle x \mid c \rangle$. Dan volgt uit het bovenstaande dat $f \geq \|c\|^2 > 0$ op C. We concluderen dat $\{0\}$ en C strikt gescheiden worden door het hypervlak $f = \frac{1}{2}\|c\|^2$. Maak zelf een schets waaruit de meetkundige betekenis van deze laatste bewering blijkt. $\square$

Lemma 4.5 *Zij $C \subset V$ een convex lichaam en $p \in V$ een punt dat niet in het inwendige van C gelegen is. Dan is er een hypervlak dat C en p echt scheidt. Een dergelijk hypervlak bevat C niet.*

Bewijs: Kies een punt $a \in \mathrm{int}\,(C)$ en zij l de lijn door p en a. Kies een punt $q \in l$ zo dat $p \in [a, q\rangle$. Kies vervolgens een rij punten $p_j \in \langle p, q]$ met de eigenschap dat $\lim_{j\to\infty} p_j = p$. We merken op dat voor elke j geldt dat $p \in [a, p_j\rangle$, dus wegens het ijshoornlemma, Lemma 2.10, $p_j \notin \overline{C}$. De verzameling $\overline{C}$ is convex (Lemma 2.11), dus voor iedere j bestaat een hypervlak H_j dat p_j en $\overline{C}$ strikt scheidt.

Het idee is nu te laten zien dat de rij $(H_j)_{j\geq 1}$ een convergente deelrij heeft, met als limiet een hypervlak dat p en $\overline{C}$ echt scheidt. Dit gaat als volgt.

Kies een inprodukt op V. Dan kan het hypervlak H_j geschreven worden als $v_j + n_j^{\perp}$, met $v_j \in H_j$ en $n_j \in V$ een vector met lengte $\|n_j\| = 1$. Dus $H_j = \{x \in V \mid \langle x - v_j \mid n_j \rangle = 0\}$. Definiëren we de lineaire functionaal $f_j \in V^*$ door $f_j(x) = \langle x \mid n_j \rangle$, dan zien we dat $H_j = f_j^{-1}(v_j)$, met $\alpha_j = \langle v_j \mid n_j \rangle$. Het hypervlak scheidt p_j strikt van $\bar{C}$, dus na eventueel vervangen van n_j door zijn tegengestelde mogen we veronderstellen dat

$$f_j(\bar{C}) > \alpha_j > f_j(p_j).$$

We tonen eerst aan dat H_j het interval $[a, p_j]$ in precies één punt s_j snijdt. De functie $\varphi_j : t \mapsto f_j(a + t(p_j - a))$ is lineair, en $\varphi(0) > \alpha_j > \varphi(1)$. Er is derhalve precies één

$t_j \in [0,1]$ met $\varphi_j(t_j) = \alpha_j$. Het gezochte unieke snijpunt is dus $s_j = a + t_j(p_j - a)$. Merk op dat $\alpha_j = f_j(s_j)$, dus er geldt:

$$\langle p_j - s_j \mid n_j \rangle < 0 \quad \text{en} \quad \langle c - s_j \mid n_j \rangle > 0 \qquad (c \in \bar{C}).$$

Voor elke j geldt dat $s_j \in [a, p_j] \subset [a, q]$. De rij (s_j) ligt in de compact verzameling $[a, q]$ en heeft dus een convergente deelrij met limiet $s \in [a, q]$. Na overgang op deze deelrij mogen we veronderstellen dat $\lim_{j\to\infty} s_j = s \in [a, q]$.

De rij n_j is gelegen in de compacte eenheidssfeer $\{x \; inV \mid \|x\| = 1\}$ in V en heeft dus een convergente deelrij met als limiet een vector $n \in V$ met $\|n\| = 1$. Na overgang op een geschikte deelrij mogen we zonder verlies van algemeenheid veronderstellen dat $\lim_{j\to\infty} n_j = n$.

