

EERSTE DEELTENTAMEN WISB 212

Analyse in Meer Variabelen

20-04-2005 9-12 uur

- *Zet uw naam en collegekaartnummer op elk blad, en op het eerste blad de naam van uw practicumleider (Alex Boer of Richard Cushman) alsmede het totaal aantal ingeleverde bladzijden.*
- *De verschillende onderdelen van het vraagstuk zijn zoveel als mogelijk is, onafhankelijk van elkaar. Indien u een bepaald onderdeel niet of slechts ten dele kunt maken, mag u de resultaten daaruit gebruiken bij het maken van de volgende onderdelen. Raak dus niet ontmoedigd indien het u niet lukt een bepaald onderdeel te maken en ga gewoon door.*
- *Bij dit tentamen mogen syllabi, aantekeningen en/of rekenmachine **NIET** worden gebruikt.*

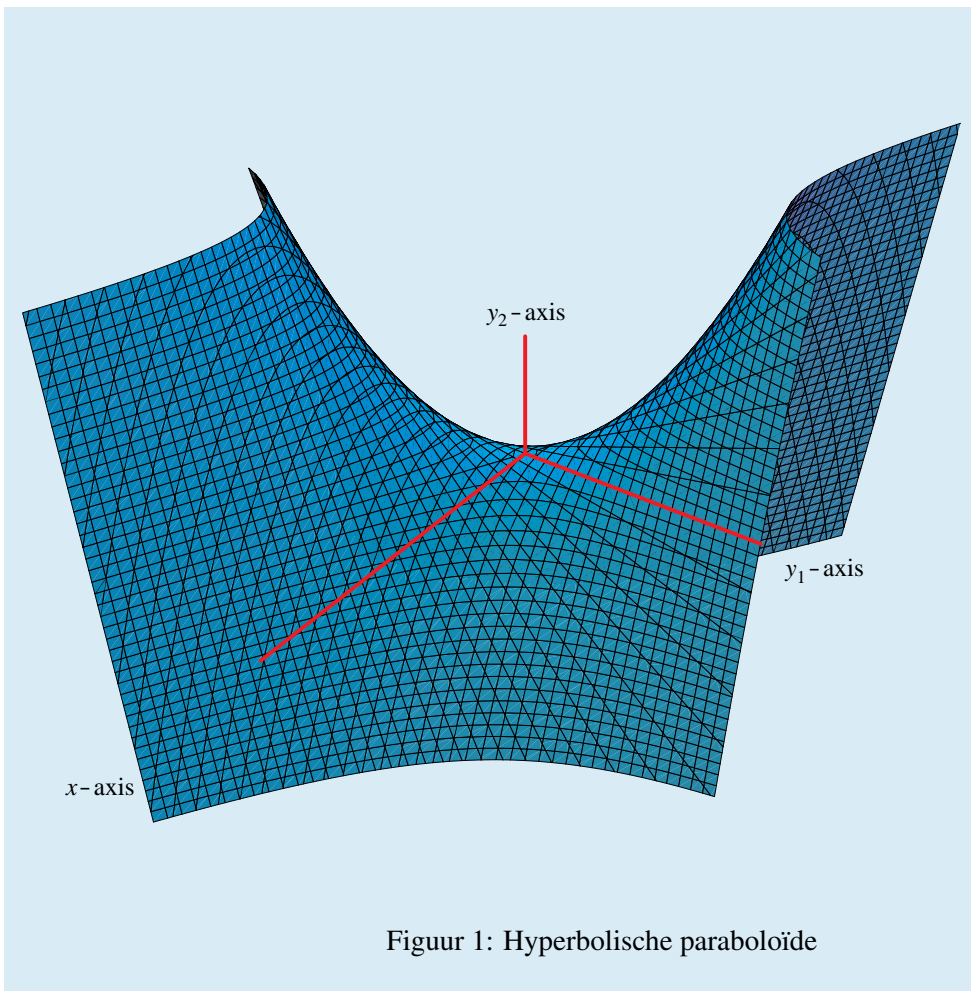
Exercise 0.1 (De meetkunde van de vierkantsvergelijking). In dit vraagstuk beschouwen we de polynoomfunctie $p(x, y) = x^2 + 2y_1x + y_2$ in de reële variabele x met reële coëfficiënten $2y_1$ en y_2 als een functie $p : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ van alle drie de variabelen gelijktijdig, dus

$$p : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{gegeven door} \quad p(x, y) = x^2 + 2y_1x + y_2.$$

