3.8 Vraagstukken

Vraagstuk 3.8.1 Geef de oplossing van het beginwaardenprobleem

$$\frac{dy}{dx} = A\,y + b(x), \quad y(0) = y_0,$$

waarbij

a. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} x-1 \\ -5x-2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos x \\ 2\,\mathrm{e}^x \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

e. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Vraagstuk 3.8.2 Zij $A : \mathbf{R} \to \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ en $b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ continu. Toon aan dat de verzameling van oplossingen van het stelsel $dy/dx = A(x)\,y + b(x), \quad y \in \mathbf{R}^n$, een n-dimensionale lineaire deelvariëteit van $\mathrm{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ vormt.

Vraagstuk 3.8.3 Zij $A : \mathbf{R} \to \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ continu en periodiek met periode T. Toon aan: als alle oplossingen van de differentiaalvergelijking $dy/dx = A(x)\,y$ periodiek zijn met periode T, dan is $\int_0^T \mathrm{sp}\,A(t)\,dt = 0$.

Vraagstuk 3.8.4 Zij $A \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ een matrix van de vorm $A = \lambda\,E$. Bereken op twee manieren e^A; door het stelsel differentiaalvergelijkingen $dy/dx = y$, $y \in \mathbf{R}^n$, op te lossen en rechtstreeks uit de definitie van de e-macht als machtreeks.

Vraagstuk 3.8.5 Laat $A, B \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ gelijkvormig zijn, in de zin dat er een inverteerbare matrix $S \in \mathrm{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ is, waarvoor $A\,S = S\,B$. Toon aan dat $\mathrm{e}^A\,S = S\,\mathrm{e}^B$, hetgeen impliceert dat e^A en e^B gelijkvormig zijn. Doe dit door te bewijzen dat voor iedere $z_0 \in \mathbf{R}^n$ de oplossing $y(x)$ van $dy/dx = A\,y$ met $y(0) = S\,z_0$ gelijk is aan $S\,z(x)$, waarin $z(x)$ de oplossing is van $dz/dx = B\,z$ met $z(0) = z_0$. Geef ook een bewijs in termen van de definitie van de e-macht als een machtreeks.

Vraagstuk 3.8.6 Bepaal een fundamentele matrix voor het stelsel differentiaalvergelijkingen $dy/dx = A\,y, \quad y \in \mathbf{R}^n$, met A gegeven door

a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Maak bij a - d ook een schets van de oplossingskrommen.

Vraagstuk 3.8.7 Bepaal de stroming horend bij de differentiaalvergelijking $dy/dx = A\,y$ met

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Schrijf de stroming in 'reële standaardvorm'. Beschrijf ook het gedrag van de oplossingen voor $x \to \infty$.

Vraagstuk 3.8.8 Bepaal de stroming horend bij de differentiaalvergelijking $\dot{y} = Ay$ met

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wat hebben deze matrices gemeen? Wat verwacht je in het algemeen bij dit soort matrices?

Vraagstuk 3.8.9 Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \sin(\omega x) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\omega \neq \pm 1).$$

a. Geef de algemene oplossing.

b. Toon aan dat voor elke waarde van ω er minstens één periodieke oplossing is.

c. Toon aan dat alle oplossingen voor het stelsel periodiek zijn dan en slechts dan als ω rationaal is. Bepaal voor $\omega \in \mathbf{Q}$ de kleinste periode van de oplossingen (niet-periodieke oplossingen voor $\omega \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ worden quasi-periodiek genoemd en vertonen een grilliger verloop in de tijd.)

Vraagstuk 3.8.10 Beschouw de vergelijking $y' = f(y)$, met $f(y) = L\,y + g(y)$, $y \in R^n$. Hierin is $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ een lineaire afbeelding en $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ continu. We nemen aan dat er positieve constanten ϵ, δ, C en $\rho \geq \epsilon\, C$ zijn, waarvoor

$$\|g(y)\| \leq \epsilon\,\|y\| \text{ als } \|y\| \leq \delta$$

en

$$\|\,\mathrm{e}^{x\,L}\,\| \leq C\,\mathrm{e}^{-\rho\,x}$$

(i) Laat zien dat

$$y(x) = \mathrm{e}^{x\,L}\,y(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{(x-s)\,L}\,g(y(s))\,ds.$$

Laat verder zien dat als $\|y(s)\| \leq \delta$ voor alle $s \in [0, x]$, dat dan

$$\|y(x)\| \leq C\,\mathrm{e}^{-\rho\,x}\,\|y(0)\| + C\,\epsilon \int_0^x \mathrm{e}^{-\rho\,(x-s)}\,\|y(s)\|\,ds.$$

Hint: pas het Lemma van Gronwall toe op de functie $\psi(x) = \mathrm{e}^{\rho\,x}\,\|y(x)\|$.

(ii) Concludeer dat voor $\|y(0)\| \leq \frac{\delta}{C}$ en voor alle $x \geq 0$ geldt:

$$\|y(x)\| \leq \mathrm{e}^{(-\rho+\epsilon C)\,x}\; C\,\|y(0)\|.$$

(iii) Bewijs de volgende stelling. Zij f een continu differentieerbare afbeelding van $\mathbf{R}^n$ naar $\mathbf{R}^n$. Veronderstel $f(0) = 0$ en dat alle eigenwaarden van $Df(0)$ een negatief reëel deel hebben. Dan is de nuloplossing van $dy/dx = f(y)$ asymptotisch stabiel.