Verbazend symmetrisch

Oratie gehouden door Erik Peter van den Ban

bij de aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar
vanwege het Utrechts Universiteitsfonds
op het vakgebied Lie theorie

Utrecht, 8 februari 2008

Mijnheer de Rector Magnificus,
Leden van het bestuur van het Utrechts Universiteitsfonds,
Waarde toehoorders,

Lie theorie

Het is voor mij een eer en een groot genoegen om u vandaag iets te mogen vertellen over mijn vakgebied, de Lie theorie.♣ [1]

Als u geen wis- of natuurkundige bent, is waarschijnlijk alleen al de naam van het gebied tamelijk onbekend voor u. Toch gaat het hier om een centraal gebied van de wiskunde, dat vele verbanden heeft met andere delen van de wiskunde en met de natuurkunde.

Het gebied is genoemd naar zijn grondlegger, de in Noorwegen geboren wiskundige Marius Sophus Lie, die leefde van 1842 tot 1899. Lie theorie is kort gezegd de theorie van symmetrieën met continue parameters.

Ik ga u proberen te vertellen wat dit betekent. Dat is lastig. Lastig, omdat ik vandaag geen beroep wil doen op het uitgekiende begrippenapparaat dat de wiskunde hiervoor ontwikkeld heeft. U zult dus weinig formules te zien krijgen. In plaats daarvan wil ik u aspecten van het vak laten zien aan de hand van voorbeelden. Veel zal daardoor onzichtbaar moeten blijven, maar toch hoop ik u aan het slot *iets* te kunnen zeggen over de aard van mijn eigen onderzoek.

Symmetrie

Het woord symmetrie roept bij u ongetwijfeld allerlei associaties op. Symmetrieën komen immers voor op vele plaatsen in de natuur en in onze cultuur.

De eenvoudigste vorm van symmetrie, de *spiegelsymmetrie,* komt al voor in ontwerpen uit de verre oudheid. Het voorbeeld ♣ dat ik u nu laat zien is een gravure op de zilveren vaas van de Sumerische koning Entemena, uit ca. 2700 v.C.♣ We noemen het motief spiegelsymmetrisch omdat het niet verandert onder spiegeling ten aanzien van de verticale lijn door het midden.

Ik hoef u niet uit te leggen wat spiegeling is, al was het alleen maar omdat u gewend bent regelmatig uw eigen spiegelbeeld te zien. Spiegeling kennen we tegenwoordig ook uit computerprogramma's om tekeningen en foto's te bewerken. Toepassen van spiegeling op een foto geeft het bekende omklap effect.

[1] met dit symbool wordt een nieuwe dia in de bijbehorende presentatie aangekondigd

Draaiingssymmetrie

Een andere veel voorkomende vorm van symmetrie is *draaiingssymmetrie.*♣ Ook deze vorm van symmetrie is u bekend. Een regelmatige zeshoek verandert niet als we hem rond zijn middelpunt draaien over een hoek van 60 graden.♣ ♣ ♣ Natuurlijk verandert hij ook niet als we hem herhaald over deze hoek draaien, wat neer komt op draaien over een veelvoud van 60 graden. In totaal zijn er zes hoeken waarover we de regelmatige zeshoek kunnen draaien, zonder hem te veranderen. We noemen dit zestallige draaiingssymmetrie. Deze vorm van symmetrie komt regelmatig voor in de natuur. Denkt u maar aan een sneeuwvlok,♣ of aan de zeshoekige cellen in een honingraat.

Transformatie

De zojuist genoemde vormen van symmetrie hebben iets gemeenschappelijks. In beide gevallen is er sprake van een figuur die niet verandert onder toepassing van een bepaalde procedure. In het eerste geval is die procedure een spiegeling, in het tweede geval een draaiing. Dit idee brengen we onder in het wiskundige begrip *transformatie.*♣ In de afbeelding die u ziet stelt de rode rechthoek aan de linkerkant een vlak voor, terwijl de rechthoek rechts een kopie van datzelfde vlak voorstelt.

Een transformatie van het vlak is een procedure waarbij aan ieder punt p van het vlak een nieuwe positie (of beeldpunt) p' in dat vlak wordt toegekend.♣ In de afbeelding hebben we p' weergegeven in het gekopieerde vlak, om verwarring te voorkomen. De toekenning van een beeldpunt wordt in de afbeelding gesymboliseerd door een zwarte pijl.

Van een transformatie eisen we dat twee verschillende punten nooit eenzelfde nieuwe positie krijgen, en dat alle punten van het vlak als nieuwe positie optreden. Hierdoor is iedere transformatie T omkeerbaar. Dat wil zeggen dat er een transformatie bestaat die het effect van T ongedaan maakt. Deze omkering noemen we de inverse van de transformatie en noteren we met T^{-1}.

Later zullen we het begrip transformatie algemener willen gebruiken, namelijk voor de ruimte in plaats van het vlak, of zelfs voor een nog algemenere collectie van wiskundige objecten. Voorlopig houden we het concreet bij het vlak.

Spiegeling en draaiing zijn voorbeelden van *afstandbehoudende* transformaties. Daarmee bedoelen we dat voor ieder tweetal punten de afstand niet verandert als we de transformatie toepassen.

Symmetriegroep

Met het begrip transformatie ♣ kunnen we definiëren wat we onder een *symmetrie* van een figuur in het vlak verstaan. Zo'n symmetrie is een afstandbehoudende transformatie van het vlak die de figuur onveranderd laat. De daarnet besproken draaiing over 60° is een symmetrie van de sneeuwvlok. Ook de lijnspiegeling ten aanzien van de horizontale lijn door het midden is een symmetrie.

