

**Opgave 1** [20pt]

Bereken

$$(a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin^2 x};$$

Het is bekend dat  $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$  en  $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$  voor alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dus

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{\sin^2(x - \frac{\pi}{2})}.$$

De substitutie  $y = x - \frac{\pi}{2}$  geeft dan

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{\sin^2 y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{y}{\sin y} \right)^2 = \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} \right)^2 = \left( \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} \right)^2 = \left( \frac{1}{1} \right)^2 = 1,$$

omdat de functie  $z \mapsto z^2$  continu is en  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \neq 0$ .

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}.$$

Er geldt

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}.$$

De functie

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}$$

is continu in  $x = 0$ , omdat

- de functie  $x \mapsto 1 + x$  is continu in  $x = 0$  als de som van twee continue functies;
- de functie  $y \mapsto \sqrt{y}$  is continu in  $y = 1$ ;
- de functie  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  is continu in  $x = 0$  als de samenstelling van twee continue functies;
- de functies  $g(x) = 1 + \sqrt{1+x}$  is continu in  $x = 0$  als de som van twee continue functies;
- $1/g(x)$  is continu in  $x = 0$  omdat  $g$  continu is in  $x = 0$  en  $g(0) = 2 \neq 0$ .

Ook geldt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Hieruit volgt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f(0) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

**Opgave 2** [15pt]

Beschouw de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} .$$

Ga na of  $f$  differentieerbaar is in  $x = 0$ .

Beschouw het differentiequotient  $Q : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  van  $f$  in  $x = 0$ ,

$$Q(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = -\frac{|h|}{h(1 + |h|)}$$

met  $\text{Dom}(Q) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Stel dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q(h) = q$$

voor een  $q \in \mathbb{R}$ . Merk op dat  $q$  uniek is, omdat  $0$  een limietpunt is van  $\text{Dom}(Q)$ . Dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(h_n) = q$$

voor iedere rij  $(h_n)_{n \geq 1}$  met  $h_n \neq 0$  en zo dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ .

Neem eerst

$$h_n = \frac{1}{n} .$$

Dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(h_n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = -1$$

omdat de rationale functie

$$x \mapsto \frac{1}{1 + x}$$

continu is in  $x = 0$ . Nemen we

$$h_n = -\frac{1}{n} ,$$

dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(h_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 .$$

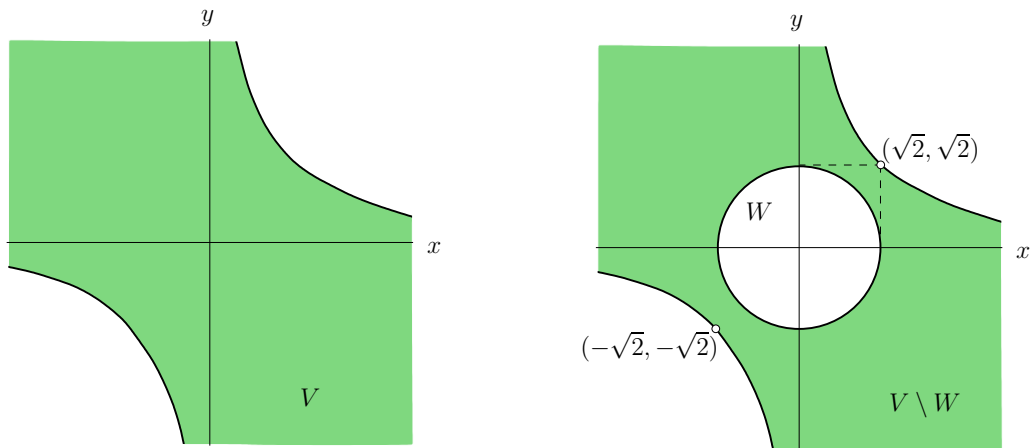
We zouden moeten hebben  $q = -1$  en  $q = 1$ , tegenstelling. Dus heeft  $Q(h)$  geen limiet in  $h = 0$ . De functie  $f$  is niet differentieerbaar in  $x = 0$ .

**Opgave 3** [15pt]

Zij  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 2\} \subset \mathbb{R}^2$ . Met deze  $V$  definiëren we  $W \subset \mathbb{R}^2$  door

$$W = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 2\} .$$

(a) Schets  $V$  en  $W$ .



(b) Is  $W$  gesloten in  $\mathbb{R}^2$ ? Waarom wel of waarom niet?

We hebben

$$W = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 \leq 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$$

omdat voor ieder punt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  met  $x^2 + y^2 \leq 2$  geldt dat  $xy < 2$ . Inderdaad, in het grens geval

$$y = \frac{2}{x}, \quad x \neq 0,$$

geldt

$$x^2 + y^2 - 2 = x^2 + \frac{4}{x^2} - 2 = \frac{x^2 - 2x^2 + 4}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)^2 + 3}{x^2} > 0.$$

Dus is  $W$  een gesloten bol in  $\mathbb{R}^2$ .

(c) Is  $W$  gesloten in  $V$ ? Waarom wel of waarom niet?