Men kan allerlei eigenschappen van de vierkantsvergelijking aflezen uit meetkundige eigenschappen van de nulpuntsverzameling

$$N = \{ (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \mid p(x, y) = 0 \},$$

en omgekeerd. Met behulp van het *Mathematica* package `ContourPlot3D` is de onderstaande illustratie van het gladde oppervlak N in \mathbf{R}^3 gemaakt; zo een oppervlak wordt een *hyperbolische paraboloid* of ook wel een *zadelvlak* genoemd.



Op zijn beurt roept deze illustratie onmiddellijk nieuwe vragen op: over N zien we onder andere bergparabolen lopen in vlakken die loodrecht staan op de y_1 -as. We zullen dit nu nader onderzoeken. We beginnen met een overzicht van welbekende algebraïsche aspecten.

(i) Bewijs

$$p(x, y) = (x + y_1)^2 - \Delta(y) \quad \text{waarbij} \quad \Delta(y) = y_1^2 - y_2;$$

uiteeraard is $\Delta : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de *discriminant* van de kwadratische vergelijking. Veronderstel nu dat $(x, y) \in \mathbf{R}^3$ voldoen aan $p(x, y) = 0$. Concludeer dat dan

$$(\star) \quad \Delta(y) = (x + y_1)^2 \geq 0;$$

dat er maximaal twee verschillende oplossingen x van $p(x, y) = 0$ bestaan; en ook dat x een oplossing met multipliciteit 2 van $p(x, y) = 0$ is dan en slechts dan als

$$(x, y_1) \in S := \{ (x, y_1) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y_1 = 0 \}.$$

(ii) Toon aan dat $N = \text{im}(\phi)$ waarbij

$$\phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \text{is gedefinieerd door} \quad \phi(x, y_1) = (x, y_1, -x^2 - 2y_1x).$$

Concludeer dat N een C^∞ deelvariëteit in \mathbf{R}^3 van dimensie 2 is.

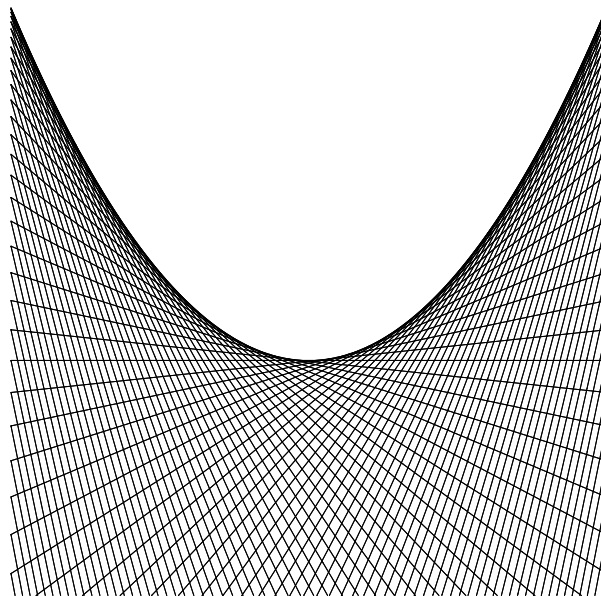
(iii) Bereken de rang van $Dp(x, y) \in \text{Lin}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$ voor alle $(x, y) \in \mathbf{R}^3$. Bewijs nu nog eens, op een andere manier dan in onderdeel (ii), dat N een C^∞ deelvariëteit in \mathbf{R}^3 van dimensie 2 is.

