Oplossin tentamen Wat is Wiskunde A, 9 novermber 2005

2) Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende beweringen:

a) $(A \cup B) \cap C \subseteq (B \cap C) \cup A$

Bewijs: Zij $x \in (A \cup B) \cap C$. Dan geldt dat $x \in A \cup B$ en $x \in C$. Stel dat $x \in A$, dan geldt ook dat $x \in (B \cap C) \cup A$. Stel dat $x \in B$ dan geldt dat $x \in B \cap C$ en daarom ook dat $x \in (B \cap C) \cup A$. In ieder geval uit $x \in (A \cup B) \cap C$ volgt $x \in (B \cap C) \cup A$ dus geldt $(A \cup B) \cap C \subseteq (B \cap C) \cup A$.

b) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

Bewijs: zij $x \in (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$. Dat betekent dat x in tenminste een van de drie verzamelingen zit. Stel dat $x \in A - B$, dus $x \in A$ en $x \notin B$. Uit $x \in A$ volgt $x \in A \cup B \cup C$. Uit $x \notin B$ volgt $x \notin A \cap B \cap C$ dus geldt $x \in (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$. Op precies dezelfde manier volgt (omdaat alle beweringen symmetrisch zijn in A, B en C) dat als $x \in B - C$ of $x \in C - A$ dan geldt $x \in (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$. Daarmee volgt $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$.

3) Vind en bewijs met volledige inductie een formule voor de som van de eerste n oneven getallen (d.w.z. 1,1+3,1+3+5...), en laar zien dat hier altijd het kwadraat van een natuurlijk getal uitkomt.

Bewijs: We gaan bewijzen met volledige inductie dat voor elk $n \in \mathbb{N}$ geldt $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Inductiebasis: voor $n = 1$ op de linkerkant staat het getal 1 en op de rechterkant het getal $1^2 = 1$, dus het klopt. Inductiestap: We nemen aan dat de formule klopt voor n en gaan na of het voor $n + 1$ ook klopt. Voor $n + 1$ hebben we op de linkerkant:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n + 1) - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1)$$

Uit de inductiehypothese volgt dat de som van de eerste n getalen in de bovenstande regel gelijk is aan n^2. Het volgt dus dat:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1$$

Op de rechterkant van de vormule staat, voor $n+1$ gewoon, $(n+1)^2 = n^2+2n+1$. We zien dus dat bijde kanten gelijk zijn en daarmee is de inductiestap bewezen. Het volgt uit het principe van volledige inductie dat voor elk $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ gelijk is aan het kwadraat n^2.

4) Definieer de relaties R and S op $\mathbb{Z}$ als volgt: xRy als x+y deelbaar is door 3; xSy als x+y deelbaar is door 2.

a) Ga na of R een equivalentierelatie is, en zo ja, bepaal hoeveel equivalentieklasses er zijn.

Bewijs: We gaan na of R reflexief is. Zij $x \in \mathbb{Z}$. Het geldt dat xRx als $x + x = 2x$ een veelvoud van 3 is. Dat is duidelijk niet waar voor elk $x \in \mathbb{Z}$, bijvoorbeeld voor $x = 1$ is 3 geen deler van $1 + 1$. Daarom is R geen reflexieve relatie en dus ook geen equivalentierelatie.

b) Ga na of S een equivalentierelatie is, en zo ja, bepaal hoeveel equivalentieklasses er zijn.