We merken nu op dat

$$\langle p - s \mid n \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle p_j - s_j \mid n_j \rangle \leq 0$$

en dat voor elke $c \in \overline{C}$ geldt

$$\langle c - s \mid n \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle c - s_j \mid n_j \rangle \geq 0.$$

Hieruit volgt dat het hypervlak $H := s + n^\perp$ het punt p scheidt van de convexe verzameling $\overline{C}$. Omdat de laatste verzameling een niet-leeg inwendige heeft, kan hij niet in H gelegen zijn. De scheiding is dus echt. $\square$

Lemma 4.6 *Zij $C \subset V$ een convexe deelverzameling en $p \in V$ een punt dat niet in het relatieve inwendige van C gelegen is. Dan is er een hypervlak dat p en C echt scheidt. Dit hypervlak kan zo gekozen worden dat het C niet bevat.*

Bewijs: Door translatie toe te passen zien we dat we zonder verlies van algemeenheid mogen veronderstellen dat $0 \in \mathrm{ri}(C)$. Zij W het affiene opspansel van C. Omdat $0 \in W$ is W een lineaire deelruimte van V. Het relatieve inwendige $\mathrm{ri}(C)$ is het inwendige van C ten aanzien van W. Er zijn nu twee mogelijkheden: (a) $p \in W$ en (b) $p \notin W$.

Geval (a). In dit geval is $p \in W$ niet in het inwendige van C ten aanzien van W gelegen. Wegens het voorgaande lemma, toegepast op W, C, p bestaat er een codimensie 1 affiene deelruimte h van W die p en C echt scheidt. Bovendien is C geen deel van h. Kies een lineaire functionaal $g \in W^*$ en een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $h = \{x \in W \mid g(x) = \alpha\}$ en zo dat $g(p) \leq \alpha \leq g(C)$. Kies $f \in V^*$ zo dat $f|_W = g$. Dan geldt $f(p) \leq \alpha \leq f(C)$, dus het hypervlak $H = \{x \in V \mid f(x) = \alpha\}$ scheidt p en C. Merk op dat $h = H \cap W$. Aangezien C wel binnen W ligt, maar niet binnen h, ligt C ook niet binnen H. De scheiding is dus echt.

Geval (b). In dit geval heeft W een positieve codimensie. Derhalve bestaat er een codimensie 1 lineaire deelruimte $H \subset V$ met $W \subset H$ en $p \notin H$. Het hypervlak H scheidt p en C echt. We zullen aantonen dat het hypervlak door verschuiving in een positie gebracht kan worden dat zijn doorsnede met C leeg is. Kies een $f \in V^*$ zo dat H gegeven wordt door de vergelijking $f = 0$. Er geldt dat $p \notin H$, dus $f(p) \neq 0$. Door f eventueel van een min teken te voorzien kunnen we er voor zorgen dat $f(p) < 0$. Schrijf $\alpha = \frac{1}{2} f(p)$ en zij H' het hypervlak gegeven door de vergelijking $f = \alpha$. Dan is $f(p) < \alpha < 0 = f(C)$. Het hypervlak H' scheidt p en C dus zelfs strikt. □

Stelling 4.7 *Laten $C, D \subset V$ convex en niet-leeg zijn. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *Er bestaat een hypervlak in V dat C en D echt scheidt.*

(b) $\mathrm{ri}(C) \cap \mathrm{ri}(D) = \emptyset$.

Bewijs: We beschouwen de verschilverzameling $A = C - D$. Wegens Lemma 4.2 is conditie (a) gelijkwaardig met (a)': er bestaat een hypervlak dat 0 en A echt scheidt.

Anderzijds geldt wegens Syll. Stelling 5.10 (a-b) dat $\mathrm{ri}(A) = \mathrm{ri}(C) - \mathrm{ri}(D)$. Conditie (b) is dus gelijkwaardig met (b)': $0 \notin \mathrm{ri}(A)$.

Wegens de voorgaande stelling is (a)' een gevolg van (b)'. Rest ons de omgekeerde implicatie aan te tonen. Stel dat (a)'. Dan is er een lineaire functionaal $f \in V^*$ zo dat $f(0) \geq f(A)$ en zo dat $f(0) < f(b)$ voor een punt $b \in A$. Uit de lineariteit van f volgt dat $f(0) = 0$.

Stel dat $0 \in \mathrm{ri}(A)$. We zullen het bewijs voltooien door te laten zien dat deze aanname tot een tegenspraak leidt. In de eerste plaats volgt uit de aanname dat $0 \in \mathrm{aff}(A)$, dus $\mathrm{aff}(A)$ is een lineaire deelruimte van V. Kies een $v \in \mathrm{aff}\, A \setminus \{0\}$. Dan is met $\mathbb{R}v \subset \mathrm{aff}(A)$. Er geldt dat $\mathrm{ri}(A) \cap \mathbb{R}v$ een open omgeving van 0 in $\mathbb{R}v$ bevat. Voor geschikte $r > 0$ geldt dus dat $[-r, r]v \subset \mathrm{ri}(A) \subset A$, dus $f \geq 0$ op $[-r, r]v$. Hieruit volgt dat $f(-rv) = -rf(v) \geq 0$ en $rf(v) \geq 0$, dus $f(v) = 0$. We concluderen dat $f = 0$ op $\mathrm{aff}(A)$, dus op A, in tegenspraak met de eerder gedane bewering $0 < f(b)$. □

Bovenstaande stelling staat in de Syllabus als Stelling 5.11, met een heel ander bewijs. We geven ook een ander bewijs van Lemma 5.11.