Twee transformaties S en T kunnen samengesteld worden.♣ Het resultaat van T uitgevoerd na S is opnieuw een transformatie, die we noteren als het product TS. De volgende opmerking is nu voor de hand liggend, maar ook belangrijk. De samenstelling van twee symmetrieën is weer een symmetrie. Want, als twee transformaties een figuur onveranderd laten, dan doet hun samenstelling dat ook. Ook de inverse van een symmetrie is weer een symmetrie.

Uiteraard is ook de transformatie die niets verandert een symmetrie. Deze transformatie noemen we de identiteit, en we noteren hem met 1.

Met de ingevoerde notaties kunnen we een aantal voor de hand liggende rekenregels opschrijven. U ziet ze op de dia. Een collectie van dingen waarop een vermenigvuldiging bestaat met deze rekenregels wordt in de wiskunde *een groep* genoemd. In het bijzonder is de collectie van symmetrieën van een figuur dus een groep, die we de *symmetriegroep* van de figuur noemen.

Deze exercitie komt u misschien extreem abstract voor. Heeft dit wel nut? Jazeker! De symmetriegroep is een algebraïsche structuur waaraan gerekend kan worden. Hierdoor komen we meer te weten over de onderlinge samenhang van de symmetrieën van een figuur. Deze strategie is in de wiskunde op allerlei plekken uitermate succesvol gebleken bij het doorgronden van wetmatigheden en het oplossen van problemen.

Men kan met enige moeite inzien dat de symmetriegroepen van de Sumerische gravure en van de sneeuwvlok eindig zijn; de eerste bevat twee transformaties, de tweede bevat er twaalf.

Behangpatroongroepen

Een symmetriegroep kan ook oneindig groot zijn.♣ De afbeelding die u nu ziet is een ontwerp van de bekende grafische kunstenaar Maurits Escher, namelijk de houtsnede Ruiter, uit 1946. Denken we ons dit ontwerp in alle richtingen oneindig ver uitgestrekt, dan krijgen we een regelmatige vlakvulling die bestaat uit twee soorten figuren. De eerste soort wordt gevormd door de bruine naar rechts gerichte ruiters, de tweede soort door de gele naar links gerichte ruiters. Passen we op deze vlakvulling een geschikte verschuiving naar rechts toe, dan blijft de vlakvulling onveranderd. De verschuiving is dus een symmetrie van de vlakvulling. Hetzelfde geldt voor een geschikte verschuiving naar boven. De samenstelling van deze twee verschuivingen is een diagonaalsgewijze verschuiving.

Door de genoemde symmetrieën herhaald samen te stellen krijgen we oneindig veel verschillende verschuivingen. De symmetriegroep heeft dus oneindig veel elementen.

Als we niet letten op de verschillende kleuren van de ruiters, maar alleen op de contouren van het patroon, dan is er nog een ander type symmetrie aanwezig.♣ Wanneer we het patroon spiegelen in de getekende verticale lijn,♣ dan lijkt het ontstane spiegelbeeld sterk op het oorspronkelijke beeld, maar met verwisseling van kleuren. In het spiegelbeeld lopen de gele ruiters naar rechts, en de bruine ruiters naar links. Als we niet op de kleuren letten, dan kunnen we door toepassing van een verschuiving de patronen over elkaar laten vallen.♣ Dit is wat lastig in te zien, maar wordt duidelijk als we in het gespiegelde deel een bruin paard in gedachten nemen dat van rechts naar links over de lijn loopt. Zo'n paard krijgt een geel hoofd, maar zoals gezegd, daar zouden we niet op letten.

Het samengestelde resultaat van de uitgevoerde spiegeling en verschuiving wordt een schuifspiegeling genoemd, en is een symmetrie van het patroon.

De groep van alle symmetrieën van zo'n vlakvullend patroon noemen we een *behangpatroongroep.*

Hoeveel essentieel verschillende behangpatroongroepen zijn er eigenlijk, en hoe zien ze eruit? Dit soort vraag, de vraag om structuren vastgelegd door eigenschappen te *classificeren,* wordt in de wiskunde vaak gesteld. Het antwoord is verrassend. Er blijken maar eindig veel behangpatroongroepen te zijn, namelijk 17. Dit kan bewezen worden door toepassing van eenvoudige lineaire algebra en groepentheorie, onderwerpen die in de eerste jaren van een wiskundestudie aan de orde komen. Het is daarom zeer opmerkelijk dat al deze behangpatroongroepen voorkomen als symmetrieën van vlakvullingen uit de Egyptische oudheid.♣ Hier ziet u acht van deze vlakvullingen. Overigens komen alle 17 behangpatroongroepen ook voor in de prachtige mozaïeken in de Islamitische wereld.

Men kan de zojuist gegeven definities van transformatie en symmetrie zonder problemen uitbreiden naar de driedimensionale ruimte.♣ De symmetriegroepen van regelmatige ruimtevullingen, zoals die voorkomen in kristalstructuren, heten dan *kristallografische groepen*. Ook deze kunnen geclassificeerd worden: er blijken er precies 230 te zijn. Hierop berust weer de classificatie van de vele verschillende kristalstructuren die in de natuur voorkomen.

