Het argument van Sacheri

Stelling Veronderstel de axioma's A1-4. Dan geldt voor iedere driehoek dat de som van de hoeken ten hoogste gelijk is aan π.

Alvorens het bewijs van deze stelling te geven, voeren we eerst de volgende twee getallen in voor een driehoek ABC. Het getal $\text{somh}\,(ABC)$ is de som van de hoeken van de driehoek. Het getal $\text{minh}\,(ABC)$ is de minimale hoek van de driehoek.

Lemma Bij iedere driehoek ABC bestaat een driehoek $A'B'C'$ zo dat $\text{somh}\,(A'B'C') = \text{somh}\,(ABC)$ en $\text{minh}\,(A'B'C') \leq \frac{1}{2}\,\text{minh}\,(ABC)$.

Bewijs: (teken zelf een figuur). Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat α, de hoek bij hoekpunt A de minimale waarde $\text{minh}\,(ABC)$ heeft. Zij M het midden van de tegenoverliggende zijde BC. Het lijnstuk AM verdeelt de hoek α in twee delen, namelijk CAM ter grootte α_1 en MAB ter grootte α_2. Verleng het lijnstuk AM langs een lijn tot het punt B' met $|B'M| = |AM|$. Dan is $|AM| = |B'M|$, $|CM| = |BM|$ en hoek (A, M, B) is hoek (B', M, C), dus de driehoeken AMB en $B'MC$ zijn congruent. Hieruit volgt dat hoek $(M, B', C) = \alpha_2$. Aangezien hoek (M, C, B') gelijk is aan hoek (A, B, C), zien we nu gemakkelijk in dat $\text{somh}\,(AB'C) = \text{somh}\,(ABC)$. Voorts is $\text{minh}\,(AB'C) \leq \min(\alpha_1, \alpha_2) \leq \frac{1}{2}\,\alpha = \frac{1}{2}\,\text{minh}\,(ABC)$. Hiermee is het bewijs voltooid. $\square$

Bewijs van de stelling: Veronderderstel dat er een driehoek ABC bestaat met $\text{somh}\,(ABC) > \pi$. Dan is $\text{somh}\,(ABC) = \pi + \varepsilon$, met $\varepsilon > 0$. Er is een positief geheel getal k met $(1/2)^k\text{minh}\,(ABC) < \varepsilon$. Door k keer achtereenvolgens toepassen van het bovenstaande lemma zien we dat er een driehoek $A''B''C''$ bestaat met $\text{somh}\,(A''B''C'') = \pi + \varepsilon$ en $\text{minh}\,(A''B''C'') \leq (1/2)^k\text{minh}\,(ABC) < \varepsilon$. Laten $0 < \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$ de grootten van de hoeken van $A''B''C''$ zijn. Dan is $\varphi_1 < \varepsilon$ en $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi + \varepsilon$, dus $\varphi_2 + \varphi_3 > \pi$, in tegenspraak met het eerder bewezen resultaat dat de som van twee hoeken van een driehoek altijd ten hoogste π is.