Zij $\pi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de orthogonale projectie $\pi(x, y) = y$ en definieer

$$\Phi = \pi \circ \phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2; \quad \text{dus} \quad \Phi(x, y_1) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -x^2 - 2y_1x \end{pmatrix}.$$

(iv) Bereken $D\Phi(x, y_1) \in \text{End}(\mathbf{R}^2)$ alsmede $\det D\Phi(x, y_1)$. Ga na dat de verzameling van singuliere punten van Φ gelijk is aan de rechte lijn S uit onderdeel (i). Verifieer dat de rang van $D\Phi(x, y_1)$ gelijk is aan 1, voor alle $(x, y_1) \in S$.

De beeldverzameling van Φ zien we in de onderstaande Figuur 2. Uiteeraard wordt deze verkregen door projectie van het (ruimtelijk) oppervlak uit Figuur 1 op het achtervlak.



Figuur 2: $\text{im}(\Phi)$

- (v) Bewijs dat het beeld $\Phi(S) \subset \mathbf{R}^2$ gelijk is aan de dalparabool (onder gebruik van de notatie uit onderdeel (i))

$$P = \{y \in \mathbf{R}^2 \mid \Delta(y) = 0\}.$$

Verifieer verder

$$\Phi(\mathbf{R}^2 \setminus S) = \{y \in \mathbf{R}^2 \mid \Delta(y) > 0\},$$

d.w.z., dit beeld bestaat uit de open deelverzameling van \mathbf{R}^2 liggende onder de parabool P . Toon ook aan m.b.v. onderdeel (i) dat $\Phi^{-1}(\{y\}) \subset \mathbf{R}^2$ steeds uit twee elementen bestaat indien $y \in \Phi(\mathbf{R}^2 \setminus S)$. Vertaal deze resultaten in een uitspraak over de doorsnijding van N met rechte lijnen parallel aan de x -as.

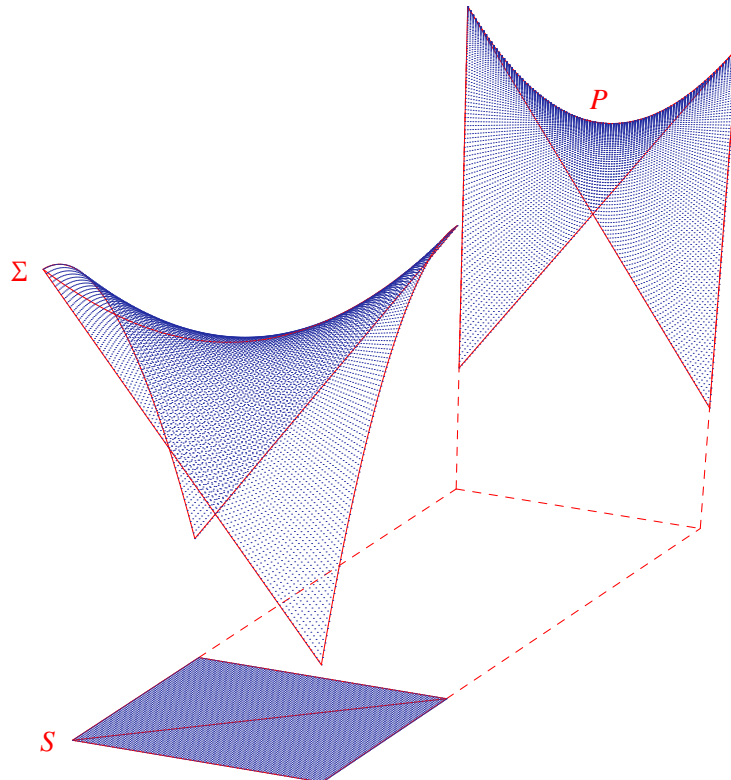
- (vi) Laat zien dat uit onderdeel (v) volgt dat $\phi(S) = \pi^{-1}(P)$, en dat deze verzameling verder gelijk is aan de ruimtekromme in N

$$\Sigma = \text{im}(\sigma) \quad \text{met} \quad \sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3 \quad \text{gegeven door} \quad \sigma(x) = (x, -x, x^2).$$

