Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Oefententamen 2 kansrekening 2007

1. Stel dat de simultane dichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}e^{-x/y}}{y} & \text{als } 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   (a) Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

   (b) Laat zien dat $f_{X|Y}(x|y)$, de conditionele dichtheid van X gegeven $Y = y$, gegeven wordt door

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}}{y} & \text{als } 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   (c) Laat zien dat $P(X > 1|Y = y) = e^{-1/y}$.

   (d) Bepaal $E(X)$.

2. Zij X een exponentieel verdeelde stochast met parameter α (d.w.z. X heeft dichtheid $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$ an 0 elders), en Y een exponentieel verdeelde stochast met parameter β. Veronderstel dat X en Y onafhankelijk zijn.

   (a) Laat zien dat $P(X > Y) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

   (b) Laat zien dat $Z = \min(X, Y)$ exponentieel verdeeld is met parameter $\alpha + \beta$.

   (c) Bepaal de dichtheid van $X + Y$.

3. Voor $n \geq 1$, laat X_n een stochast zijn met

$$P(X_n = i) = \frac{1}{n},\ i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

   Zij Y een uniform verdeelde stochast op $[0, 1)$.

   (a) laat zien dat $\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_n}{n} \leq y) = y$, voor $0 \leq y < 1$.

   (b) Bepaal $\phi_{X_n}(t)$, de karakteristieke functie van X_n.

   (c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} \phi_{\frac{X_n}{n}}(t)$, waarbij $\phi_{\frac{X_n}{n}}$ de karakteristieke functie van $\frac{X_n}{n}$ is.

4. Stel dat $X_1, X_2, X_3, \ldots$ een rij van onafhankelijke gelijk verdeelde stochasten is met $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = 1$ en $E(X_i^4) = 4$ voor $i \geq 1$. Laat $U_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

(a) Laat zien dat $\frac{U_n}{n} \Rightarrow 1$.

(b) Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{U_n - n}{\sqrt{3n}} \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx.$$

(c) Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} P(U_n \leq n) = \frac{1}{2}.$$

5. Stel dat Z een standaard normaal verdeelde stochast is, en laat $x \geq 0$ een vast gekozen getal zijn. Definieer de stochast X door

$$X = \begin{cases} Z & \text{als } Z > x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Laat dan zien dat

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

(b) Laat zien dat

$$E(XZ) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} + P(Z > x).$$

(c) Bepaal de verdelingsfunctie van X.