Lie-groepen

Na deze voorbereidingen zijn we klaar voor het eerste voorbeeld van een Lie-groep.♣ Neemt u een bol in de driedimensionale ruimte in gedachten. Iedere draaiing om een as door het middelpunt van de bol is een transformatie die de bol onveranderd laat. Het is dus een symmetrie van de bol.

Een draaiing wordt volledig bepaald door twee parameters. De eerste parameter is de as van draaiing; de tweede parameter is de hoek waarover gedraaid wordt. In de afbeelding is een vaste as van draaiing gekozen, die a genoemd wordt. Bovendien is een hoek gekozen waarover gedraaid wordt, namelijk α. De bijbehorende draaiing hebben we genoteerd met $D_{a,\alpha}$, waardoor de afhankelijkheid van de parameters tot uitdrukking komt.

Wat gebeurt er als we deze draaiing samenstellen met een tweede draaiing? Als de tweede draaiing dezelfde as heeft, dan is het antwoord gemakkelijk. De as blijft hetzelfde, en we hoeven slechts de draaiingshoeken op te tellen.

Maar, als de tweede draaiing een andere as heeft, dan is het onduidelijk hoe de samenstelling eruit ziet. Het is zelfs niet duidelijk of de samenstelling weer een draaiing om een as is. Toch is dit het geval. De achtiende eeuwse Zwitserse wiskundige Leonhard Euler was de eerste die dit bewees. Tegenwoordig heeft het resultaat een plaats gevonden in de lineaire algebra van het eerstejaars wiskundeprogramma.

Samenstelling van draaiingen levert dus altijd een draaiing op, zodat de draaiingen een groep vormen. Deze groep wordt in de wiskunde genoteerd met $\mathrm{SO}(3)$. De drie staat voor de ruimtelijke dimensie; voor hogere dimensies bestaan er soortgelijke Lie-groepen $\mathrm{SO}(4), \mathrm{SO}(5), \ldots$ enzovoort.

Zoals gezegd wordt een draaiing volledig bepaald door twee parameters, namelijk de as en de hoek van draaiing. We kunnen beide parameters op een continue manier, dus zonder sprongen, variëren.♣ ♣ Dit is de reden dat $\mathrm{SO}(3)$ een Lie-groep genoemd wordt. De extra structuur van continue (of beter, differentieerbare) parameters geeft de mogelijkheid om niet alleen algebra op een Lie-groep toe te passen, maar ook analyse, zoals differentiëren en integreren. Het is vooral hierdoor dat een Lie-groep zich onderscheidt van andere groepen.♣

De hoek van draaiing is één getal tussen 0 en 360 graden, en wordt daarom een 1-dimensionale parameter genoemd. De as van draaiing wordt volledig bepaald door een snijpunt met het boloppervlak. Dit snijpunt kan beschreven worden door twee getallen; denk daarbij aan lengte- en breedtegraad, net als op het aardoppervlak. De as wordt daarom een 2-dimensionale parameter genoemd. Tellen we de dimensies van de parameters bij elkaar op dan krijgen we de dimensie van de Lie-groep. Die is dus 3.

Iets heel anders nu. We vragen ons af of het product van twee draaiingen onafhankelijk is van de volgorde van de factoren. Voor getallen weten we dat die volgorde er niet toe doet. 2 keer 3 is gelijk aan 3 keer 2; dit staat bekend als de commutativiteit van de vermenigvuldiging. Laten we deze eigenschap voor draaiingen onderzoeken door gebruik te maken van een dobbelsteen.♣ Stelt u zich voor dat die voor u ligt met de 1 naar boven en de 2 naar u toe. Als u eerst de dobbelsteen een kwartslag naar achteren laat kantelen,♣ en daarna een kwartslag naar links,♣ dan komt de 6 naar u toe te liggen. Nu de omgekeerde volgorde.♣ Als u de steen eerst een kwartslag naar links laat kantelen,♣ en daarna een kwartslag naar achteren,♣ dan komt de 6 aan de rechterkant te liggen. Het maakt dus terdege uit in welke volgorde de draaiingen uitgevoerd worden! Deze niet-commutativiteit is de belangrijkste complicatie bij het beschrijven van Lie-groepen.

De groep van draaiingen is één van de eerste voorbeelden die ik op een inleidend college Lie-groepen behandel. Er zal straks meer gedraaid worden, maar eerst nemen we de tijd om stil te staan bij het jaar 1874, dat gezien kan worden als het geboortejaar van de Lie theorie.♣

Het ontstaan van de Lie theorie

In 1874 besloot Sophus Lie, toen 32 jaar oud, een algemene theorie van continue transformatiegroepen te ontwikkelen. Enige jaren daarvoor waren hij en Felix Klein via intensief contact overtuigd geraakt van het belang van transformatiegroepen voor de meetkunde.

In de eerste helft van de negentiende eeuw hadden Bolyai, Lobachevski en Gauss onafhankelijk van elkaar de niet-Euclidische meetkunde ontdekt. Wiskundigen waren er van overtuigd geraakt dat er vele soorten meetkunde mogelijk zijn, en dat niet op voorhand kan worden aangenomen dat de meetkunde van de wereld om ons heen Euclidisch is. In het begin van de twinstigste eeuw zou uit Einstein's speciale relativiteitstheorie zelfs blijken dat ruimte en tijd niet los van elkaar gezien kunnen worden en deel uit maken van één 4 dimensionale meetkunde.

In een bekend geworden voordracht in Erlangen had Klein in 1872 geopperd dat symmetriegroepen gebruikt dienen te worden als organiserend instrument om meetkundes te classificeren.