In de onderstaande Figuur 3 zien we de kromme Σ . Toon ook aan

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \mid p(x, y) = D_1 p(x, y) = 0\}.$$

- (vii) Ga na dat de doorsnijding van N met een vlak $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \mid y_1 \text{ is constant}\}$ (dus loodrecht staande op de y_1 -as) een bergparabool is met haar top in het punt $\sigma(-y_1)$.
- (viii) Geef een parametrisering van de geometrische raaklijn $\Lambda(x)$ aan de kromme Σ in het punt $\sigma(x)$, voor elke $x \in \mathbf{R}$.



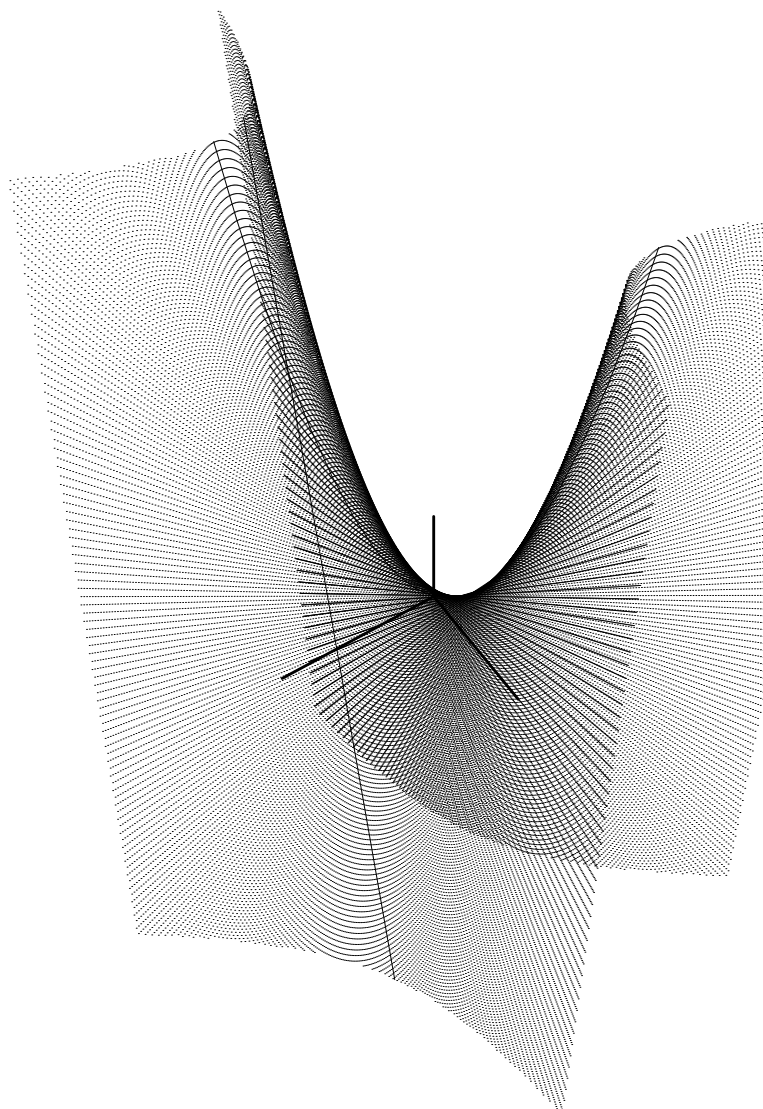
Figuur 3: De rechte lijn S , de vlakke kromme Σ en de parabool P

Het onderstaande onderdeel (ix) behoort niet tot het formele tentamen, maar levert wel bonuspunten op.

