Uitwerkingen van de opgaven uit 'Pi'

Frits Beukers

January 13, 2006

Opgave 2.3.1 Bedoeling van deze opgave is dat we alleen een schatting geven op grond van de gevonden tabel. Er worden geen bewijzen of precieze antwoorden verwacht.

Uit de tabel kunnen we narekenen dat het verschil $Q_{24}-\pi$ ongeveer 4 maal zo klein is als $Q_{12}-\pi$. En $Q_{48}-\pi$ is ongeveer 4 maal zo klein als $Q_{24}-\pi$, etc (doe dit!). Bij de vierde stap zijn we bij $Q_{48}-\pi \approx 0.0045$ aangekomen. Bij stap $4+k$ bedraagt het verschil dus ongeveer 0.0045×4^{-k}. We zien dat als we $k = 55$ of groter kiezen, het verschil onder de 10^{-35} komt. Een ruwe schatting levert dus dat Van Ceulen minstens $4 + 55 = 59$ stappen nodig had.

Opgave 2.3.2 De opstaande zijde van een rechthoekige driehoek met hoek π/N en schuine zijde $1/2$ is gelijk aan $\frac{1}{2}\sin(\pi/N)$. Het stukje zijde van de ingesloten N-hoek in de tekening bestaat uit twee van deze opstaande zijde-stukjes. Lengte is dus twee maal $\frac{1}{2}\sin(\pi/N)$ en dat is $\sin(\pi/N)$.

Op soortgelijke manier gaan we met de omgeschreven N-hoek om.

Opgave 2.3.3

a) Uit de tweede formule zien we dat $\cos 2x + 1 = 2(\cos x)^2$. Deel links door $\sin 2x$ en rechts door $2\sin x\cos x$ (hetgeen hetzelfde is op grond van de eerste formule). We krijgen hiermee het eerste resultaat. Het tweede resultaat krijgen we door op te merken dat $\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ en $\frac{1}{\tan 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$.

b) Invullen van $x = \pi/2N$ en delen door $2N$ geeft:

$$\frac{1}{2N\tan(\pi/N)} + \frac{1}{2N\sin(\pi/N)} = \frac{1}{2N\tan\pi/2N}.$$

Gebruikmaking van $P_N = N\sin(\pi/N)$, $Q_N = N\tan(\pi/N)$ en $Q_{2N} = 2N\tan(\pi/2N)$ geeft onmiddelijk

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q_N} + \frac{1}{P_N}\right) = \frac{1}{Q_{2N}}.$$

c) Vermenigvuldig $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ aan beide zijden met $\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$. We krijgen

$$\frac{\sin 2x}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = (\sin x)^2.$$

d) Voer gewoon de stappen uit en je vindt het resultaat.

Opgave 2.3.4 Ook dit is een experiment. Vul de tabel aan met de twee extra kolommen waarin R_N en $R_N - \pi$ staan. Doel van deze opgave is te illustreren hoe snel $R_N - \pi$ naar nul gaat in vergelijking met bijvoorbeeld $Q_N - \pi$.

Opgave 3.5.2 Net als in de tekst moet je om de bol een cilinder denken met straal r, zie bladzij 19. De afstand tussen het vlak rakend aan de noordpool en het vlak door de dertigste breedtegraad is $r/2$. De inhoud van de bol tussen deze twee vlakken is hetzelfde als de inhoud van de cilinder tussen deze vlakken minus de inhoud van de kegel tussen deze twee vlakken. De inhoud van het stuk cylinder is $\pi r^2 \cdot r/2 = \pi r^3/2$. De inhoud van het stuk kegel is de inhoud van de totale kegel min de inhoud van het stuk kegel dat onder de 30e breedtegraad valt. Grondvlak van deze laatste deelkegel heeft straal $r/2$. De inhoud hiervan is dus $(\pi/3)(r/2)^2 \cdot r/2$, en dat is $\pi r^3/24$. De totale kegel heeft inhoud $(\pi/3)r^2 \cdot r = \pi r^3/3$. Het stuk kegel tussen de twee vlakken wordt daarmee $\pi r^3/3 - \pi r^3/24 = 7\pi r^3/24$. De inhoud van het stuk bol wordt nu $\pi r^3/2 - 7\pi r^3/24 = 5\pi r^3/24$. Ik geef toe dat het een heel verhaal lijkt, maar hopelijk zie je de logica. (Met dank aan Jasper Compaijen en Sibren Tadema).

