Oefen Deeltentamen 2012

1. James B. weet dat een brief die hij zoekt, in één van de drie ladenkasten in het voormalige kantoor van de Secretaris-Generaal (in de kelder van een oud klooster in Moskou) te vinden is. Laat p_i de kans zijn, dat $-$ gegeven dat de brief in kast i is $-$ B. de brief zal vinden in kast i na een vluchtige inspectie van deze kast ($i \in \{1, 2, 3\}$). Hij heeft net de tijd om in kast 1 te kijken, maar ziet de brief niet.

   Toon aan dat de kans dat de brief toch in kast 1 is, gelijk is aan
   $$\frac{1-p_1}{3-p_1}\ .$$

2. Er word herhaaldelijk geworpen met een dobbelsteen. Laat
   $X =$ het aantal worpen tot een met voor het eerste een 6 bovenkomt, en
   $Y =$ het aantal worpen tot een met voor het eerste een 5 bovenkomt.

   (a) Zijn X en Y onafhankelijk?

   (b) Bepaal $\mathbb{E}[X + Y]$.

   (c) Bepaal $\mathbb{P}[X = n, Y = m]$ voor alle $n, m \geq 1$.

3. Stel dat X en Y stochasten zijn met simultane verdeling
   $$P(X = k, Y = n) = \frac{e^{-1}2^{n-k}}{3^n k!(n-k)!}, \text{ voor } 0 \leq k \leq n \text{ en } n \geq 0.$$

   (a) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

   (b) Laat zien dat Y Poisson verdeeld is met parameter 1.

   (c) Bepaal $P(X = k|Y = n)$ voor $0 \leq k \leq n$.

   (d) Laat zien dat $P(X = Y) = e^{-2/3}$.

4. Zeg dat we n keer met een munt werpen, en dat elke keer de kans op KOP gelijk is aan 1/2. We zeggen dat tijdens de i^{de}-worp een *sprong* heeft plaatsgevonden als de uitkomst van de i^{de}-worp verschillend is van de uitkomst van de $(i+1)^{ste}$-worp (hierbij is $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$). Bijvoorbeeld: zeg dat we
   $$K\,K\,M\,K\,M\,K\,K\,M$$
   geworpen hebben, dan is het aantal *sprongen* dus 5. Voor $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, zij $X_i = 1$ als de i^{de}-worp KOP is, en 0 anders. Verder, $Y_i = |X_{i+1} - X_i|$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ en Y is het totaal aantal gemaakte sprongen.

   (a) Bepaal de verdeling en de verwachting van Y_i.

   (b) Toon aan dat $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ onafhankelijk zijn.

   (c) Bepaal $\mathbf{E}(Y)$ zonder de verdeling van Y eerst te bepalen.

   (d) Bepaal de verdeling van Y. Wat is de variantie van Y?

5. Laat $X_1, X_2, \cdots$ een rij van onafhankelijke gelijk verdeelde stochasten zijn met $P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, $P(X_n = 0) = \frac{1}{4}$ en $P(X_n = 0) = \frac{1}{4}$. zlaat zien dat
   $$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < 1) = 1.$$

6. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk en geometrisch verdeeld met parameter p:

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}; k = 1, 2, \ldots$$

Het minimum van X en Y geven we aan met Z, dus $Z = \min\{X, Y\}$.

(a) Laat zien dat Z geometrisch verdeeld is met parameter $p(2-p)$.

(b) Laat zien dat de conditionele verdeling van X gegeven $Z = k$ gegeven wordt door

$$\mathbb{P}[X = n | Z = k] = \begin{cases} \frac{1}{2-p}, & n = k, \\ \frac{p}{2-p}(1-p)^{n-k}, & n > k. \end{cases}$$