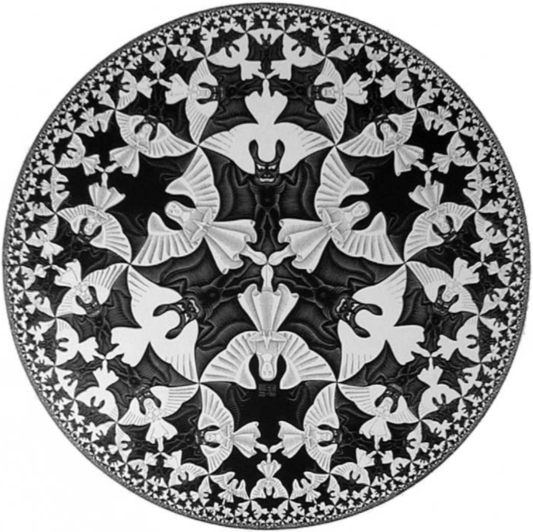
Hyperbolische meetkunde

Erik van den Ban

Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

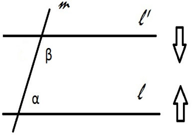
Kaleidoskoop 1, Utrecht, 6 /4-2010

Cirkellimiet IV, M.C Escher, 1960



Axioma's van Euclides (300 v.C.)

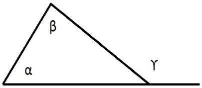
- A1 Door ieder tweetal verschillende punten gaat precies één lijn
- A2 Ieder eindig lijnstuk kan in iedere rechte lijn onbeperkt afgepast worden
- A3 Bij gegeven punt P en lijnstuk AB bestaat een cirkel met middelpunt P en straal $|AB|$
- A4 Alle rechte hoeken zijn gelijk
- A5 Parallellen Axioma Laat een lijn m twee gegeven lijnen l en l' snijden. Is de som der binnenhoeken aan één kant van m kleiner dan de som van twee rechte hoeken, dan snijden l en l' elkaar aan die zijde van m.



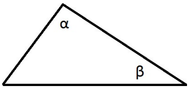
$$\alpha + \beta < \pi \Longrightarrow l \cap l' \neq \emptyset$$

Absolute meetkunde: zonder A5

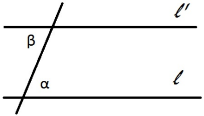
Bewijsbaar uit de axioma's A1 t/m A4



$\alpha < \gamma$ en $\beta < \gamma$



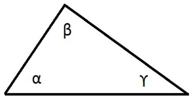
$\alpha + \beta < \pi$



$\alpha = \beta \implies l \,//\, l'$

Gevolgen van A1 - A5

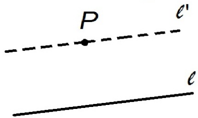
Stelling 1 (niet absoluut)



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Opm: als A1 t/m A4, dan: $\mathrm{A5} \iff \mathrm{Stelling 1}$

Stelling 2 Playfair, (niet absoluut)



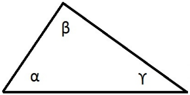
$$P \notin l \Longrightarrow \exists!\, l' : \; P \in l \;\wedge\; l \,//\, l'$$

Opm: als A1 t/m A4, dan: $\mathrm{A5} \iff \mathrm{Stelling 2}$

Gerolamo Sacheri (1667 - 1733)

Probeert te bewijzen dat A1-4 $\Longrightarrow$ St. 1 dus ook $\Longrightarrow$ A5

Stelling 3 (Sacheri, absoluut)



$$\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$$

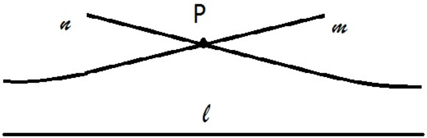
Stelling 4 (Sacheri, absoluut)

- Ofwel altijd $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
- Ofwel altijd $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

Axioma's

- A1 - A4;
- AH: Laat l een lijn zijn, en P een punt $\notin l$. Dan zijn er minstenst twee verschillende lijnen m en n met

$$m, n \ni P \text{ en } \mathrm{m} \cap \mathrm{l} = \emptyset, \ \mathrm{n} \cap \mathrm{l} = \emptyset.$$



De ontdekkers

Carl F. Gauss
(1777 – 1855)
publiceerde niet

Janos Bolyai
(1802 – 1860)
ondanks advies vader

Nikolai Lobachevsky
(1793 – 1856)