Lie had vooral een analytische motivatie voor zijn onderzoeksprogramma, namelijk mogelijke toepassing op de theorie van eerste orde partiële differentiaalvergelijkingen. Hij observeerde dat het van belang was de continue groep van contacttransformaties te bestuderen die zo'n vergelijking onveranderd laten. Inzicht in de structuur van zo'n groep zou kunnen leiden tot een systematische oplossingsmethode. Dit idee was geïspireerd door het werk van Galois aan het oplossen van algebraïsche vergelijkingen.

In een periode van ongeveer 10 jaar ontwikkelde Lie zijn theorie. Hij ontdekte daarbij de structuur die we tegenwoordig de *Lie-algebra* noemen. De Lie-algebra van een Lie-groep kan opgevat worden als de lineaire benadering van die groep in de buurt van het identiteitselement. Meestal verlies je met zo'n benadering veel informatie over datgene wat benaderd wordt. Volgens een van de centrale resultaten van Lie is dat hier niet het geval! De Lie-groep kan in de buurt van de identiteit volledig teruggevonden worden uit zijn Lie-algebra. Omdat die algebra door zijn lineaire structuur veel gemakkelijker te beschrijven is dan een Lie-groep is dit een enorm belangrijk resultaat. Zo is de mate van niet-commutativiteit van de Lie-groep gemakkelijk uit de algebra af te lezen. En als men bijvoorbeeld Lie-groepen wil classificeren komt men al een heel eind door eerst de algebra's te classificeren.

Enige jaren later, omstreeks 1885, bedacht de Duitse wiskundige Wilhelm Killing,♣ aanvankelijk niet op de hoogte van Lie's werk, onafhankelijk het concept Lie-algebra. Bovendien slaagde hij erin een zeer krachtige structuurtheorie te ontwikkelen, in termen waarvan hij de enkelvoudige Lie-algebra's kon classificeren; dit zijn Lie-algebra's met bepaalde ondeelbaarheidseigenschappen.

Weer enige jaren later slaagde de Franse wiskundige Élie Cartan erin het werk van Killing te verfijnen. Bovendien classificeerde hij voor iedere enkelvoudige Lie-algebra de *representaties*: dit zijn de verschillende manieren waarop de Lie-algebra zich kan manifesteren als algebra van lineaire transformaties. Juist deze representaties zijn later uitermate belangrijk gebleken in de toepassingen. We zullen dit verderop nog zien.

Het werk van Killing en Cartan betekende een enorme vooruitgang in de Lie theorie. Het speelt tot op de dag van vandaag een grote rol in het vak, en is een standaard onderwerp in een inleidend college.

De volgende belangrijke stap in de Lie theorie werd in 1925 gezet door de Duitse wiskundige Hermann Weyl. Hij legde een verband tussen Cartan's theorie van representaties met een schijnbaar heel ander vakgebied, namelijk de harmonische analyse. Dit verband speelt een belangrijke rol in mijn eigen onderzoek.$^\clubsuit$

Harmonische analyse

Harmonische analyse is ruwweg gezegd de analyse van trillingsverschijnselen. Laten we een tijdsafhankelijk signaal bekijken dat een trilling weergeeft, dat wil zeggen dat het zich steeds na een bepaalde tijdsperiode herhaalt.

De sinus functies $\sin t$, $\sin 2t$, $\sin 3t, \ldots$, enzovoort, zijn voorbeelden van dergelijke functies, met periode of trillingstijd gelijk aan 2π.$^\clubsuit$ In de afbeelding ziet u de grafieken van de eerste vier van deze functies op een rij gezet. U ziet dat het eerste signaal trilt met frequentie 1, het tweede twee keer zo snel, dus met frequentie 2, enzovoort.

Ieder van deze functies, maar ook hun verschuivingen en scalaire veelvouden zullen we elementaire trillingen noemen. Ruwweg gezegd is een elementaire trilling dus een trilling met dezelfde vorm als een sinus. We spreken af dat we ook de constante functie een elementaire trilling zullen noemen (met frequentie 0).

De Franse wiskundige Joseph Fourier had in 1822 ontdekt dat het mogelijk is een *periodiek signaal* te schrijven als *oneindige som* van elementaire trillingen waarbij elke frequentie precies één keer vertegenwoordigd is.

Laten we een voorbeeld bekijken.$^\clubsuit$ De periodieke functie links in de afbeelding kan ontbonden worden in elementaire trillingen. De eerste drie optredende elementaire trillingen worden in de middelste kolom getoond. In de rechterkolom zien we allereerst de bijdrage van de eerste elementaire trilling verschijnen.$^\clubsuit$ Op de tweede plaats zien we de opgetelde bijdrage van de eerste twee elementaire trillingen verschijnen.$^\clubsuit$ Tenslotte zien we op de derde plaats de opgetelde bijdrage van de eerste drie elementaire trillingen verschijnen.$^\clubsuit$ U ziet dat we al een behoorlijk goede benadering van het oorspronkelijke signaal verkregen hebben. Door deze sommatie voort te zetten met elementaire trillingen van steeds hogere frequentie krijgen we een steeds betere benadering van het oorspronkelijke signaal. De otbinding van het periodieke signaal in elementaire trillingen heet Fourier-ontbinding.