Het complement van  $W$  in  $V$ ,

$$V \setminus W = U := \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 > 2\}$$

is open in  $V$ . Inderdaad is  $U$  het volledige origineel van het open interval  $]2, \infty[$  onder de continue functie  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Dus is  $W$  gesloten in  $V$ .

#### Opgave 4 [20pt]

Zij  $(V, d)$  een metrische ruimte met de afstand functie  $d$ . We definiëren een functie  $\tilde{d} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  met de formule

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in V.$$

Bewijs dat  $(V, \tilde{d})$  ook een metrische ruimte is.

*Hint:* Om de driehoeksongelijkheid te bewijzen, laat zien dat voor  $a, b, c \geq 0$  de ongelijkheid  $a + b - c \geq 0$  impliceert:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq 0.$$

(i) Voor alle  $x, y \in V$  geldt

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \geq 0$$

omdat  $d(x, y) \geq 0$  voor alle  $x, y \in V$ . Verder is  $\tilde{d}(x, y) = 0$  dan en slechts dan als  $d(x, y) = 0$ . Maar dat kan alleen als  $x = y$ .

(ii) We hebben

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = \tilde{d}(y, x)$$

omdat  $d(x, y) = d(y, x)$  voor alle  $x, y \in V$ .

(iii) Laat  $a, b, c \geq 0$  zijn waarvoor  $a + b - c \geq 0$ . Dan

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} = \frac{(a+b-c) + ab(2+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 0.$$

Voor  $x, y, z \in V$  definiëer  $a := d(x, z), b := d(z, y), c := d(x, y)$ . Er geldt  $a, b, c \geq 0$  en  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  zodat  $a + b - c \geq 0$ . We hebben dus

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \geq 0$$

ofwel  $\tilde{d}(x, y) \leq \tilde{d}(x, z) + \tilde{d}(z, y)$  voor alle  $x, y, z \in V$ . Hiermee is de driehoeksongelijkheid bewezen.

We zien dat  $\tilde{d}$  alle eigenschappen van de afstandfunctie heeft, dus is  $(V, \tilde{d})$  een metrische ruimte.

### Opgave 5 [20pt]

Zij  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  een rij in  $\mathbb{R}$  zodanig dat  $a_0 = 3$  en

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$$

voor  $n \geq 0$ .

(a) Bewijs dat  $a_n \geq 2$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Hint:* Laat eerst laat dat

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$$

voor alle  $x \geq 2$ . Pas dan de inductie naar  $n$  toe.

We hebben

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} - 2 = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x} = \frac{(x-2)^2}{2x} \geq 0$$

voor alle  $x \geq 2$ . Dus, inderdaad

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2$$

voor alle  $x \geq 2$ .

Stel dat  $a_n \geq 2$  voor een  $n \in \mathbb{N}$ . Dan

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \geq 2.$$

Ook geldt dat  $a_0 = 3 \geq 2$ . Met inductie naar  $n$  krijgen we dat  $a_n \geq 2$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Bewijs dat  $a_{n+1} \leq a_n$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

*Hint:* Gebruik (a).

Als  $x \geq 1$  dan

$$\frac{1}{x} \leq x.$$

Uit (a) volgt dat  $\frac{a_n}{2} \geq 1$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ . Hieruit blijkt dat

$$\frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2}.$$

Dus

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n$$

ofwel  $a_{n+1} \leq a_n$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(c) Bewijs dat  $(a_n)$  convergent is en bereken  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

De rij  $(a_n)$  is naar beneden begrensd (wegens (a)) en monotoon dalend (wegens (b)). Dus is  $(a_n)$  convergent, d.w.z. bestaat er een  $a \in \mathbb{R}$  zo dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Bovendien is  $a \geq 2$ . De functie

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

is continu in elke  $x \neq 0$ . De limietovergang  $n \rightarrow \infty$  in

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

levert

$$a = f(a) \quad \text{ofwel} \quad a = \frac{a}{2} + \frac{2}{a}.$$

Dus voldoet  $a$  aan de vergelijking  $a^2 = 4$ . Deze vergelijking heeft twee oplossingen:  $a = 2$  en  $a = -2$ .

De tweede is uitgesloten wegens  $a \geq 2$ . Dus  $a = 2$ .

### Bonus Opgave [10pt]

Neem het interval  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  en knip daar het middelste derde  $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$  uit weg. Er blijven twee intervallen over:  $[0, \frac{1}{3}]$  en  $[\frac{2}{3}, 1]$ . Uit elk van deze twee intervallen knippen we weer het middelste deel weg. Als we dat nu oneindig veel keer doen, vinden we als limiet de *Cantorverzameling*  $\Lambda$ .

Bewijs dat  $\Lambda$  gesloten is in  $\mathbb{R}$ .

De intervallen  $]-\infty, 0[$  en  $]1, \infty[$  zijn open in  $\mathbb{R}$ . Ieder uitgeknipte middelste derde is een open interval. Dus is de Cantorverzameling  $\Lambda$  het complement in  $\mathbb{R}$  van de (oneindig veel) open deelverzamelingen. Deze vereniging is open. Dus is het complement gesloten. De Cantorverzameling  $\Lambda$  is dus gesloten.