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

coordinaten
afstand
kromming R_s^{ijk}

differentiaal-
meetkunde

Stellingen in de hyperbolische meetkunde

Stelling H1

voor alle driehoeken: $\alpha + \beta + \gamma < \pi$

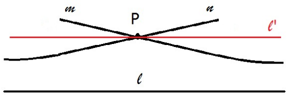
Stelling H2

als ABC en $A'B'C'$ driehoeken zijn met twee aan twee gelijke hoeken, dan $ABC \cong A'B'C'$

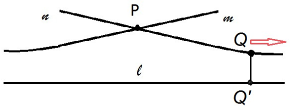
Stelling H3

Laat l een lijn zijn, P punt buiten l. Dan zijn er lijnen m, n die l niet snijden, zo dat voor iedere lijn $l' \ni P$ geldt:

$$l \cap l' = \emptyset \iff l' \text{ tussen } m \text{ en } n.$$



Stellingen in de hyperbolische meetkunde



Stelling H4

Als $Q \to \infty$ dan $|QQ'| \to 0$, dwz voor elk tweetal verschillende punten A, B geldt $|QQ'| < |AB|$ mits Q voldoende ver weg.

Modellen

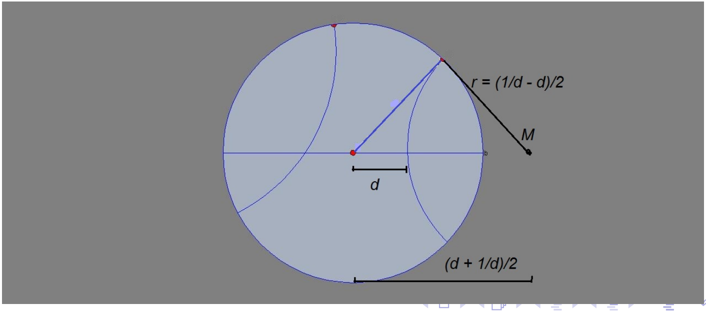
van de hyperbolische meetkunde: binnen de Euclidische

- 1868 Beltrami, pseudosfeer (lokaal)
- 1871 F. Klein en E. Beltrami (globaal)
- 1881 Poincaré, schijfmodel (globaal)

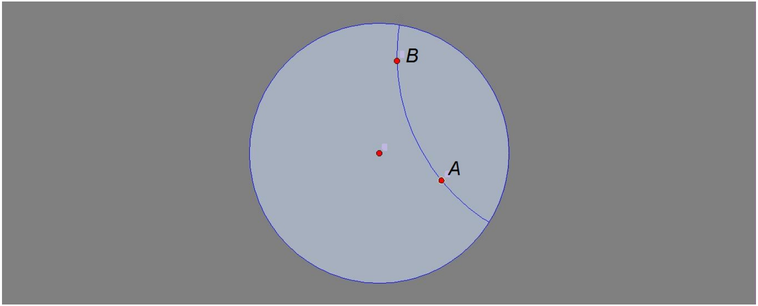
Poincaré schijf

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

- hyperbolische punten: punten van S
- hyperbolische lijnen: $C \cap S$ met C een cirkel (of rechte) die de rand van S loodrecht snijdt
- hyperbolische hoek $=$ euclidische hoek