Lemma 4.8 *Zij V een eindig dimensionale lineaire ruimte, $B \subset V$ een relatief open convexe deelverzameling en $a \in V$ een punt buiten B. Dan is er een hypervlak $H \subset V$ met $a \in H$ en $H \cap B = \emptyset$.*

Bewijs: Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $B \neq \emptyset$ en dat B de oorsprong bevat. Zij $V_0 = \mathrm{aff}(B)$. Dan is V_0 een lineaire deelruimte van V. We onderscheiden twee gevallen: (a) $a \in V_0$, (b) $a \notin V_0$.

(a) Nu is B een open convex deel van V_0 en $a \in V_0$ een punt buiten B, dus wegens een eerder bewezen scheidingstelling is er een hypervlak H_0 in V_0 dat $\{a\}$ en B echt scheidt. Er is dus een $f_0 \in V_0^*$ zo dat $f_0(B) \geq f_0(a)$, terwijl $f_0(b) > f_0(a)$ voor een $b \in B$. Stel dat er een $b_0 \in B$ bestond met $f_0(b_0) = f_0(a)$. Dan zou er een $b' \in B$ bestaan met $b_0 \in [b, b'\rangle$. Hiervoor zou gelden $f_0(b_0) \in [f_0(b), f_0(b')\rangle$, dus $f_0(b') > f_0(b_0) = f_0(a)$, tegenspraak. We concluderen dat a bevat is in het hypervlak $H_0 : f_0 = f_0(a)$, terwijl $f_0(B) > f_0(a)$, dus $B \cap H_0 = \emptyset$. Kies een $f \in V^*$ met $f|V_0 = f_0$. Dan voldoet het hypervlak $f^{-1}(f_0(a))$ aan alle eisen.

(b) We veronderstellen nu dat $a \notin V_0$. Kies een basis $v_1, \ldots, v_k$, dan $k < n$. Breidt de basis met vectoren $v_{k+1}, \ldots, v_n$ uit tot een basis van V. Laten $a_1, \ldots, a_n$ de componenten van a zijn ten aanzien van deze basis. Dan is $a_j \neq 0$ voor een $k < j \leq n$. Zij $f \in V^*$ de lineaire functionaal die voldoet aan $f(v_i) = \delta_{ij}$. Zij H het hypervlak $f^{-1}(a_j)$. Dan is $a \in H$, terwijl $H \cap V_0 = \emptyset$, dus $H \cap B = \emptyset$. □

Definitie 4.9 Zij $A \subset V$ en $a \in A$. Onder een **stuthypervlak** van A in a verstaan we een hypervlak $H \subset V$ dat a bevat en a en A echt scheidt.

Men kan het bovenstaande ook anders zeggen: $a \in H$ en A ligt aan een kant van H. Dit laatste kan weer als volgt gezegd worden: er is een $f \in V^*$ en een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $H = f^{-1}(\alpha)$ en $f(A) \geq \alpha$.

Verwijzing: Bestudeer § 5.12.

Merk op dat de in § 5.12 geformuleerde stelling een direkt gevolg is van de scheidingsstelling in $\mathbb{R}^n$.

Verwijzing: Bestudeer § 5.13 uit de Syllabus.

5 Toepassingen op kegels

Verwijzing: Bestudeer § 4.13 uit de Syllabus, het stuk over kegels.

Hierbij kan het volgende opgemerkt worden. Bestudeer dit stuk voor $E = V$, een eindig dimensionale lineaire ruimte. In deze context zijn alle lineaire functionalen op V continu, dus $E' = V^*$. Merk op dat Stelling 4.12 uit de Syllabus in de eindig dimensionale context overeenkomt met Lemma 4.4 van deze handleiding.

Verwijzing: Bestudeer § 5.14 t/m 5.19 uit de Syllabus.

We lichten het in 5.19 gegeven bewijs van het lemma van Farkas hieronder nader toe.