Bewijs: We gaan na of S reflexief is, d.w.z. of voor elk $a \in \mathbb{Z}$ geldt aSa. Zij $a \in \mathbb{Z}$. $a + a = 2a$ is een veelvoud van 2, dus geldt aSa, en dus S is reflexief. Nu gaan we na of S symmetrisch is, d.w.z. dat voor elke $a, b \in \mathbb{Z}$ uit aSb volgt bSa. Zij $a, b \in \mathbb{Z}$ en stel dat aSb. Dat betekent dat 2 deelt $a+b$, maat dan deelt 2 ook $b+a$ en dus geldt bSa. Hiermee is bewezen dat S symmetrisch is. Tenslotte gaan we na of S transitief is, d.w.z. of voor elke $a, b, c \in \mathbb{Z}$ uit aSb en bSc volgt aSc. Zij $a, b, c \in \mathbb{Z}$ en stel dat aSb en bSc. Dat betekent dat 2 deelt $a+b$ en $b+c$. Het volgt dat 2 deelts de som $(a+b)+(b+c) = a+2b+c$. Omdaat $2b$ een veelvoud van 2 is, volgt dat $a+c$ ook een veelvoud van 2 is, dus aSc. We hebben dus bewezen dat S reflexief, symmetrisch en transitief is, dus een equivalentierelatie. Om de equivalentieklasses af te tellen proberen we eerst een paar equivalentieklasses te bepalen. De equivalentieklass van 1 is $[1] = \{a \in \mathbb{Z} | 1Sa\}$ en a is S gerelateerd aan 1 precies als $1 + a$ een veelvoud van 2 is. Dat gebeurt precies waneer a oneven is. We hebben dus dat $[1] = \{a \in \mathbb{Z} | \text{a is oneven}\}$. De equivalentieklass van 0 is $[0] = \{a \in \mathbb{Z} | aS0\}$ en a is S gerelateerd aan 0 precies als 2 een deler van $a + 0 = a$ is, dus waneer a even is. Dus $[0] = \{a \in \mathbb{Z} | \text{a is even}\}$. Duidelijk geldt dat $[0] \cup [1] = \mathbb{Z}$ en deze twee klasses zijn verschillende klasses. Dus hebben we alle 2 equivalentieklasses gevonden.

5) a) Bepaal getallen $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ zodat $13x_0 + 21y_0 = 1$.

Bewijs: We gaan de algorithm van Euclides toepassen.

$$21 = 1 \cdot 13 + 8$$

$$13 = 1 \cdot 8 + 5$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

Dat bewijst dat $ggd(13, 21) = 1$, en nu met de hulp van deze vergelijkingen gaan we x_0 en y_0 vinden:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2 \cdot (8 - 5) - 5 = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 =$$

$$= 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 8) = 5 \cdot 8 - 313 = 5(21 - 13) - 3 \cdot 13 = 5 \cdot 21 - 8 \cdot 13$$

dus $x_0 = -8$ en $y_0 = 5$. Even controleren of dat klopt $5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 105 - 104 = 1$.

b) Vind alle oplossingen $x, y \in \mathbb{Z}$ van de vergelijking $13x + 21y = 6$.

Bewijs: We gaan de volgende stelling toepassen: Een diophantische vergelijking $ax + by = c$ met $d = ggd(a, b) | c$ heeft oneindig veel oplossingen en als (x_0, y_0) een bepaalde oplossing is dan alle oplossingen zijn $\{(x_0 + \frac{b}{d}n, y_0 - \frac{a}{d}n) | n \in \mathbb{Z}\}$. Dus eerst moeten we een oplossing vinden. Omdaat

$$5 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 1$$

hebben we

$$30 \cdot 21 - 48 \cdot 13 = 6$$

dus de paar $(-48, 30)$ is een oplossing. We hebben al gezien dat $ggd(13, 21) = 1$, dus alle oplossingen zijn $\{(-48 + 21 \cdot n, 30 - 13 \cdot n) | n \in \mathbb{Z}\}$.

6) a, b en c zijn een stel Pytagoreische drietallen, d.w.z. natuurlijke getallen zodat $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Stel de grootste gemene deler van a en c is m. Laat zien dat m ook een deler is van b.