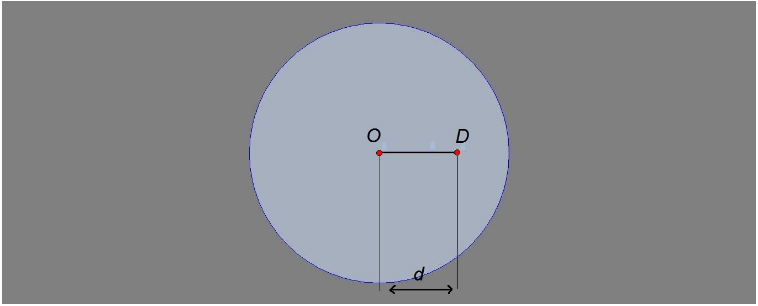


Hyperbolische lengte, 1



$$|AB|_H = \int_{t_A}^{t_B} \frac{|\sigma'(t)|_E}{1 - |\sigma(t)|_E^2}\, dt$$

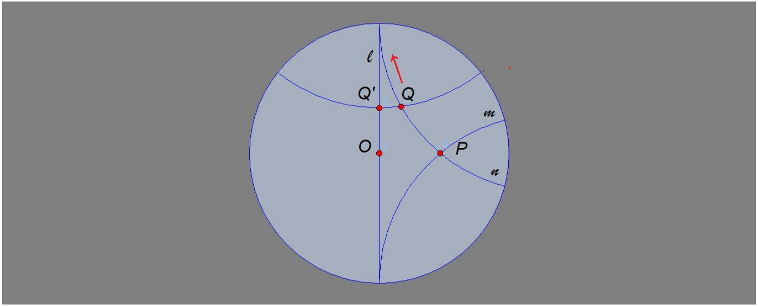
Hyperbolische lengte, 2



$$|OD|_H = \int_0^d \frac{1}{1-t^2}\,dt = \tanh^{-1}(d) \to \infty \quad \text{as} \quad d \uparrow 1$$

Voorbeeld in de Poincaré schijf

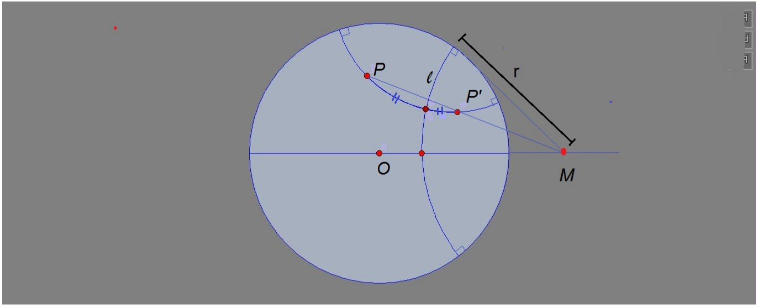
Stelling H3: parallellen



$$Q \to \infty \implies |QQ'|_H \to 0$$

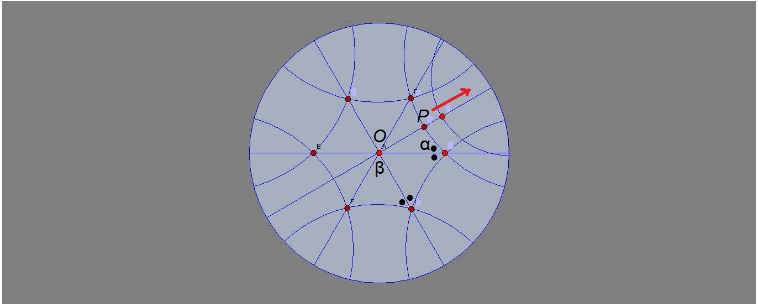
Hyperbolische reflectie

Gegeven een hyperbolische lijn *l* in *S*. De hyperbolische spiegeling in *l* wordt gegeven door cirkelinversie



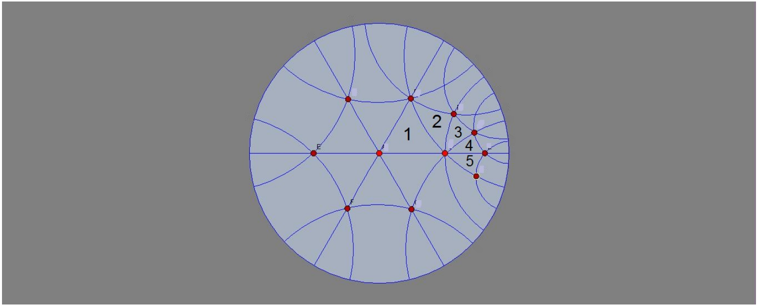
$$P \mapsto P', \qquad |MP|_E = \frac{r^2}{|MP'|_E}$$

Een speciale hyperbolische driehoek

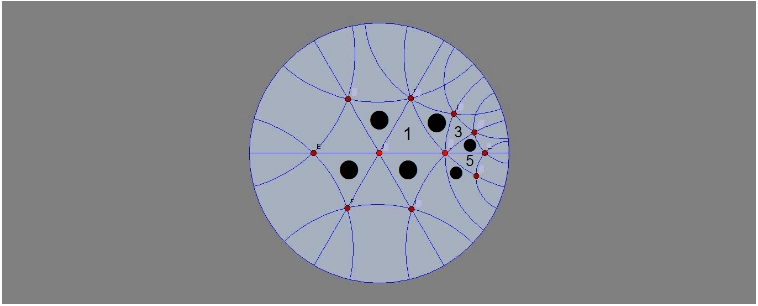


$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \frac{\pi}{3} \\ \text{som hoeken } \triangle = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Hyperbolische betegeling



Hyperbolische betegeling



...... Escher