In de Figuren 1 en 4 zien we ook rechte lijnen over het oppervlak N lopen in vlakken die loodrecht lijken te staan op de x -as. We tonen nu het bestaan van deze lijnen aan. Zij hiertoe $x \in \mathbf{R}$ vastgekozen en definieer $N(x)$ als de orthogonale projectie van $\Lambda(x)$ op het platte vlak $\{(x, y) \in \mathbf{R}^3 \mid y \in \mathbf{R}^2\}$ (dat dus gaat door $\sigma(x)$ en loodrecht staat op de x -as).

- (ix) Verifieer dat $N(x)$ de rechte lijn $\sigma(x) + \mathbf{R}(0, -1, 2x)$ is, en verder dat het oppervlak N de vereniging is van de disjuncte lijnen $N(x)$, voor alle $x \in \mathbf{R}$. Laat zien dat elke lijn $N(x)$ de kromme Σ in precies één punt snijdt.

Achtergrond: Bij gegeven $x \in \mathbf{R}$, parametrizeert de lijn $N(x)$ alle kwadratische vergelijkingen met voorgeschreven nulpunt x terwijl $\sigma(x)$ de unieke kwadratische vergelijking geeft met nulpunt x met multipliciteit twee.



Figuur 4

Solution of Exercise 0.1

(i) We have

$$p(x, y) = x^2 + 2y_1x + y_1^2 - (y_1^2 - y_2) = (x + y_1)^2 - \Delta(y).$$

If $p(x, y) = 0$ then the assertion of (\star) is obvious as squares are nonnegative. It follows that every solution $x \in \mathbf{R}$ of $p(x, y) = 0$ is given by $x_{\pm} = -y_1 \pm \sqrt{\Delta(y)}$; accordingly, maximally two do exist. Obviously $x_+ = x_-$ if and only if $\Delta(y) = 0$; hence, the final assertion is a direct consequence of (\star) .

(ii) The equality $p(x, y) = 0$ is equivalent with $y_2 = -x^2 - 2y_1x$, which shows that $N = \text{im}(\phi)$. Furthermore, $N = \text{graph}(f)$ where $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ with $f(x, y_1) = -x^2 - 2y_1x$ is a C^∞ function; therefore N is a C^∞ submanifold of \mathbf{R}^3 of dimension 2 on the basis of Definition 4.2.1.

(iii) The identity $Dp(x, y) = (*, *, 1)$ shows that the rank of $Dp(x, y)$ equals 1 everywhere; in other words, $Dp(x, y)$ is surjective, for all $(x, y) \in \mathbf{R}^3$. Hence the second assertion is a direct consequence of the Submersion Theorem 4.5.2.

(iv) Differentiation immediately yields the following formulae:

$$D\Phi(x, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x - 2y_1 & -2x \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \det D\Phi(x, y_1) = 2(x + y_1).$$

By definition, the determinant vanishes at singular points. Hence, the identification of the set of singular points with S follows directly, whereas the equation above obviously is that of a straight line. The assertion on the rank of $D\Phi(x, y_1)$, for $(x, y_1) \in S$, follows from the fact that in this case

$$D\Phi(x, y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

(v) Suppose $(x, y) \in \mathbf{R}^3$ satisfies $\Phi(x, y_1) = y$. Then, in particular, we have $p(x, y) = 0$ and so we obtain from (\star) in part (i) that $\Delta(y) \geq 0$. Hence the inclusions $\Phi(S) \subset P$ and $\Phi(\mathbf{R}^2 \setminus S) \subset \{y \in \mathbf{R}^2 \mid \Delta(y) > 0\}$ are obvious on the basis of (\star) again. Now we prove the reverse inclusions. According to part (i) the condition $\Delta(y) = 0$ on $y \in \mathbf{R}^2$ ensures that there is a unique solution $x \in \mathbf{R}$ for $p(x, y) = 0$, i.e., $y = \Phi(x, y_1)$; furthermore, (\star) then implies that $(x, y_1) \in S$. Next, suppose $y \in \mathbf{R}^2$ satisfies $\Delta(y) > 0$. From part (i) we then obtain the existence of two different solutions x_{\pm} of the equation $p(x, y) = 0$, and this gives two distinct elements $(x_{\pm}, y_1) \in \mathbf{R}^2$ both belonging to $\Phi^{-1}(\{y\})$. Using (\star) once more, we actually get $(x_{\pm}, y_1) \in \mathbf{R}^2 \setminus S$. In geometric terms, lines in \mathbf{R}^3 parallel to the x -axis, which means being of the form $\{(x, y) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in \mathbf{R}\}$, intersect the surface N once, and twice, if $\Delta(y)$ is 0, and positive, respectively, and in no other case.

