Tweede DEELTENTAMEN WIS 212

Analyse in Meer Variabelen

29 april 2003 9–12 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, en op het eerste blad de naam van uw practicumleider (Pieter Eendebak of Phillip Getto) alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *Zet* **NIET** *meer vraagstukken tegelijk op één blad, want de vraagstukken worden afzonderlijk nagekeken door verschillende correctoren.*
- *De verschillende onderdelen van de vraagstukken zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi en/of rekenmachine* **NIET** *worden gebruikt.*

Exercise 0.1. Zoals bekend geldt $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,dx = \Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \pi^{\frac{1}{2}}$.

(i) Bewijs met behulp hiervan en van bolcoördinaten in $\mathbf{R}^n$ de gelijkheid

$$\text{hyperarea}_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

(ii) Gebruik onderdeel (i) om aan te tonen

$$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{hyperarea}_n(S^n) \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Hint: Substitueer eerst bolcoördinaten en vervolgens $r = \tan\beta$, en gebruik tenslotte de bekende identiteit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}\beta\,\sin^{q-1}\beta\,d\beta = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{p}{2})\,\Gamma(\frac{q}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2})} \qquad (p,\ q \in \mathbf{N}).$$

Exercise 0.2. Zij $U = \{\, x \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_3^2 + x_4^2 < 1 \,\}$. Bewijs

$$\int_U x_1^2\,x_4^2\,dx = \frac{\pi^2}{16}.$$

Hint: Zij $V = \mathbf{R}_+^2 \times\,]-\pi, \pi\,[^{\,2} \subset \mathbf{R}^4$ en beschouw de substitutie van variabelen $\Psi : V \to \mathbf{R}^4$ gegeven door

$$\Psi(r, s, \alpha, \beta) = (r\cos\alpha,\ r\sin\alpha,\ s\cos\beta,\ s\sin\beta).$$

ZIE OMMEZIJDE **ZIE OMMEZIJDE** **ZIE OMMEZIJDE**

Exercise 0.3. Beschouw

$$\phi : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}^2 \qquad \text{gegeven door} \qquad \phi(s) = \begin{pmatrix} \sin s \\ \cos s + \log \tan \frac{1}{2}s \end{pmatrix}.$$

(i) Bewijs dat $\phi'(s) = \cos s \begin{pmatrix} 1 \\ \cot s \end{pmatrix}$ en dat ϕ een C^1 inbedding is. Concludeer dat $T := \mathrm{im}(\phi)$ een C^1 deelvariëteit in $\mathbf{R}^2$ van dimensie 1 is en dat T onbegrensd is.

Beschouw T als deelverzameling van het (x_1, x_3)-vlak in $\mathbf{R}^3$ en zij $V \subset \mathbf{R}^3$ het omwentelingsoppervlak dat ontstaat door wenteling van T in $\mathbf{R}^3$ om de x_3-as.

(ii) Bewijs met hulp van onderdeel (i) dat de oppervlakte van de onbegrensde verzameling V gelijk is aan 2π.

Exercise 0.4. We herinneren aan de eerste identiteit van Green, voor passende Ω en f en g,

$$(\star) \qquad \int_\Omega (g\,\Delta f)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \Big(g\,\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)(y)\,d_{n-1}y - \int_\Omega \langle\, \mathrm{grad}\, f,\ \mathrm{grad}\, g\,\rangle(x)\,dx.$$

Onderstel dat $\Delta f = 0$ op Ω.

(i) Bewijs middels $(\star)$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}(y)\,d_{n-1}y = 0.$$

Zij nu in het bijzonder $\Omega = B^n(r)$, de open bol in $\mathbf{R}^n$ met middelpunt 0 en straal $r > 0$, en definieer $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ door $g(x) = \|x\|^2$.

(ii) Toon aan dat $\frac{\partial g}{\partial \nu}(y) = 2r$, voor alle $y \in S^{n-1}(r) = \partial B^n(r)$. Leid nu uit de tweede identiteit van Green af

$$n \int_{B^n(r)} f(x)\,dx = r \int_{S^{n-1}(r)} f(y)\,d_{n-1}y.$$

Concludeer $n\ \mathrm{vol}_n(B^n) = \mathrm{hyperarea}_{n-1}(S^{n-1})$.