Deze wiskundige techniek werd door Fourier in zijn bekende werk 'Théorie Analytique de la Chaleur' toegepast om de differentiaalvergelijking op te lossen die de geleiding van warmte in een metaal beschrijft. Later heeft de Fourier-analyse belangrijke toepassingen gekregen in de beschrijving van trillingen en golfverschijnselen, waarbij we moeten denken aan signaalanalyse, geluidsleer, optica en quantummechanica. De theorie van Fourier ligt aan de basis van radio, TV en mobiele telefoon.

Zoals u weet is geluid een door ons oor waargenomen variatie of trilling van de luchtdruk. Als de elementaire trillingen in de Fourier-ontbinding van dit geluidssignaal in fase zijn, ervaren wij het geluid als een harmonische klank, waarvan de toonhoogte bepaald wordt door de frequentie van het signaal. De bijdragen van de verschillende elementaire trillingen zijn dan verantwoordelijk voor de klankkleur. Dit verklaart de naam harmonische analyse. Het is dus geen vorm van psycho-analyse, wat mij tijdens een conferentie wel eens door een toevallige passant gevraagd is.

Waarom kan ieder periodiek signaal nu juist ontbonden worden in elementaire trillingen? Met andere woorden, wat maakt die trillingen zo speciaal? Het antwoord op deze vraag is gelegen in symmetrie-eigenschappen.♣ We kunnen ieder periodiek signaal opvatten als een signaal op een cirkel, zoals in de afbeelding gesuggereerd wordt. Hierbij plakken we als het ware de kop van de periode vast aan de staart ervan. Door de draaiingen van de cirkel toe te passen kunnen we het signaal ten aanzien van de cirkel laten draaien.♣

Laten we bekijken wat er met de speciale functie $\sin 2t$ gebeurt.♣ Bij draaiing van deze functie over een hoek α ontstaat een functie die geschreven kan worden als som van de elementaire functies $A_\alpha \sin 2t$ en $B_\alpha \cos 2t$, met coëfficiënten A_α en B_α die van α afhangen.

Door de draaiingshoek α met constante snelheid te laten groeien krijgen we het effect dat in de animatie te zien is. Links zien we de draaiende sinus functie. Rechts zien we twee niet-draaiende elementaire trillingen met variërende amplitude. Hieraan zien we dat het draaien van de functie $\sin 2t$ zich afspeelt *in een ruimte van dimensie* 2.

Men kan laten zien dat iedere niet-constante periodieke functie met deze eigenschap een elementaire trilling moet zijn. In deze zin is een elementaire trilling een functie met een zo groot mogelijke symmetrie ten aanzien van de draaiingsgroep.

Ook op het boloppervlak bestaan dergelijke ruimten van zeer symmetrische functies, maar nu ten aanzien van de draaiingsgroep SO(3).♣ Deze elementaire trillingen of bolfuncties geven aanleiding tot ruimten $V_1, V_2, V_3, \dots$ enzovoort, die achtereenvolgens als dimensie $1, 3, 5, \dots$ enzovoort hebben. Ieder van deze ruimten is stabiel onder de werking van de draaiingsgroep SO(3).

Hermann Weyl liet zien dat de ruimten $V_1, V_2, V_3, \dots$, enzovoort, met daarop de werking van de draaiingsgroep SO(3), precies alle representaties of verschijningsvormen van de draaiingsgroep leveren, zoals die door Cartan geclassificeerd waren. Verder kan een Fourier-ontbinding in termen van deze elementaire bolfuncties beschreven worden. Iedere, zich redelijk gedragende functie op het boloppervlak kan ontbonden worden als een oneindige som van functies die respectievelijk uit de ruimten $V_1, V_2, V_3, \ldots$ enzovoort afkomstig zijn.

In een serie artikelen in 1925 liet Hermann Weyl zien dat de beschreven harmonische analyse heel algemeen geldt voor alle compacte enkelvoudige Lie-groepen. Dit zijn de enkelvoudige Lie-groepen die op een natuurlijke manier begrensd zijn. De draaiingsgroep SO(3) is er een voorbeeld van.

Weyl creëerde hiermee in één klap een theorie van harmonische analyse op compacte enkelvoudige groepen en gaf daarbij bovendien een totaal nieuwe kijk op de representatietheorie van Cartan.

Symmetrische ruimten

Weyl's werk inspireerde Cartan in 1925 tot de definitie van het begrip Riemannse symmetrische ruimte. Het boloppervlak is daarvan een voorbeeld.♣ Algemener is een Riemannse ruimte een ruimte die lokaal beschreven kan worden met behulp van coördinaten, en waarop een geschikt afstandsbegrip bestaat. Niet te ver uit elkaar gelegen punten A en B kunnen bovendien verbonden worden door lijnen met de kortst mogelijke lengte, die *geodeten* worden genoemd. Voor het boloppervlak wordt zo'n geodeet gevonden door een touw zo strak mogelijk van A naar B over het oppervlak te leggen, het komt dan langs een grote cirkel op het boloppervlak te liggen.

De symmetriegroep van een Riemannse ruimte bestaat uit alle afstandbehoudende transformaties van die ruimte. Men kan laten zien dat dit altijd een Lie-groep is. Een Riemannse ruimte heet *symmetrisch* als zijn symmetriegroep in een bepaalde zin zo groot mogelijk is. Het boloppervlak is een voorbeeld van een symmetrische ruimte, die bovendien begrensd is. Cartan liet zien dat alle begrensde symmetrische ruimten een compacte Liegroep als symmetriegroep hebben, en legde zo een verband met Weyl's werk. Bovendien volgde uit de Fourier-theorie van Weyl een Fourier-theorie voor de begrensde symmetrische ruimten. Voor het boloppervlak hebben we deze Fourier-theorie zojuist besproken.

