Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Uitwerking Inleveropgave8 kansrekening 2012

1. Beschouw een Poisson process met parameter λ en aankomsttijden $T_1, T_2, \cdots$. Noteer met $N[s,t]$ het aantal aankomsten in het interval $[s,t]$. Veronderstel dat $P(N[0,1] = 0) = \frac{1}{2}$.

   (a) Laat zien dat $\lambda = \ln 2$.

   (b) Bepaal $P(T_2 - T_1 > 2)$.

   (c) Bepaal de conditionele kans $P(N[0,3] = 3 \,|\, N[0,1] = 2)$.

   (d) Bepaal de conditionele kans $P(T_1 < 1 < T_2 < 2 \,|\, N[0,2] = 2)$.

uitwerking (a): De stochast $N[0,1]$ is Poisson verdeeld met parameter λ. Dan

$$e^{-\lambda} = P(N[0,1] = 0) = \frac{1}{2}.$$

Dus $\lambda = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$.

uitwerking (b): De stochast $W_2 = T_2 - T_1$ is exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = \ln 2$, dus

$$P(T_2 - T_1 > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-2\ln 2} = \frac{1}{4}.$$

uitwerking (c):

$$\begin{aligned}
P(N[0,3] = 3 \,|\, N[0,1] = 2) &= \frac{P(N[0,3] = 3,\ N[0,1] = 2)}{P(N[0,1] = 2)} \\
&= \frac{P(N[0,1] = 2)P(N[1,3] = 1)}{P(N[0,1] = 2)} \\
&= P(N[1,3] = 1) = e^{-2\lambda}(2\lambda) \\
&= e^{-2\ln 2}(2\ln 2) = \frac{\ln 4}{4}.
\end{aligned}$$

uitwerking (d):

$$
\begin{aligned}
P(T_1 < 1 < X_2 < 2 \,|\, N[0,2] = 2) &= \frac{P(X_1 < 1 < X_2 < 2, N[0,2] = 2)}{P(N[0,2] = 2)} \\
&= \frac{P(N[0,1] = 1, N[1,2] = 1)}{P(N[0,2] = 2)} \\
&= \frac{P(N[0,1] = 1)P(N[1,2] = 1)}{P(N[0,2] = 2)} \\
&= 1/2.
\end{aligned}
$$

Merk op dat $N[0,1], N[1,2]$ zijn Poisson verdeeld met parameter λ, en $N[0,2]$ is Poisson verdeeld met parameter 2λ.