Dedekindsommen

Voor twee gehele getallen d en c, met $c > 0$, kan men de *Dedekindsom* $S(d, c)$ definiëren door

$$
\begin{aligned}
S(d,c) \quad &:= \quad \sum_{x=1}^{c-1} \left(\left(\frac{x}{c}\right)\right) \left(\left(\frac{xd}{c}\right)\right) \\
&= \quad \left(\left(\frac{1}{c}\right)\right) \left(\left(\frac{d}{c}\right)\right) + \left(\left(\frac{2}{c}\right)\right) \left(\left(\frac{2d}{c}\right)\right) + \cdots \\
&\qquad\qquad + \left(\left(\frac{c-1}{c}\right)\right) \left(\left(\frac{(c-1)d}{c}\right)\right), \\
\left(\left(\xi\right)\right) \quad &:= \quad \begin{cases} 0 & \text{als } \xi \text{ een geheel getal is,} \\ x - \lceil \xi \rceil - \frac{1}{2} & \text{anders.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Men kan allerlei verrassende eigenschappen van deze grootheden bewijzen, onder andere dat $S(td, tc) = S(d, c)$ als t een positief geheel getal is.

Als je voor veel waarden van d en c de Dedekindsom uitrekent, en dan $\frac{S(d,c)}{c}$ tegen $\frac{d}{c}$ uitzet, krijg je het plaatje. Kennis van de theorie van automorfe vormen maakt het mogelijk wat van de structuur van dit plaatje te begrijpen.

(In het plaatje doorloopt $\frac{d}{c}$ alle breuken in $[0, 1)$ met noemer c hoogstens 1500. De horizontale as geeft $0 \leq \frac{d}{c} < 1$ en de verticale as $-1 \leq \frac{S(d,c)}{c} \leq 1$.)