Opgave 4.4.1 Stel $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots\ldots}}$. Onder het eerste wortelteken staat weer een uitdrukking die precies op x lijkt. Daarom geldt ook dat $x = \sqrt{1+x}$. Kwadrateer aan beide zijden: $x^2 = x + 1$. Deze kun je oplossen. Je krijgt $x = (1 + \sqrt{5})/2$. Voor de aardigheid kun je dit op een rekenapparaat proberen. Begin met 1. Tel daar 1 bij op en neem de wortel. Tel daar weer 1 bij en neem weer de wortel, etc. Op den duur zie je op je display steeds ongeveer hetzelfde getal terugkeren. Dat is $(1+\sqrt{5})/2$, de zogenaamde gulden snede.

Opgave 4.4.2 De bedoeling van deze opgave was om, na berekening van de eerste tien kettingbreuken, ook de eerste tien stappen van Newton's reeks en die van Leibniz te nemen. En vervolgens te kijken hoe groot de verschillen met pi/4 zijn. Er is dus verder helemaal geen theorie nodig, alleen rekenwerk.

Opgave 5.4.1 Vervang in de meetkundige som x door $-x$. We krijgen

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^{n-1} = \frac{1 - (-x)^n}{1+x}.$$

Integreer aan beide zijden;

$$a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a^n}{n} = \ln(1+a) - \int_0^a \frac{(-x)^n}{1+x}\, dx.$$

De rest integraal kunnen we als volgt afschatten:

$$\left| \int_0^a \frac{(-x)^n}{1+x}\, dx \right| < \int_0^a x^n\, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Omdat $a^{n+1}/(n+1) \to 0$ als $n \to \infty$ gaat deze rest naar 0 als $n \to \infty$. Dus

$$\ln(1+a) = a - a^2/2 + a^3/3 - a^4/4 + ...$$

Opgave 5.4.2

a) Vul in de reeks van opgave 5.4.1 $a = 1$ in. We krijgen:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ....$$

Zie je het patroon, hij lijkt op de reeks van Leibniz voor $\pi/4$.

b) Vul $a = -1/2$ in. Je krijgt:

$$\ln(1/2) = -(1/2) - (1/2)^2/2 - (1/2)^3/3 - (1/2)^4/4 - ...$$

ofwel, na minteken nemen,

$$\ln 2 = (1/2) + (1/2)^2/2 + (1/2)^3/3 + (1/2)^4/4 + ...$$

Weer een reeks voor $\ln 2$, maar nu eentje die veel sneller convergeert. Dat kun je zien als van beide reeksen de eerste tien termen optelt en het antwoord met $\ln(2)$ vergelijkt. En dat was onderdeel c).

Opgave 6.3.1 Om $\arctan(1/5)$ tot 100 decimalen precies te berekenen gebruikte Machin de arctangens reeks (zie Stelling 5.2.1 van het boek). Er staan alleen termen met oneven machten van a. Als we n van deze termen hebben opgeteld, krijgen we een som die niet meer dan $(1/5)^{2n+1}/(2n+1)$ afwijkt van $\arctan(1/5)$. Dit zien we uit de restafschatting op het midden van pagina 33 met $a = 1/5$. Controle leert dat deze rest kleiner dan 10^{-100} is als we $n \geq 70$ kiezen.