Lemma 5.1 (Lemma van Farkas) *Zij $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineair, $b \in \mathbb{R}^k$. Dan is precies één van de volgende beweringen waar.*

(a) *Er bestaat een $x \in \mathbb{R}^k$ met $A^t x \leq 0$ en $(b \mid x) > 0$.*

(b) *Er bestaat een $y \in \mathbb{R}^n$ met $y \geq 0$ en $Ay = b$.*

Bewijs: We definiëren de kegel $K \subset \mathbb{R}^k$ door $K = -(A^t)^{-1}(P^n) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid A^t x \geq 0\}$. Dit is een veelvlakskegel. De polaire kegel K° is de eindig voortgebrachte kegel $L = A(P^n)$. Dit is het snelst in te zien door eerst op te merken dat $L^\circ = K$ (dit volgt door toepassing van de definitie). Nu is L convex en gesloten, dus

$$L = L^{\circ\circ} = K^\circ.$$

We merken nu op dat bewering (a) gelijkwaardig is met: er bestaat een $x \in K$ zo dat $(b \mid x) > 0$, ofwel met: $b \notin K^\circ$.

Verder merken we op dat bewering (b) gelijkwaardig is met $b \in A(P^n)$ dus met de uitspraak dat $b \in K^\circ$.

We concluderen dat precies één van de beweringen (a) en (b) waar is. □

6 Appendix: directe sommen

In deze paragraaf is V steeds een lineaire ruimte.

Definitie 6.1 Zijn L, M lineaire deelruimten van V dan zeggen we dat V de **direkte som** is van L en M, notatie

$$V = L \oplus M$$

als ieder element $x \in V$ op precies één manier te schrijven is als $x = x_L + x_M$, met $x_L \in L$ en $x_M \in M$.

Lemma 6.2 *Laten $L, M \subset V$ lineaire deelruimten zijn. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) $V = L \oplus M$;

(b) $V = L + M$ *en* $L \cap M = \{0\}$;

(c) *is* $e_1, \ldots, e_k$ *een basis van* L *en* $f_1, \ldots, f_l$ *een basis van* M, *dan is* $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$ *een basis van* V.

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Stel (a) en zij $x \in L \cap M$. Dan is $x = x_L + x_M$ zowel met $x_L = x, x_M = 0$ als met $x_L = 0, x_M = x$. Uit de uniciteit van x_L, x_M concluderen we dat $x = x_L = x_M = 0$. Dus $L \cap M \subset \{0\}$ en (b) volgt.

'(b) $\Rightarrow$ (c)': Laat $e_1, \ldots, e_k$ een basis van L zijn en $f_1, \ldots, f_l$ een basis van M. Is $x \in V$ dan is $x = x_L + x_M$ met $x_L \in L$ en $x_M \in M$. De vector x_L is een lineaire combinatie van $e_1, \ldots, e_k$ en x_M is een lineaire combinatie van $f_1, \ldots, f_l$; dus x is een lineaire combinatie van $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$. We concluderen dat V opgespannen wordt door $e_1, \ldots, e_k, f_1, \ldots, f_l$. Rest ons de lineaire onafhankelijkheid aan te tonen. Zij $0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^l \mu_j f_j$ met $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ dan is

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^l (-\mu_j) f_j \in L \cap M = \{0\},$$

dus $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$ dus $\lambda_i = 0$ voor alle i en evenzo $\mu_j = 0$ voor alle j. We concluderen dat (c).

'(c) $\Rightarrow$ (a)': Veronderstel dat $\{e_i\}$ een basis is van L en $\{f_j\}$ een basis van M. Is $x \in V$ dan is $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^l \mu_j f_j$ voor zekere $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$. Hieruit lezen we af dat $x = x_L + x_M$ met $x_L = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in L$ en $x_M = \sum_{j=1}^l \mu_j f_j \in M$. Veronderstel dat tevens geldt dat $x = x'_L + x'_M$ met $x'_L \in L$ en $x'_M \in M$. Schrijf $x'_L = \sum_{i=1}^k \lambda'_i e_i$ en $x'_M = \sum_{j=1}^l \mu'_j f_j$ met $e'_i, \mu'_j \in \mathbb{R}$, dan is $x = \sum_{i=1}^k \lambda'_i e_i + \sum_{j=1}^l \mu'_j f_j$ dus, vanwege de basiseigenschap, $\lambda'_i = \lambda_i$ en $\mu'_j = \mu_j$ voor alle i, j. Dus $x'_L = x_L$ en $x'_M = x_M$. We concluderen dat (a) geldt. $\square$

Zijn V en W lineaire ruimten, dan is $V \times W$ ook een lineaire ruimte, met de componentsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging. De afbeelding $v \mapsto (v, 0)$ is een lineair isomorfisme van V op de deelruimte $V \times \{0\}$ van $V \times W$. Via dit isomorfisme identificeren we V met de genoemde deelruimte. Evenzo identificeren we W met de deelruimte $\{0\} \times W$ van $V \times W$. Na deze afspraken geldt

Lemma 6.3 $V \times W = V \oplus W$.

