Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Uitwerking Inleveropgave9 kansrekening 2012

1. Zij U en V onafhankelijke uniform verdeelde stochasten op het interval $[0,1]$. Zij $Y = \max(U,V)$ en $Z = \min(U,V)$.

   (a) Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie F_Y en de kansdichtheid f_Y van Y.

   (b) Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie F_Z en de kansdichtheid f_Z van Z.

   (c) Definieer een discrete stochast X door

   $$X = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 \leq U < e^{-1},$$

   en voor $1, 2, \ldots,$

   $$X = k \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-1}}{j!} \leq U < \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-1}}{j!}.$$

   Laat zien dat X Poisson verdeeld is met parameter $\mu = 1$.

Uitwerking (a): Voor $0 \leq y \leq 1$, vanwege de onafhankelijkheids van U en$V$,

$$P(Y \leq y) = P(U \leq y, V \leq y) = P(U \leq y)P(V \leq y) = y^2.$$

Dus, de cumulatieve functie van Y wordt gegeven door

$$F_Y(y) = \begin{cases} y^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

De kansdichtiheid van Y is gegeven door

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \begin{cases} 2y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Uitwerking (b): Voor $0 \leq y \leq 1$, vanwege de onafhankelijkheids van U en$V$,

$$P(Z > y) = P(U > y, V > y) = P(U > y)P(V > y) = (1-y)^2.$$

Dus, de cumulatieve functie van Z wordt gegeven door

$$F_Z(y) = 1 - P(Z > y) = \begin{cases} 1-(1-y)^2, & 0 \leq y \leq 1 \\ \\ 1, & y > 1 \\ \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

De kansdichtiheid van Z is gegeven door

$$f_Z(y) = \frac{dF_Z(y)}{dy} \begin{cases} 2(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Uitwerking (c): Eerst merkop dat $0 \leq \sum_{j=0}^{k} \dfrac{e^{-1}}{j!} \leq 1$ voor alle $k \geq 0$ en U is een continue stochast. Dus

$$P(X=0) = P(0 \leq U < e^{-1}) = e^{-1},$$

en voor $k \geq 1$

$$P(X=k) = P(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-1}}{j!} \leq U < \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-1}}{j!}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{e^{-1}}{j!} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{e^{-1}}{j!} = \frac{e^{-1}}{k!}.$$

We zien dus dat X Poisson verdeeld is met parameter $\mu = 1$.