# **Opgaven over** *gebroken afgeleiden*

november 2013

## Opgave 1

Gezocht zijn functies $f(x)$ die voldoen aan de "functionaalvergelijking":

$$\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(x+1) = x\ f(x), \quad \text{voor } x \in \mathbb{R}^{>0}. \end{cases}$$

Laat zien dat deze vergelijking oneindig veel oplossingen $f(x)$ heeft[1]. Het is voor deze opgave voldoende als je aantoont dat de functies

$$f(x) = \cos(2m\pi x)\ \Gamma(x),\ \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

oplossingen zijn, waarbij $\Gamma(x)$ de gamma-functie voorstelt.

## Opgave 2

Laat zien dat $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ en $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

## Opgave 3

Bewijs m.b.v. volledige inductie dat

$$(J^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\ dt, \text{voor}\ \ n \in \mathbb{N},$$

waarbij $(Jf)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, $(J^2 f)(x) = \int_0^x (\int_0^t f(s)\ ds)\ dt$, etcetera...

Z.O.Z.

[1]NB. Er bestaat een *unieke* oplossing $f:\ ]0,\infty[\to]0,\infty[$, bijvoorbeeld, als de functie $\log(f(x))$ convex is, zie een artikel van Bohr-Mollerup uit 1922.

## Opgave 4

Bereken de "halve" afgeleide van de functie $f(x) = x$.

(antwoord= $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$; hint: $\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$)