Opgave 6.3.2 Volgens de hint rekenen we eerst $\tan(4 \arctan(1/5))$ uit. Dat gaat zo:

$$\tan(4 \arctan(1/5)) = \frac{2 \tan(2 \arctan(1/5))}{1 - \tan(2 \arctan(1/5))^2}.$$

Nu bepalen we $\tan(2 \arctan(1/5)$. Dat is

$$\tan(2 \arctan(1/5)) = \frac{2 \tan(\arctan(1/5))}{1 - \tan(\arctan(1/5))^2}.$$

Maar $\tan(\arctan(1/5)) = 1/5$ (per definitie). Dus we krijgen nu:

$$\tan(2 \arctan(1/5)) = \frac{2 \cdot (1/5)}{1 - (1/5)^2} = 5/12$$

en

$$\tan(4 \arctan(1/5)) = \frac{2 \cdot (5/12)}{1 - (5/12)^2} = 120/119.$$

We controleren nu de gelijkheid $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ door de tangens op de rechterzijde los te laten en te controleren of er $1(= \tan(\pi/4))$ uitkomt.

$$\tan(4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)) = (a+b)/(1-ab)$$

waarin $a = \tan(4\arctan(1/5)) = 120/119$ en $b = \tan(-\arctan(1/239)) = -1/239$. Invullen van a, b geeft $(120/119 - 1/239)/(1 + (120/119)(1/239))$ hetgeen na uitwerking precies 1 geeft. Het klopt!. Ik geef toe dat het geen makkelijk rekenwerk is, maar als je de optelformules voor de tangens hebt, is het wel recht toe recht aan.

Opgave 6.3.3

a) We laten de tangens los op de rechterzijde van (R) en controleren of er $1/n(= \tan(\arctan(1/n)))$ uitkomt.

$$\tan(\arctan\frac{1}{n+a} + \arctan\frac{1}{n+b}) = \frac{A+B}{1-AB}$$

waarin $A = \tan(\arctan\frac{1}{n+a}) = \frac{1}{n+a}$ en $B = \tan(\arctan\frac{1}{n+b}) = \frac{1}{n+b}$. Invullen geeft nu

$$\frac{1/(n+a) + 1/(n+b)}{1 - (1/(n+a))(1/(n+b))} = \frac{2n+a+b}{n^2 + (a+b)n + ab - 1}$$

waarin we in de tweede stap teller en noemer met $(n+a)(n+b)$ vermenigvuldigden om de breuken boven en onder weg te werken. Gebruik makend van $ab - 1 = n^2$ volgt hieruit $\frac{2n+a+b}{2n^2+n(a+b)}$ hetgeen precies $1/n$ is!

b) Neem $n = 2$ dan geldt $n^2 + 1 = 5 = 1 \cdot 5$. We nemen $n = 2, a = 1, b = 5$ in formule (R) om ons resultaat te bereiken. Onderdeel c) volgt direct door de uitdrukking voor $\arctan(1/2)$ uit b) te gebruiken.

Opgave 8.3.1

a) Er geldt:

$$\begin{aligned}
1/37 &= 0,027027027027\cdots \\
&= 0,\overline{027} \\
11/37 &= 0,297297297297\cdots \\
&= 0,\overline{297} \\
1/47 &= 0,\overline{0212765957446808510638 29} \\
&\overline{7872340425531914893617}
\end{aligned}$$

b) Ga van het volgende decimale ontwikkeling na dat ze nooit periodiek kan zijn;

$$0,1010010001000010000010000000\cdots$$

Patroon: een één, dan 1 nul, een één, dan 2 nullen, een één, dan drie nullen, etc.

Opgave 8.3.2 Dit is veel makkelijke dan het lijkt. De getallen $\sqrt{2}$ en $2-\sqrt{2}$ zijn irrationaal. Hun som is 2, en dat is rationaal.

Opgave 8.3.3 Stel dat $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ rationaal is, zeg p/q met p, q geheel. Kwadrateer $\sqrt{2}+\sqrt{3}=p/q$ en we krijgen $2+2\sqrt{6}+3=p^2/q^2$. Hieruit leiden we af dat $\sqrt{6}=\frac{1}{2}(p^2/q^2-5)$. Hiermee zou $\sqrt{6}$ een breuk worden, m.a.w. rationaal zijn. Dit kan echter niet en dus is de aanname dat $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ rationaal is, fout.