Tentamen Voorstellingen van eindige Groepen

5 juni 2005, 9.00-12.00 uur

• Zet op elk blad dat je inlevert je naam. • Zet op het eerste blad ook je studentnummer en je e-mailadres (voor de uitslag). • Tijdens dit tentamen mag het boek “Representations and characters of groups” van James en Liebeck worden geraadpleegd. • Geef niet alleen antwoorden. Laat ook duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt. • Indien je een onderdeel van een opgave niet of slechts ten dele kunt maken, ga dan toch door met het maken van de volgende onderdelen. Daarbij mag je het in de opgave geformuleerde resultaat van een onderdeel bij de *volgende* onderdelen van dezelfde opgave als gegeven gebruiken. SUCCES!

Opgave 1

In deze opgave is G een groep van orde 56. Verder is gegeven dat de commutator ondergroep (= derived subgroup) G' van G orde 8 heeft.

a. Laat zien dat G/G' een cyclische groep is van orde 7.

b. Geef expliciet alle karakters van G/G'.

c. Bewijs dat G acht irreducibele voorstellingen heeft.

d. Geef alle conjugatieklassen van G.

e. Geef de volledige karaktertabel van G.

f. Laat zien dat voor elk irreducibel karakter χ van G geldt:

$$\langle \chi \downarrow G' \,,\, \chi \downarrow G' \rangle_{G'} \;=\; \text{graad}\,\chi.$$

Hier is $\chi \downarrow G'$ de restrictie van χ tot de ondergroep G'.

g. Voor een karakter ψ van G' is $\psi \uparrow G$ het geïnduceerde karakter van G. Bereken

$$\langle (\chi_i \downarrow G') \uparrow G \,,\, \chi_j \rangle_G$$

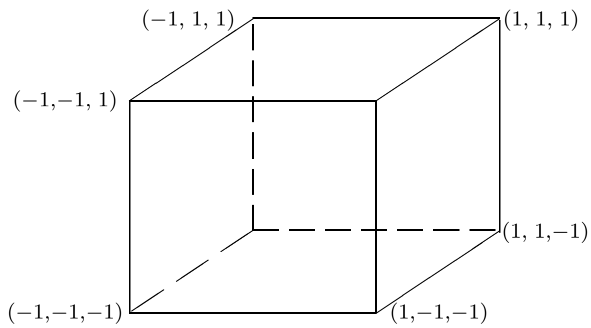
voor ieder tweetal irreducibele karakters χ_i, χ_j van G.

h. Ontbind voor elk irreducibel karakter χ van G het karakter $(\chi \downarrow G') \uparrow G$ in irreducibele karakters (van G).

Z.O.Z.

Opgave 2

Neem in $\mathbb{R}^3$ de kubus $\mathbb{K}$ met hoekpunten $\{(\pm 1,\, \pm 1,\, \pm 1)\}$. Zij K de groep van alle draaiingen van $\mathbb{R}^3$ die $\mathbb{K}$ op $\mathbb{K}$ afbeelden. Deze groep heeft 24 elementen.



a. Laat zien dat K vijf conjugatieklassen heeft. Geef voor elke conjugatieklasse aan hoeveel elementen erin zitten. Geef in elke conjugatieklasse één element.

b. De bovenstaande definitie van K geeft automatisch een 3 -dimensionale voorstelling van K . Zij χ_3 het karakter van deze voorstelling.
Bereken $\chi_3(g)$ voor elke $g \in K$.

c. Laat zien dat χ_3 irreducibel is.

d. De kubus $\mathbb{K}$ heeft drie symmetrie-assen van orde 4. Deze gaan door de middens van twee overstaande zijvlakken. K permuteert deze drie assen.
Bepaal het karakter ξ van de bijbehorende 3-dimensionale permutatievoorstelling van K.

e. Bereken de inprodukten $\langle \xi, \xi \rangle$ en $\langle \xi, \chi_0 \rangle$, waarbij χ_0 het triviale karakter van K is.

f. Ontbind ξ in irreducibele karakters.

g. De kubus $\mathbb{K}$ heeft zes symmetrie-assen van orde 2. Deze gaan door de middens van twee overstaande ribben. K permuteert deze zes assen.
Bepaal het karakter ψ van de bijbehorende 6-dimensionale permutatievoorstelling van K.

h. Bereken de inprodukten $\langle \psi, \psi \rangle$ en $\langle \psi, \xi \rangle$.

i. Bewijs dat $\psi - \xi$ een irreducibel karakter van K is.

j. Geef de volledige karaktertabel van K.

EINDE