



OefenDeel tentamen 2 Kansrekening 2012

1. Zij X een continue stochast met kansdichtheid

$$f_X(x) = \begin{cases} c\sqrt{1+x} & \text{als } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal c .
- (b) Zij $Y = (X + 1)^2$. Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie F_Y en de kansdichtheid f_Y van Y .
2. Geven twee onafhankelijke stochasten X en Y .
- (a) Stel dat X en Y standaard normaal verdeeld zijn. Bepaal $P(2X \leq 1 - 3Y)$.
- (b) Stel nu dat X en Y uniform verdeeld op $(0, 1)$ zijn. Bepaal $P(Y \geq 2X)$, en $P(Y \geq 2X \mid X + Y \leq 1)$.
3. Stel dat de simultane kansdichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} & \text{als } 0 < y < x \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.
- (b) Laat zien dat voor $x > 0$, de conditionele kansdichtheid van Y gegeven $X = x$ gegeven wordt door

$$f_Y(y \mid X = x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{als } 0 < y < x \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (c) Zij $x > 0$. Bereken $P(Y > 1 \mid X = x)$.
- (d) Bereken $E(Y)$.
- (e) Bepaal voor $x > 0$, de conditionele verwachting $E(e^Y \mid X = x)$.
4. Zij X en Y onafhankelijke uniform verdeelde stochasten op het interval $(0, 1)$.
- (a) Zij $Z = 2X + Y$. Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie F_Z en de kansdichtheid f_Z van Z .

(b) Bepaal $E(XZ)$.

5. Zij N, X_1, X_2, X_3, \dots een rij van onafhankelijke stochasten met N Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$, en X_i standaard normaal verdeeld voor $i \geq 1$. Definieer een stochast Y door

$$Y = \begin{cases} X_1 + \sqrt{2} X_2 + \dots + \sqrt{n} X_n & \text{als } N = n, n \geq 1 \\ 0 & \text{als } N = 0. \end{cases}$$

(a) Bepaal $P(Y \leq t | N = n)$ voor $n \geq 0$, en $t \in \mathbb{R}$.

(b) Bepaal $E(Y | N = n)$ en $E(Y^2 | N = n)$.

(c) Laat zien dat $\text{Var}(Y) = \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{2}$.