(vi) By definition $\Phi = \pi \circ \phi$; hence, we obtain $\pi^{-1} \circ \Phi = \phi$ (abusing the notation for the inverse image). Application of this identity to the set S gives the equality $\phi(S) = \pi^{-1}(P)$. Next, suppose $(x, y_1) \in S$, in other words, $y_1 = -x$. Then $\phi(x, y_1) = (x, -x, y_2) \in \phi(S) = \pi^{-1}(P)$ implies $y_2 = x^2$. Accordingly

$$\phi(x, y_1) = (x, -x, x^2) = \sigma(x), \quad \text{that is,} \quad \phi(S) \subset \Sigma.$$

Conversely, $(x, y) \in \Sigma$ implies

$$(x, y) = \sigma(x) = (x, -x, x^2) = \phi(x, -x), \quad \text{i.e.,} \quad \Sigma \subset \phi(S).$$

Now the last assertion. $(x, y) \in \Sigma$ means that x is a solution of $p(X, y) = (X - x)^2 = X^2 - 2xX + x^2 = 0$, and as a consequence x is a solution of $D_1p(X, y) = 2(X - x)$ too. Accordingly, $p(x, y) = D_1p(x, y) = 0$. Conversely, suppose $(x, y) \in \mathbf{R}^3$ satisfies $p(x, y) = 0$ and $D_1p(x, y) = 2(x + y_1) = 0$; hence, in particular, $y_1 = -x$. Hence $(x, y) \in \phi(S) = \Sigma$.

(vii) If y_1 is fixed and $p(x, y) = 0$, we get from (\star) in part (i)

$$y_2 = y_1^2 - \Delta(y) = y_1^2 - (x + y_1)^2.$$

The right-hand side is maximal if $x + y_1 = 0$ and if this is the case it assumes the value y_1^2 . Hence the vertex of the parabola has coordinates $(-y_1, y_1, y_1^2) = \sigma(-y_1)$ and it also opens downward.

(viii) In view of $D\sigma(x) = (1, -1, 2x)$, a parametric representation for $\Lambda(x)$ is given by $\sigma(x) + \mathbf{R}(1, -1, 2x)$.

(ix) $(0, -1, 2x)$ is the orthogonal projection of $D\sigma(x)$ onto the (y_1, y_2) -plane along the x -axis; hence, $N(x)$ may be described as given. By definition, the lines $N(x)$ are disjoint, for distinct $x \in \mathbf{R}$. Furthermore, consider $(x, y) \in N(x)$, that is, satisfying $y_1 = -x - \lambda$ and $y_2 = x^2 + 2\lambda x$, for some $\lambda \in \mathbf{R}$. Then $(x, y) \in N$ as follows from

$$p(x, y) = x^2 + 2y_1x + y_2 = x^2 - 2(x + \lambda)x + x^2 + 2\lambda x = 0.$$

Accordingly, every $N(x)$ is contained in N . Conversely, suppose $x \in \mathbf{R}$ is fixed and $(x, y) \in \mathbf{R}^3$ belongs to N . Then there exists $\lambda \in \mathbf{R}$ such that $y_1 = -x - \lambda$, while $p(x, y) = 0$ now implies

$$y_2 = -x^2 - 2y_1x = x^2 + 2\lambda x; \quad \text{i.e.,} \quad (x, y) \in N(x).$$

The equality $N(x) = \sigma(x) + \mathbf{R}(0, -1, 2x)$ implies that $N(x)$ intersects Σ in $\sigma(x)$, and this is the only point of intersection as the elements of Σ are uniquely determined by their first component.