Bewijs: Zij $x = (x_1, x_2) \in V \times W$, dan is $x = x_V + x_W$ met $x_V = (x_1, 0) \in V$ en $x_W = (0, x_2) \in W$. Dus $V \times W = V + W$. Verder geldt $V \cap W = V \times \{0\} \cap \{0\} \times W = \{(0,0)\}$. $\square$

Lemma 6.4 *Laten L, M lineaire deelruimten van V zijn, zo dat $V = L \oplus M$. Dan is V^* op natuurlijke wijze lineair isomorf met $L^* \oplus M^*$. Het isomorfisme wordt gegeven door*

$$f \mapsto (f|_L, f|_M), \ V^* \to L^* \oplus M^*.$$

Bewijs: Noem de bovenstaande afbeelding T; hij is lineair. Zij $f \in V^*$ zo dat $Tf = 0$. Dan is $f = 0$ op L en op M, dus op $L + M = V$ (f is lineair). Dus $f = 0$. We concluderen dat $\ker T = 0$, dus T is injectief. Rest ons de surjectiviteit van T aan te tonen. Zij $f_L \in L^*$ en $f_M \in M^*$. Definieer $f : V \to \mathbb{R}$ door $f(x) = f_L(x_L) + f_M(x_M)$. Dan is f lineair en $Tf = (f_L, f_M)$. Dus T is surjectief. $\square$

7 Appendix: Lineaire functionalen en inproducten

In de syllabus worden op diverse plaatsen lineaire functionalen gegeven door inproducten. In deze appendix geven we een systematische behandeling van dit idee. We veronderstellen dat V een eindig dimensionale lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ is.

Is $\xi \in V^*$ dan is het ook gebruikelijk om te schrijven

$$\langle x \mid \xi \rangle := \xi(x), \qquad (x \in V).$$

De afbeelding

$$V \times V^* \to \mathbb{R}, \ (x, \xi) \mapsto \langle x \mid \xi \rangle$$

noemen we ook wel: de natuurlijke paring van V en V^*.

Veronderstel nu dat V voorzien is van een inproduct $(\cdot \mid \cdot)$. Voor $y \in V$ definiëren we de lineaire functionaal $\eta = \iota(y) \in V^*$ door

$$\eta(x) = \langle x \mid \iota(y) \rangle := (x \mid y) \qquad (x \in V).$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\iota : V \to V^*$ een lineaire afbeelding is. Is $\iota(y) = 0$, dan is $y \in V^\perp = \{0\}$; dus ι is injectief. Uit dimensie overwegingen volgt nu dat ι ook surjectief is, dus een lineair isomorfisme van V op V^*. De ruimte V wordt soms met zijn duale geïdentificeerd via de afbeelding ι. Uiteraard is deze identificatie afhankelijk van het gegeven inproduct.

Zij nu K een kegel in V. Via de aangegeven identificatie kan men de polaire kegel ook opvatten als kegel in V :

$$K^\circ = \{\eta \in V^* \mid \langle K \mid \eta \rangle \leq 0\} = \{y \in V \mid (K \mid y) \leq 0\}.$$

Hierbij is de tweede gelijkheid slechts een gelijkheid door identificatie via ι.

Voorbeeld 7.1 In het bijzonder is het gebruik functionalen in $(\mathbb{R}^n)^*$ te identificeren met vectoren in $\mathbb{R}^n$ via het standaardinproduct. We onderzoeken hoe deze identificatie werkt. Zij $y \in \mathbb{R}^n$ (dit is dus een kolomvector). Dan wordt de lineaire functionaal $\iota(y) \in (\mathbb{R}^n)^*$ gegeven door

$$\iota(y) : x \mapsto (x \mid y) = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = (y_1, \ldots, y_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Dus $\iota(y)$ komt overeen met de rijvector $(y_1, \ldots, y_n)$. De afbeelding ι is in deze situatie dus niets anders dan het transponeren van een kolomvector tot een rijvector; een gebruikelijke notatie hiervoor is $\iota(y) = y^t$.