Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Inleiding Kansrekening en Statistiek OefenTentamen, 2015-16

(1) Een exploratie maatschappij doet boringen in een gebied waarbij er kans θ is dat er olie wordt aangeboord. Stel dat er 5 boringen verricht worden totdat er eindelijk olie wordt gevonden. Op een iets andere plaats in het gebied wordt opnieuw (en onafhankelijk van de eerdere boringen) een serie boringen uitgevoerd totdat bij de 10e boring voor het eerst olie gevonden wordt. Steeds op iets andere plekken in het gebied worden er nog vier series van dit soort boringen uitgevoerd: de benodigde aantallen pogingen in deze vier series zijn 8, 7, 6, en 8.

Dus alles tezamen zijn

$$5 \quad 10 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 8$$

de aantallen pogingen in elke serie tot en met succes.

(a) Laat zien dat de likelihood functie die bij deze steekproef van grootte 6 hoort gelijk is aan:

$$L(\theta) = \theta^6(1-\theta)^{38}, \qquad 0 \le \theta \le 1.$$

(b) Wat is de maximum likelihood schatting voor θ?

(2) Zij $X_1, X_2, \ldots,$ een rij van onafhankelijke stochasten met X_n exponentieel verdeeld met parameter $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ (d.w.z. $P(X_n > x) = e^{-x/n}$ voor $x > 0$ en 0 anders).

(a) Laat zien dat $Y_n = X_n/n$ exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

(b) Zij $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$. Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \le 1) = 1/2$.

(c) Laat zien dat $P(|\dfrac{X_n - n}{n}| > 4) \le \dfrac{1}{16}$.

(3) Zij $x_1, x_2, \cdots, x_n$ een realisatie (dataset) van n onafhankelijk gelijk verdeelde stochasten $X_1, X_2, \cdots, X_n$. Stel dat voor $1 \le i \le n$, X_i Geometrisch verdeeld is met onbekende parameter p.

(a) Zij $\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. Laat zien dat $t = \dfrac{1}{\overline{x}_n}$ de maximum likelihood schatting van p is (op basis van de gegeven dataset)

(b) Laat zien dat $S = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ een zuivere schatter van $q = \dfrac{1}{p}$ is.

(c) Bepaal de *mean squared error* $\mathrm{M}SE(S)$ van S.

(4) Zij Z_1, Z_2, Z_3 onfhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten.

(a) Bepaal $P(\max(Z_1, Z_2, Z_3) > 0)$.

(b) Bepaal de kansdichtheid van de stochast $W = 3Z_1 - 2Z_2 - 4Z_3$. Bereken vervolgens $P(3Z_1 - 2Z_2 < 4Z_3 + 1)$.

(5) Gegeven is een dataset $x_1, x_2, \ldots, x_{31}$, die we opvatten als de realisatie van een steekproef $X_1, X_2, \ldots, X_{31}$ uit een normale verdeling met parameters μ en σ^2. Dus de X_i's zijn onafhanklijk en allemaal $N(\mu, \sigma^2)$ verdeeld. Verder is bekend dat $\overline{x}_{31} = 3.54$ en dat $\sigma = 0.13$. Bepaal het 98%-betrouwbaarheidsgebied voor de onbekende parameter μ.

(6) Gegeven de dataset 1 3.1 0.5 1.1 2 gezien worden als een realisatie van de i.i.d. rij X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 waarbij X_i exponentieel verdeeld is met parameter λ. Men beweert dat $\lambda = 1$, en gebaseerd op de data willen we de nul hypothese $H_0 : \lambda = 1$ toetsen tegen de alternatieve $H_1 : \lambda \neq 1$ met een signifacantie niveau van $\alpha = 0.05$. We nemen $M = \min(X_1, \cdots, X_n)$ als toetsingsgrootheid.

(a) Bepaal de waarden van c_ℓ, c_u zodanig dat $P(M < c_\ell | H_0 \text{ waar}\} = P(M > c_u | H_0 \text{ waar}\} = 0.025$

(b) Gebaseerd op de gegeven data moeten we H_0 verwerpen?

(7) Stel dat de simultane kansdichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^3 x e^{-\lambda y} & \text{als } 0 < x < y \\ \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Bepaal de kansdichtheid $f_Y(y)$ van Y.

(b) Bepaal de verwachting $E\left(\dfrac{1}{Y^2}\right)$.

(c) Voor $y > 0$, bepaal de conditionele kansdichtheid $f_X(x|Y = y)$ en de conditionele verwachting $E(X|Y = y)$ van X gegeven $Y = y$