Cartan gaf ook nog een classificatie van alle *niet-begrensde* Riemannse symmetrische ruimten in termen van zogenaamde niet-compacte enkelvoudige Lie-groepen. Zulke ruimten spelen een belangrijke rol in mijn onderzoek. Een van de eenvoudigste voorbeelden is de ruimte die ik u nu laat zien.♣ De afbeelding staat symbool voor de vele verbazende symmetrieën die de Lie theorie zo fascinerend maken.

De Poincaré-schijf

Ongetwijfeld herkent u de bekende houtsnede Cirkellimiet IV van Escher, uit 1960. Wat is de wiskunde achter dit ontwerp?

Het ontwerp is gebaseerd op een model van de hyperbolische meetkunde dat in 1882 ontdekt is door de grote Franse wiskundige Henri Poincaré.♣ Hierbij wordt het hyperbolische vlak voorgesteld door een cirkelschijf in het Euclidische vlak. De cirkelrand wordt niet tot het hyperbolische vlak gerekend.

Beschouw een cirkel ♣ in het Euclidische vlak die de cirkelrand van de Poincaré-schijf op twee plaatsen loodrecht snijdt. Het deel van zo'n cirkel dat in de schijf gelegen is noemen we een *hyperbolische lijn.* Ook een middellijn van de schijf vatten we op als hyperbolische lijn.

Men kan laten zien dat door ieder tweetal punten ♣ van de cirkelschijf precies één hyperbolische lijn gaat.♣ Het stuk van de hyperbolische lijn tussen die punten noemen we het *hyperbolische lijnstuk* dat die punten verbindt.♣

Er bestaat een afstandsbegrip op de Poincaré-schijf waarvoor de kortste verbinding tussen twee punten gegeven wordt door het hyperbolische lijnstuk tussen die punten. Natuurlijk is dit niet de gebruikelijke Euclidische afstand, want dan zou de kortste verbinding een gewoon lijnstuk zijn. Voorzien van het hyperbolische afstandsbegrip is de schijf een Riemannse symmetrische ruimte. De bijbehorende symmetriegroep is een driedimensionale Lie-groep.

Hyperbolische lijnen die elkaar snijden, maken een hyperbolische hoek met elkaar. Het fraaie van het Poincaré-model is dat deze hoek overeenkomt met de Euclidische hoek.

In de Euclidische meetkunde is de som van de hoeken van een driehoek altijd 180 graden. In de hyperbolische meetkunde is dit totaal anders.♣ Bij drie punten van de Poincaré-schijf hoort een driehoek van kortste verbindingslijnen. De som van de hoeken van die driehoek is altijd strikt kleiner dan 180 graden.

Ten aanzien van de hyperbolische lijnen kan men een hyperbolische spiegeling definiëren precies zoals in de Euclidische meetkunde, maar dan steeds in termen van hyperbolische lijnen en afstanden. Zo'n hyperbolische spiegeling is een afstandbehoudende transformatie van de Poincaré-schijf, en behoort dus tot de bijbehorende symmetriegroep.

Door gebruik te maken van hyperbolische spiegelingen kan men interessante opvullingen van de cirkelschijf maken.♣ Laten we starten met twee middellijnen van de schijf die elkaar in het middelpunt O snijden en daar een hoek van 60 graden met elkaar maken. Men kan laten zien dat er op deze lijnen punten A en B bestaan ♣ zo dat de hoeken van de hyperbolische driehoek OAB achtereenvolgens 60, 45 en 45 graden zijn. De som van de hoeken is 150 graden, dus inderdaad strikt kleiner dan 180 graden.

We kleuren de driehoek zwart.♣ Door hyperbolische spiegeling in een geschikte zijde toe te passen op deze driehoek ontstaat een nieuwe driehoek, die we wit kleuren.♣ Door de witte driehoek op soortgelijke manier te spiegelen in een zijde ontstaat weer een nieuwe driehoek die we zwart kleuren.♣ Door deze procedure te blijven herhalen ontstaan zes tegen elkaar gelegen driehoeken die het middelput van de schijf als gemeenschappelijk hoekpunt hebben.♣ Omdat de hoek van 60 graden 6 keer in 360 graden past vullen deze driehoeken een zeshoek rond O.

We kunnen ook een nieuwe driehoek krijgen door hyperbolisch te spiegelen in een overgebleven zijde van de oorspronkelijke driehoek. Dit levert een nieuwe driehoek die we wit kleuren.♣ Door dit proces te blijven herhalen ontstaan driehoeken die we afwisselend zwart en wit kleuren.♣ ♣ Omdat de hoek van 45 graden 8 keer in 360 graden past wordt de ruimte rond het centrale punt A opgevuld door 8 driehoeken die hyperbolisch gezien dezelfde maten hebben. Door blijven herhalen van de zojuist gevolgde procedure ontstaat een opvulling van de gehele cirkelschijf met oneindig veel hyperbolische driehoeken. Het is deze vlakvulling die Escher leerde kennen door zijn contact met de meetkundige Coxeter, en die hem op het spoor zette van zijn ontwerp.♣

Gezien door onze Euclidische bril worden de witte engelen in Escher's ontwerp steeds kleiner naarmate ze dichter bij de rand liggen. Ten aanzien van de hyperbolische afstand hebben alle engelen echter dezelfde afmetingen. Dit illustreert prachtig dat de Poincaré-schijf een onbegrensde symmetrische ruimte is.

