6.8 Vraagstukken

Vraagstuk 6.8.1 Beschouw het randwaardeprobleem met Neumann-condities

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0, \quad y'(0) = \alpha. \quad y'(\pi) = \beta; \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Ga na onder welke voorwaarden van α en β dit randwaardeprobleem een oplossing heeft, en of deze oplossing uniek is.

Vraagstuk 6.8.2 a) Bewijs dat voor iedere continue functie $f(x)$ op $[0, \frac{\pi}{2}]$ het randwaardeprobleem

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = f, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{1}$$

prcies één oplossing heeft.

b) Herleid m.b.v. de transformatie van Liouville het probleem (1) tot een randwaardeprobleem van de vorm

$$\frac{d^2u}{dx^2} + qu = g \tag{2}$$

met bijpasssende randvoorwaarden.

c) Bewijs voor probleem (2) existentie en eenduidigheid en bepaal de functie van Green.

d) Bepaal de oplossing van (1) met behulp van de bij onderdeel c) gevonden functie van Green voor (2).

Vraagstuk 6.8.3 Los de volgende randwaardeproblemen op

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x), \quad y(-1) = y(1) = 0.$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \pi^2 y = f(x), \quad y(0) = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

Vraagstuk 6.8.4 Beschouw het randwaardeprobleem

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{1}$$

(a) Bepaal de functie van Green van (1).

(b) Geef de oplossing van (1) met behulp van de functie van Green.

(c) Bewijs dat voor alle $x \in [0, 1]$ geldt:

(i) $y''(x) > 0$.

(ii) $y'(0) \le y'(x) \le y'(1)$, waarbij $-\frac{1}{2} < y'(0) < 0$ en $0 < y'(1) < \frac{1}{2}$.

(iii) $-\frac{1}{4} \le y(x) \le 0$.

Vraagstuk 6.8.5 Zij $u \in \mathrm{C}^2([0, 1])$, $u(0) = u(1) = 0$. Bereken

$$v(x) = \int_0^x \xi\,(x-1)\,\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}\,d\xi + \int_x^1 (\xi-1)\,x\,\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}\,d\xi$$

op twee manieren:

a) Door partiële integratie.

b) Door gebruik te maken van de functie van Green voor het Dirichlet-probleem op $[0, 1]$ voor de operator d^2/dx^2.

Vraagstuk 6.8.6 Zij $G(x, \xi)$ de functie van Green voor het Dirichlet-probleem voor $L = p(x)\,\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\,\frac{d}{dx} + r(x)$, waarin $p \in \mathrm{C}^2$, $q \in \mathrm{C}^1$, $r \in \mathrm{C}^0$ en $p(x) \neq 0$ voor alle $x \in [a, b]$. Bewijs dat voor iedere $x \in [a, b]$ de functie $y : \xi \mapsto G(x, \xi)$ een oplossing is van $L^*\,y = 0$ op $[a, x[$ en op $]x, b]$. Verder dat $G(x, a) = G(x, b) = 0$, dat

$$\lim_{\xi \uparrow x} G(x, \xi) = G(x, x) = \lim_{\xi \downarrow x} G(x, \xi)$$

en dat

$$\lim_{\xi \downarrow x} \frac{d}{d\xi}\left(G(x, \xi)\,p(\xi)\right) - \lim_{\xi \uparrow x} \frac{d}{d\xi}\left(G(x, \xi)\,p(\xi)\right) = 1.$$

Zij nu $u \in \mathrm{C}^2([a, b])$, $u(a) = u(b) = 0$. Bereken

$$\int_a^x G(x, \xi)\,(L\,u)(\xi)\,d\xi + \int_x^b G(x, \xi)\,(L\,u)(\xi)\,d\xi$$

op twee manieren:

a) Door herhaalde partiële integratie.

b) Door gebruik te maken van de relatie $\mathcal{G} \circ L\,u = u$.