Bewijs: m deelt a en c dus m^2 deelt a^2 en c^2. m^2 deelt dus het verschil $c^2 - a^2 = b^2$. Dus m^2 deelt b^2. Zij p een priem deler van m. Dan geldt p deelt m^2 en dus ook dat p een deler is van b^2. Dat betekent dat p deelt b (dat volgt uit het lemma van Euclides). Uit de fundamentale stelling van rekenkunde is m als een product van priem getallen te schrijven. Elk van deze priem getallen deelt b dus is m (de product van deze priem getallen) ook een deler van b. Daarmeer is bewezen dat m een deler van b is.

In de rest van de som veronderstellen we dat a en c onderling priem zijn.

b) Laat zien dat c oneven is en dat van de getallen a en b een van beide oneven is en de andere even.

Stel, om een tegenspraak te bereiken, dat c even is. Uit dit volgt dat a oneven moet zijn, anders zouden a en c 2 als gemene deler hebben (in tegenspraak met $ggd(a, c) = 1$). In de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ op de rechterkant staat een even getaal (de kwadraat van en even getal is even), daarom is de linkerkant ook even. Maar a is oneven en dus ook a^2 dus moet b^2 ook oneven zijn (anders is b^2 even en c^2, als de som van en even en een oneven getal, oneven zou zijn), en dat betekent dat b oneven is. Schrijf $a = 2n + 1$ een $b = 2m + 1$, dan geldt $c^2 = a^2 + b^2 = 4 \cdot (n^2 + m^2 + n + m) + 2$ en dat is geen veelvoud van 4. Maar c is even dus 2 deelt c en daarom is c^2 een veelvoud van 4, tegenspraak. Dus c moet oneven zijn. Dan is c^2 ook oneven een daarom is de som $a^2 + b^2$ oneven. Uit dit volgt dat van de getallen a^2 en b^2 een van biede oneven is en de andere even. En omdaat voor elk $x \in \mathbb{Z}$ geldt dat a even is d.e.s.d.a. a^2 even is volgt dat van de getallen a en b een oneven is en de andere even.

c) We veronderstellen nu dat a het oneven getal is en b het even getal. Stel $p = \frac{c-a}{2}$ en $q = \frac{c+a}{2}$. Dan zijn p en q allebei gehele getallen. Bewijs dat p en q onderling priem (d.w.z. relatief priem) zijn.

Bewijs: Zij d een gemene positieve deler van p en q. Dan is d een deler van $p + q = c$ en ook van $q - p = a$. Dus d is een gemene deler van a en c, maar we hebben aangenomen dat a en c onderling priem zijn dus $d = 1$ en is de grootste gemene deler van p en q gelijk aan 1.

d) Toon nu aan dat p en q allebei kwadraten zijn van natuurlijke getallen m en n. Druk a, b, c uit in m en n. We hebben al gevonden dat $c = p + q$ en dat $a = q - p$. Uit $a^2 + b^2 = c^2$ volgt:

$$b^2 = c^2 - a^2 = (p + q)^2 - (q - p)^2 = p^2 + 2pq + q^2 - (q^2 - 2pq + p^2) = 4pq$$

dus $pq = (\frac{b}{2})^2$ is een kwadraat. We meken op dat een geheel getal een kwadraat is dan en slechts dan als het te schrijfen is als een product van verschilende priemgetalen waarin elke exponent even is. Schrijf $p = u_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot u_t^{e_t}$ en $q = v_1^{f_1} \cdot \cdots \cdot v_s^{f_s}$ als een product van verschilende priemgetalen. Omdat p en q onderlingpriem zijn volgt dat geen van de u_i gelijk is aan een met de v_j. Dan geldt

$$(\frac{b}{2})^2 = pq = u_1^{e_1} \cdot \dots \cdot u_t^{e_t} \cdot v_1^{f_1} \cdot \dots \cdot v_s^{f_s}$$

maar dit is een kwadraat dus elke exponent moet even zijn. Maar dan zijn p en q kwadraten. Zijn dus m, n zodat $p = m^2$ en $q = n^2$. Het volgt dat

$$b = 2\sqrt{pq} = 2mn$$

$$a = q - p = n^2 - m^2$$

$$c = p + q = m^2 + n^2$$

QED.