Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Extra Opgaven Stochastiek B

1. Stel dat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke, uniform op $(0,1)$ verdeelde stochasten zijn. Laat verder X ook een uniform verdeelde stochast op $(0,1)$ zijn, onafhankelijk van $X_1, \ldots, X_n$. Definieer Y door:
$$Y = \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$
   (a) Bepaal de verdelingsfunctie van Y.
   (b) Bepaal $P(Y > X)$.

2. Stel dat de simultane dichtheid van X en Y gegeven wordt door
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y^2} & \text{als } x \geq 1, y \geq 1, \\ 0 & \text{eldres.} \end{cases}$$
   (a) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.
   (b) Laat zien dat $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$.
   (c) Bepaal de simultane dichtheid van X en Y/X.
   (d) Laat zien dat de dichtheid van Y/X gegeven wordt door
$$f_{Y/X}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } 0 < z < 1, \\ \frac{1}{2z^2} & \text{als } z \geq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

3. Stel dat Z een standaard normaal verdeelde stochast is, en laat $x \geq 0$ een vast gekozen getal zijn. Definieer de stochast X door
$$X = \begin{cases} Z & \text{als } Z > x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$
   (a) Laat dan zien dat
$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

(b) Laat zien dat

$$E(XZ) \;=\; \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + \; P(Z > x).$$

(c) Bepaal de verdelingsfunctie van X.

4. Laat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke, gelijkverdeelde stochasten zijn, met verdelingsfunctie

$$F(x) \;=\; P(X_i \leq x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{als } x \geq 1, \end{cases}$$

waar $\alpha > 0$.

Definieer for $n \geq 1$

$$M_n \;=\; \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

(a) Bepaal de verdelingsfunctie van M_n.

(b) Laat zien dat $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n \Rightarrow Y$, waarbij Y een stochast is met verdelingsfunctie G gegeven door

$$G(x) \;=\; P(Y \leq x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

5. Laat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ onafhankelijke, identiek verdeelde stochasten zijn, met $E(X_i) = 0$ en $\sigma^2(X_i) = 1$. Zij

$$S_n \;=\; X_1 + \cdots + X_n \quad \text{en} \quad L_n \;=\; X_1^2 + \cdots + X_n^2, \qquad \text{voor } n \geq 1.$$

Laat zien dat

(a) $\frac{L_n}{n} \Rightarrow 1$, d.w.z.,

$$\lim_{n \to \infty} P(\frac{L_n}{n} \leq x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{als } x < 1, \\ 1 & \text{als } x > 1. \end{cases}$$

(b) $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow N$, waar N standaard verdeeld is.

(c) $\lim_{n \to \infty} P(S_n \geq 0) = \frac{1}{2}$.