Vraagstuk 6.8.7 Bewijs, door gebruik te maken van Fourier-reeksen, dat voor iedere $u \in \mathrm{C}^2([0, 1])$ met $u(0) = u(1) = 0$ geldt:

$$\int_0^1 u'(x)^2\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 u(x)^2\,dx.$$

Bewijs dat voor iedere continue functie $f(x)$ op $[0, 1]$ geldt:

$$2\pi^2 \int_0^1 \int_0^x (1-x)\,\xi\,f(\xi)\,f(x)\,d\xi\,dx \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx.$$

Vraagstuk 6.8.8 Beschouw het randwaardeprobleem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2\,y = f, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad f(x) = \sin x, \tag{1}$$

met $\omega > 0$ en $\omega \notin \mathbf{N}$.

(a) Bepaal de oplossing van dit probleem m.b.v. de functie van Green.

(b) Bepaal eigenwaarden en eigenfuncties van het randwaardeprobleem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\, y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2}$$

(c) Merk op dat eigenwaarden μ van (1) voldoen aan $\mu = \lambda - \omega^2$, waarbij λ de eigenwaarden van (2) doorloopt, en dat de eigenfuncties van (1) en (2) gelijk zijn. Geef vervolgens de ontwikkeling van de oplossing van (1) naar de eigenfuncties van (2).

(d) Ontwikkel de functie van Green van (1) naar de eigenfuncties van (2).

Vraagstuk 6.8.9 Beschouw eigenwaardeprobleem

$$L\, y - \lambda\, y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

waarin

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx}.$$

(a) Toon aan dat dit eigenwaardeprobleem niet zelfgeadjungeerd is; geef de geadjungeerde operator L^*.

(b) Bepaal de eigenwaarden en eigenfuncties voor het gegeven eigenwaardeprobleem.

(c) Aan welke orthogonaliteitsrelatie voldoen de eigenfuncties?

Vraagstuk 6.8.10 Beschouw de differentiaalvergelijking van Laguerre

$$L_\lambda\, y = x\,\frac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\,\frac{dy}{dx} + \lambda\, y = 0,$$

waarin λ een parameter is. In het vervolg zijn $f(x)$ en $g(x)$ steeds *veeltermen*. Noteer:

$$\langle f,\, g\rangle = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, \mathrm{e}^{-x}\, dx.$$

Bewijs: $\langle L_\lambda\, f,\, g\rangle = \langle f,\, L_\lambda\, g\rangle$. Is bovendien $L_\lambda\, f = 0$ en $L_\mu\, g = 0$, dan geldt de orthogonaliteitsrelatie $(\lambda - \mu)\,\langle f,\, g\rangle = 0$.

Vraagstuk 6.8.11 We beschouwen de warmte- of diffusievergelijking

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \tag{1}$$

met randvoorwaarden

$$T(0,\, t) = T(1,\, t) = 0 \tag{2}$$

en beginvoorwaarde

$$T(x,\, 0) = f(x). \tag{3}$$

Hierin beschrijft (1) de warmtegeleiding in een eindige staaf; $T(x,\, t)$ is de temperatuur op plaats x en tijdstip t; (2) geeft dat de uiteinden op constante temperatuur 0 worden gehouden; (3) geeft de aanvankelijke warmteverdeling. We gaan nu zoeken naar oplossingen van het type $T(x,\, t) = \Phi(x)\,\Psi(t)$. Aangetoond kan worden dat alle oplossingen verkregen kunnen worden als reeksen van dit soort oplossingen van het 'gescheiden variabelen type'.

(a) Toon aan dat $\dfrac{\Phi''(x)}{\Phi(x)} = \dfrac{\Psi'(t)}{\Psi(t)} = c$ moet gelden voor een oplossing van gescheiden variabelen type, met c een constante.

(b) Bewijs dat het probleem $\Phi'' - c\,\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(1) = 0$ alleen oplosbaar is als $c = -\lambda^2$ met $\lambda = n\pi$. Geef de oplossing.

(c) Bepaal nu $\Psi(t)$ bij de in het vorige onderdeel bepaalde waarden van c. Toon aan, dat $T(x,\,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(k\pi x) \exp(-k^2\,\pi^2\,t)$ een oplossing is van (1), (2). Bepaal $\lim_{t\to\infty} T(x,\,t)$ en geef de fysische interpretatie hiervan.

(d) Bepaal de coëfficiënten a_k, zó dat aan de beginvoorwaarde (3) is voldaan.

(e) Geef de oplossing van (1), (2), (3) als $f(x) = \sin \pi x$.