Harmonische analyse op symmetrische ruimten

Zoals gezegd hebben onbegrensde symmetrische ruimten als symmetriegroep een niet-compacte Lie-groep. Hierdoor is de theorie van Hermann Weyl niet toepasbaar. Toch bestaat er ook voor deze ruimten een zeer fraaie harmonische analyse, die ontwikkeld is door de oorspronkelijk uit India afkomstige wiskundige Harish-Chandra.♣

Harish-Chandra begon zijn loopbaan als natuurkundige. Hij had al een artikel over relativistische quantummechanica op zijn naam staan toen hij in 1945 naar Cambridge vertrok om promotiewerk bij Paul Dirac te doen. Dirac suggereerde hem de oneindig dimensionale representaties van de Lorentz-groep te onderzoeken. Dit had een belangrijke natuurkundige motivatie.

De Lorentz-groep is een zesdimensionale niet-compacte enkelvoudige Lie-groep. Het is een belangrijk deel van de Poincaré-groep, de groep van symmetrieën van de speciale relativiteitstheorie, ook een Lie-groep. Kort daarvoor, in 1939, had de natuurkundige en latere Nobelprijswinnaar Eugene Wigner laten zien dat representaties van die Poincaré-groep corresponderen met quantummechanische eigenschappen van elementaire deeltjes.

Na zijn promotie ontwikkelde Harish-Chandra zich in de Verenigde Staten razendsnel van natuurkundige to wiskundige. Hij besloot de theorie van de representaties van niet-compacte enkelvoudige Lie-groepen te ontwikkelen vanuit het standpunt van de harmonische analyse op die groepen, in analogie met het werk van Weyl. De niet-compactheid van de groepen maakt de zaken wezenlijk gecompliceerder. Zo zijn de representaties die in de harmonische analyse optreden oneindig dimensionaal.

Het werk van Harish-Chandra culmineerde in het begin van de zeventiger jaren in de Plancherelformule, die de Fourier-ontbinding beschrijft voor niet-compacte halfenkelvoudige groepen; dit zijn in essentie producten van enkelvoudige groepen. De Fourier-ontbinding op onbegrensde Riemannse symmetrische ruimten, waarvan wij als voorbeeld de Poincaré-schijf hebben gezien, is een onmiddellijk gevolg van deze formule.

Dit en ander werk van Harish-Chandra heeft er sterk toe bijgedragen dat representatietheorie een centraal onderwerp in de wiskunde is geworden.

Voor toepassingen is het van belang naast de harmonische analyse op groepen ook de harmonische analyse op homogene ruimten te begrijpen. Mijn eigen onderzoek ligt op het gebied van een grote en interessante klassen van dit soort ruimten, de pseudo-Riemannse symmetrische ruimten. *Alle* eerder genoemde Riemannse symmetrische ruimten *en* de door Harish-Chandra bestudeerde half-enkelvoudige groepen behoren tot deze klasse. Speciale voorbeelden zijn verder de uit de algemene relativiteitstheorie bekende de Sitter en anti-de Sitter ruimten. De symmetriegroepen van de pseudo-Riemannse symmetrische ruimten zijn steeds niet-compacte halfenkelvoudige Lie-groepen.

Het onderzoek naar deze ruimten maakt dan ook sterk gebruik van ideeën en technieken die door Harish-Chandra ontwikkeld zijn. Daarnaast kent het een aantal nieuwe verschijnselen die een heel andere aanpak vereisen en het daardoor interessant en uitdagend maken.

Na mijn promotie in 1982 is het voor mij een grote stimulans geweest een jaar als Member op het Institute for Advanced Study in Princeton te werken, waar Harish-Chandra hoogleraar was. In een aantal gesprekken met hem heb ik veel van zijn ideeëngoed geleerd.

In datzelfde jaar verscheen de aankondiging van de Japanse wiskundigen Oshima en Matsuki van een classificatie van de discrete reeks van representaties voor pseudo-Riemannse symmetrische ruimten: dit zijn de representaties die discreet optreden in de Fourier-ontbinding. Dit was het begin van een algemene systematische theorie van Fourier-analyse op pseudo-Riemannse symmetrische ruimten.

Harish-Chandra was zeer geïnteresseerd, temeer daar het een generalisatie van zijn eigen classificatie van de discrete reeks voor groepen betrof. Het is tragisch dat hij in oktober 1983, vlak na mijn terugkeer naar Nederland, overleed aan de hartproblemen die hij al jaren ondervond; hij was pas 60 jaar oud.

Veel van mijn onderzoek gebeurt in intensieve samenwerking met Henrik Schlichtkrull uit Kopenhagen, die een goede vriend geworden is. De mogelijkheid voortdurend ideeën uit te kunnen wisselen is een enorme stimulans gebleken om vooruitgang te boeken. In ons onderzoek hebben wij bouwend op het genoemde werk van Oshima en Matsuki een beschrijving gevonden van de Fourier-ontbinding voor pseudo-Riemannse symmetrische ruimten. Tegelijkertijd slaagde ook Patrick Delorme uit Marseille hierin, onafhankelijk van ons, en met een heel andere methode.♣

Dames en heren, ik heb geprobeerd een lijn te schetsen van het ontstaan van de Lie theorie naar mijn eigen onderzoek. Daarmee heb ik vele interessante ontwikkelingen in het gebied onrecht gedaan. De Lie theorie is een wijd en kleurrijk gebied geworden dat veel te groot is om in zijn geheel door één persoon bestreken te kunnen worden.

