Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Extra Opgaven Stochastiek A

1. James B. weet dat een brief die hij zoekt, in één van de drie ladenkasten in het voormalige kantoor van de Secretaris-Generaal (in de kelder van een oud klooster in Moskou) te vinden is. Laat p_i de kans zijn, dat $-$ gegeven dat de brief in kast i is $-$ B. de brief zal vinden in kast i na een vluchtige inspectie van deze kast ($i \in \{1,2,3\}$). Hij heeft net de tijd om in kast 1 te kijken, maar ziet de brief niet.

   Toon aan dat de kans dat de brief toch in kast 1 is, gelijk is aan

   $$\frac{1-p_1}{3-p_1}\ .$$

2. De stochastische grootheden X en Y zijn onafhankelijk en geometrisch verdeeld met parameter p:

   $$P(X=k) = P(Y=k) = p(1-p)^{k-1}; k = 1,2,\ldots$$

   Het minimum van X en Y geven we aan met Z, dus $Z = \min\{X,Y\}$.

   a. Laat zien dat Z geometrisch verdeeld is met parameter $p(2-p)$.

   b. Laat zien dat de conditionele verdeling van X gegeven $Z=k$ gegeven wordt door

   $$f_{X|Z}(n|k) = \begin{cases} \frac{1}{2-p}, & n = k, \\ \frac{p}{2-p}(1-p)^{n-k}, & n > k. \end{cases}$$

   c. Bepaal de conditionele verwachting van X gegeven $Z=k$.

3. Zeg dat we n keer met een munt werpen, en dat elke keer de kans op KOP gelijk is aan 1/2. We zeggen dat tijdens de i^{de}-worp een *sprong* heeft plaatsgevonden als de uitkomst van de i^{de}-worp verschillend is van de uitkomst van de $(i+1)^{ste}$-worp (hierbij is $i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$). Bijvoorbeeld: zeg dat we

   $$K\ K\ M\ K\ M\ K\ K\ M$$

   geworpen hebben, dan is het aantal *sprongen* dus 5. Voor $i \in \{1,2,\cdots,n\}$, zij $X_i = 1$ als de i^{de}-worp KOP is, en 0 anders. Verder, $Y_i = |X_{i+1} - X_i|$, $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ en Y is het totaal aantal gemaakte sprongen.

   a. Bepaal de kansmassafunctie en de verwachting van Y_i.

b. Toon aan dat $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ onafhankelijk zijn.

c. Bepaal $\mathbf{E}(Y)$ zonder de verdeling van Y eerst te bepalen.

d. Bepaal de verdeling van Y. Wat is de variantie van Y ?

4. Zij $X_1, X_2, \cdots$ een rij van onafhankelijke Binomiale verdeelde stochasten met parameters m en p. Zij N een Poisson stochast zijn met parameter $\lambda > 0$, en veronderstel dat N onafhankelijk van $X_1, X_2, \ldots$ is. Zij $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

   a. Bepaal de generende functie van Y. (Condioneer op de waarden van N.)

   b. Bepaal de verwachting en variantie van Y.

5. Laat $X_1, X_2, \cdots$ een rij van onafhankelijke stochasten zijn met $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ en $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

   a. Laat zien dat for alle $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - \frac{1}{n}| > \epsilon) = 0.$$

   b. Zij $A_k = \cap_{n=k}^{\infty} \{X_n = 0\}$, $k = 1, 2, \cdots$. Laat zien dat voor alle $k \geq 1$,

$$P(A_k) = 0.$$

   c. Laat m.b.v. onderdeel **b** zien dat

$$P(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{X_n = 1\}) = 1.$$