Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Hertentamen Wat is Wiskunde B, donderdag 26 februari 2004

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en studentnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je docent.
* Alle opgaven tellen even zwaar
* Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je eraan gekomen bent. Het gebruik van computer, dictaat, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.

1. Laat $g : A \to B$ en $f : B \to C$ functies zijn.
   (a) Stel dat $f \circ g : A \to C$ injectief is, laat dan zien dat $g : A \to B$ ook injectief is.
   (b) Stel dat $f \circ g : A \to C$ surjectief is, laat dan zien dat $f : B \to C$ surjectief is.
   (c) Geef een voorbeeld van verzamelingen A, B, C en functies $g : A \to B$ en $f : B \to C$ waarbij f en $f \circ g$ surjectief zijn, maar g niet surjectief is.
2. Zij $f : [0, 2\pi] \to R$ gedefinieerd door $f(x) = |\cos(x)|$. Laat $A = (\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B = [\frac{\pi}{2}, \pi]$ en $C = \{\frac{1}{2}\}$
   (a) Bepaal $f\left(f^{-1}(A)\right)$.
   (b) Bepaal $f^{-1}\left(f(B)\right)$.
   (c) Bepaal $f^{-1}(C)$.
3. Zij $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de machtsverzameling van $\mathbb{N}$, en $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A\}$.
   (a) Laat zien dat de functie $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}$ gegeven door $f(A) = \{2n : n \in A\} \cup \{1\}$ injectief is.
   (b) Laat zien dat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en $\mathcal{A}$ dezelfde kardinaliteit hebben.
4. Zij $\circ$ een operatie op $\mathbb{R}$ gedefinieerd door $a \circ b = ab + a + b$.
   (a) Laat zien dat $\circ$ associatief en commutatief is.
   (b) Bepaal de identiteitselement van $\circ$, d.w.z. bepaal een $e \in \mathbb{R}$ zodanig dat $a \circ e = e \circ a = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
   (c) Is $(\mathbb{R}, \circ)$ een groep? Motiveer je antwoord.

5. De functie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{als } x \neq 1 \\ 3 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

(a) Bewijs dat f een limiet heeft in $x = 1$, en bereken deze limiet.

(b) Definieer voor $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{n+1}{n}$ en $y_n = \dfrac{a_n - 1}{\sqrt{a_n} - 1}$. Laat zien dat de rij (y_n) convergent is, en bepaal de limiet.

6. (a) Zij (x_n) een rij in $\mathbb{R}$, en laat $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Stel dat de verzameling A twee verdichtingspunten heeft x, y met $x \neq y$. Laat zien dat de rij (x_n) **niet** convergent is.

(b) Zij $a_1 = 1$, en $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$ voor $n \geq 2$. Laat zien dat de rij (a_n) convergent is, en bepaal de limiet.