Gelukkig worden diverse deelgebieden van het vak op een aantal plaatsen in Nederland op hoog niveau beoefend. De gemeenschappelijke seminaria en workshops die hieruit voortkomen vormen een belangrijke stimulans voor het onderzoek. Een deel van de Lie theorie heeft een natuurlijke plaats gekregen in het in 2006 gestartte landelijke onderzoekscluster Meetkunde en Quantumtheorie, dat wordt ondersteund door NWO, de Universiteit van Amsterdam, de Raboud Universiteit Nijmegen en de Universiteit Utrecht. Hiermee wordt de interactie met de meetkunde en de natuurkunde versterkt.♣

Het zal u hopelijk duidelijk geworden zijn dat de wiskunde enerzijds een lange geschiedenis heeft, maar anderzijds een levend vak is dat zich voortdurend blijft ontwikkelen; en dat allerlei ideeën, zowel van binnen als van buiten de wiskunde in dat proces samen komen. Keer op keer is gebleken dat ideeën uit de wiskunde, ook als ze niet bedacht werden met het oog op toepassingen, veel later op een onverwachte manier toepasbaar bleken. Dit proces is onvoorspelbaar, maar de uitkomsten ervan hebben een enorme invloed op ons wereldbeeld en onze samenleving.

Studenten zijn onmisbaar in dit proces. Via hen dringt wiskundige kennis door naar andere sectoren van de maatschappij. Zij leveren de nieuwe onderzoekers die de wiskunde verder kunnen ontwikkelen. Voor een kennismaatschappij als de onze is het dan ook van levensbelang dat voldoende studenten voor de wiskunde als studie kiezen. Desondanks hebben wij vele jaren te kampen gehad met zeer lage studentenaantallen.

De laatste jaren lijkt het tij te keren, en dit jaar hebben wij in Utrecht voor het eerst sinds vele jaren weer ruim 90 eerstejaarsstudenten die een bachelor Wiskunde volgen. Dit is uiteraard geen garantie voor de toekomst, maar de gevulde collegezalen geven wel een goed gevoel. Beste studenten, ik vertrouw erop dat jullie zullen ervaren dat je voor een mooi vak gekozen hebt, en ik wil daar graag aan bijdragen.

Dankwoord

Dames en heren, ik nader het einde van mijn rede. Mijn grote dank gaat allereerst uit naar het bestuur van het Utrechts Universiteitsfonds, dat deze bijzondere leerstoel heeft ingesteld, en naar het College van Bestuur van de Universiteit Utrecht dat de instelling heeft bekrachtigd.

Een aantal mensen heeft zich daaraan voorafgaand ingezet voor het tot stand komen van de leerstoel. Ook hen dank ik zeer; het betekent veel voor mij dit vertrouwen te krijgen. De hoogleraren Beukers, Moerdijk en Otten dank ik voor hun bereidheid als curatoren van de leerstoel op te treden.

Op mijn ontwikkeling als wiskundige heeft mijn promotor Hans Duistermaat een grote invloed gehad. Door zijn stimulerende colleges, en door de vele inspirerende suggesties en vragen tijdens mijn promotieonderzoek. Ik ben hem daar zeer dankbaar voor. Zijn enthousiasme en zijn vermogen onderwerpen vanuit een nieuw standpunt te bezien zijn steeds weer inspirerend.

Waarde Kolk, beste Joop,
Met jou is het steeds goed samenwerken. Aan het gezamenlijk organiseren

van een springschool en een conferentie heb ik recent enorm veel plezier beleefd. Bedankt daarvoor, en ook voor je steun op momenten die voor mij persoonlijk zwaar waren.

Beste collega's,
Op ons instituut heb ik me altijd thuis gevoeld. Er heerst een positieve instelling ten aanzien van onderzoek en onderwijs, ook als de randvoorwaarden onder druk staan. Dat is niet vanzelfsprekend, en ik ben jullie er dankbaar voor.

Beste studenten,
Onderwijs geeft me veel voldoening. Dat is vooral te danken aan jullie motivatie om nieuwe wiskunde te leren.

Beste promovendi,
Het is een voorrecht om met jullie te mogen werken. Hopelijk leren jullie van mij, het omgekeerde is zeker het geval! Ik verheug me erop volgende week weer met elkaar aan de slag te gaan.

Het is mooi dat mijn moeder hier vandaag aanwezig kan zijn. Nog voor ik naar het VWO ging vertelde zij me wat voor een prachtig vak de wiskunde zou zijn. Bedankt mam, dat is helemaal uitgekomen.

Mijn vader is er helaas niet meer. Gelukkig heeft hij vorig jaar nog mogen beleven dat mijn benoeming een feit werd.

Lieve Els en Mark,
Tot het laatst hebben jullie mij geholpen bij het voorbereiden van deze tekst en presentatie. Door jullie opbouwende kritiek, maar vooral door jullie morele steun en door jullie begrip voor mijn mentale afwezigheid. Bedankt daarvoor; ik beloof beterschap. Dat jullie er zijn is van onschatbare waarde!

Tenslotte wil ik graag u allen, collega's, studenten, familie, vrienden en bekenden, hartelijk danken voor uw komst naar deze aula.

Ik dank u voor uw aandacht.

Ik heb gezegd.

Referenties

Worden binnenkort toegevoegd.