Universiteit Utrecht — Universiteit Utrecht — Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut — 3584 CD Utrecht

# Uitwerking Inleveropgave10 kansrekening 2012

1. Stel dat de simultane dichtheid van $X$ en $Y$ gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4y}{x} & \text{als } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Bepaal de marginale kansdichtheden $f_X$ en $f_Y$ van $X$ en $Y$.
   (b) Bepaal $E(XY)$.
   (c) Bepaal $P(X+Y \leq 1)$.
   (d) Laat zien dat de stochast $Z = X^2$ uniform verdeeld is op $(0,1)$.

**uitwerking (a)**: We bepalen eerst de marginale dichtheid van $X$. Voor $0 < x < 1$,

$$f_X(x) = \int_0^x \frac{4y}{x}\, dy = \frac{2y^2}{x}\Big|_0^x = 2x.$$

Dus

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Voor $0 < y < 1$,

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{4y}{x}\, dy = 4y \ln y\Big|_y^1 = -4y \ln y.$$

Dus

$$f_Y(y) = \begin{cases} -4y \ln y & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

**uitwerking (b)**:

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^x xy\frac{4y}{x}\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{4y^3}{3}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{4x^3}{3} = 1/3$$

.

**uitwerking (c)**:

$$P(X+Y \leq 1) = \int_0^{1/2} \int_0^x \frac{4y}{x}\, dy\, dx + \int_{1/2}^1 \int_0^{1-x} \frac{4y}{x}\, dy\, dx = \ln 4 - 1 \approx 0.386.$$

**uitwerking (d)**: Voor $0 < z < 1$,

$$P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) = P(X \leq \sqrt{z}) = \int_0^{\sqrt{z}} 2x\,dx = x^2|_0^{\sqrt{z}} = z.$$

Dus

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 < z < 1; \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

In andere woorden: $Z$ is uniform verdeeld op het interval $(0, 1)$.