Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Uitwerking Inleveropgave 7 Kansrekening 2012

Zij $\rho > 1$ en laat X een continue stochast zijn met kansdichtheid

$$f(x) = (\rho - 1)x^{-\rho} I_{[1,\infty)}.$$

(a) Bepaal $P(3 \leq X^2 - 1 \leq 8)$.

Uitwerking:

$$P(3 \leq X^2 - 1 \leq 8) = P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 (\rho - 1)x^{-\rho} dx = 2^{1-\rho} - 3^{1-\rho}.$$

(b) Bepaal de mediaan, d.w.z. de waarde van m zodat $P(X \leq m) \geq 1/2$ en $P(X \geq m) \geq 1/2$.

Uitwerking: We bepalen eerst

$$P(X \leq m) = \int_1^m (\rho - 1)x^{-\rho} dx = 1 - m^{1-\rho}.$$

Nu, $P(X \leq m) \geq 1/2$ dan en slechts dan $m^{1-\rho} \leq 1/2$. Verder,

$$P(X \geq m) = 1 - P(X < m) = 1 - P(X \leq m) = m^{1-\rho},$$

dus $P(X \geq m) \geq 1/2$ dan en slechts dan $m^{1-\rho} \geq 1/2$. We zien dus dat de mediaan m uniek is en voldoet aan $m^{1-\rho} = 1/2$ ofwel $m = 2^{\frac{1}{\rho - 1}}$.

(c) Voor welke waarden van ρ is $E(X) < \infty$? Bepaal in dit geval $E(X)$.

Uitwerking:

$$E(X) = \int_1^\infty (\rho - 1)x^{-\rho+1} dx = \frac{\rho - 1}{2 - \rho} x^{-\rho+2}|_1^\infty.$$

Dus als $\rho > 2$ dan is $E(X) < \infty$ en heeft waarde $E(X) = \dfrac{\rho - 1}{\rho - 2}$.

(d) Voor welke waarden van ρ is $\mathrm{Var}(X) < \infty$? Bepaal in dit geval $\mathrm{Var}(X)$.

Uitwerking: Uit onderdeel (c) weten we dat $\rho > 2$. We berekenen eerst

$$E(X^2) = \int_1^\infty (\rho - 1)x^{-\rho+2} dx = \frac{\rho - 1}{3 - \rho} x^{-\rho+3}|_1^\infty.$$

Als $\rho > 3$ dan is $E(X^2) < \infty$ en heeft waarde $E(X^2) = \dfrac{\rho - 1}{\rho - 3}$. Dus $\mathrm{Var}(X) < \infty$ als $\rho > 3$ en in dit geval

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\rho - 1}{\rho - 3} - \frac{(\rho - 1)^2}{(\rho - 2)^2} = \frac{\rho - 1}{(\rho - 3)(\rho - 2)^2}.$$

(e) Zij $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$ een rij van onafhankelijke gelijk verdeelde stochasten met kansdichtheid

$$f_{X_i}(x) = f(x) = 3x^{-4} I_{[1,\infty)}.$$

Met behulp van de Centrale Limiet Stelling geef een schatting van

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} \leq 40).$$

Uitwerking: Uit onderdelen (c) en (d) met $\rho = 4$ zien we dat $E(X_i) = 3/2$ en $\mathrm{Var}(X_i) = 3/4$ voor $i = 1, 2, \cdots, 25$. Dan $E(X_1 + \cdots + X_{25} = (25)(1.5) = 37.5$ en door onafhankelijkheids $\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_{25}) = (25)(0,75) = 18.75$. Dus $\mathrm{SD}(X_1 + \cdots + X_{25}) = \sqrt{18.75} = 4.33$.

Door de Centrale Limiet stelling

$$P(X_1 + \cdots + X_{25} \leq 40) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{25} - 37.5}{4.33} \leq \frac{40 - 37.5}{4.33}\right) \approx P(Z \leq 0.58) = 0,7190,$$

waarbij Z is een standaard normaal verdeelde stochast.