EERSTE DEELTENTAMEN WIS 212

Analyse in Meer Variabelen

28 februari 2003 14–17 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, en op het eerste blad de naam van uw practicumleider (Pieter Eendebak of Phillip Getto) alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *Zet* **NIET** *meer vraagstukken tegelijk op één blad, want de vraagstukken worden afzonderlijk nagekeken door verschillende correctoren.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

Exercise 0.1. [*20 pt.*] Definieer $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ door $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ en zij $K = g^{-1}(\{0\}) \setminus \{0\}$.

1. Beschrijf K lokaal als een grafiek en bewijs dat K een C^∞ deelvariëteit van $\mathbf{R}^3$ is. Bepaal de dimensie van K.
2. Geef een parametrisering van K verschillend van die in onderdeel (i), bij voorbeeld, door het snijden van K met sferen met middelpunt in 0.

Exercise 0.2. [*30 pt.*] Zij $c > 0$ vast gekozen. Definieer de *logarithmische spiraal* $S \subset \mathbf{R}^2$ als beeld onder de C^∞ afbeelding

$$\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \qquad \text{met} \qquad \phi(\alpha) = e^{c\,\alpha} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

1. Toon aan dat $\|D\phi(\alpha)\| = e^{c\,\alpha}\sqrt{c^2+1}$, voor alle $\alpha \in \mathbf{R}$, en leid hieruit af dat ϕ overal een immersie is.
2. Bewijs dat de afbeelding ϕ injectief is en verder, dat $\phi(\alpha) \mapsto \alpha$ continu is als afbeelding $\mathrm{im}(\phi) \to \mathbf{R}$.
3. Geef een kort bewijs, gebaseerd op de onderdelen (i) en (ii), dat S een C^∞ deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is.
4. Gebruik onderdeel (i) om aan te tonen dat de hoek γ tussen de raaklijn aan S in $\phi(\alpha)$ enerzijds en de vector $\phi(\alpha)$ anderzijds, onafhankelijk is van α; en geef γ als functie van de constante c.

ZIE OMMEZIJDE **ZIE OMMEZIJDE** **ZIE OMMEZIJDE**

Exercise 0.3. [*20 pt.*] Zij $a \in \mathbf{R}^n$ willekeurig maar vast gekozen en defineer $f_a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ door $f_a(x) = \langle a, x \rangle$.

1. Zij $r \geq 0$. Bewijs met behulp van multiplicatoren van Lagrange dat $\pm\|a\|\, r$ de extremale waarden zijn van de restrictie van f_a tot de sfeer $\{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = r \,\}$.

2. Toon m.b.v. onderdeel (i) aan dat voor alle a en $x \in \mathbf{R}^n$ de ongelijkheid $|\langle a, x\rangle| \leq \|a\|\, \|x\|$ van Cauchy–Schwarz geldt.

Exercise 0.4. [*30 pt.*] Veronderstel dat $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ een C^1 functie is met $f(2, -1) = 1$, en definieer

$$F : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \qquad \text{door} \qquad F(x; y) = \begin{pmatrix} f(x_1, y) - x_2 \\ x_2(x_1 - 1) + y^3 \end{pmatrix}.$$

1. Ga na dat $F(2, 1; -1) = 0$. Geef een conditie op Df die het bestaan garandeert van een omgeving V van -1 in $\mathbf{R}$ en van een afbeelding $\psi : V \to \mathbf{R}^2$ zó, dat $F\big(\psi(y); y\big) = 0$, voor alle $y \in V$.

2. Neem aan dat de conditie uit onderdeel (i) van toepassing is en dat $Df(2, -1) = (1, -3)$. Bereken nu $\psi_i'(-1)$, voor $1 \leq i \leq 2$.