6.2 Lay 6.7

- Ongelijkheid Cauchy-Schwarz
- drie hoeks ongelijkheid.
- orthogonale vectoren / orthonormale vectoren.
- orthogonale Projecties
- Gram-Schmidt

1

I Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.

We hebben tot nu toe beweerd dat

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

maar dit kan alleen maar als.
$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$.

Stelling $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ inproduct ruimte dan (1) geldt voor alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \quad \text{Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz}$$

(2) $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$ d.e.s.d.a $\vec{v}$ en $\vec{w}$ lineair afhankelijk.

Bewijs: (1): Stel $\vec{v} = \vec{0}$ dan voldoet de ongelijkheid
Dus Neem vanaf nu aan dat $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$.
Dan $\langle \vec{v} + \lambda\vec{w}, v + \lambda\vec{w} \rangle \geq 0$.

$$\langle \vec{v} + \lambda\vec{w}, v + \lambda\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2\lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \lambda^2 \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = P(\lambda)$$

Dit is een parabool aangezien deze altijd groter of gelijk ~~dan~~ nul zijn dus. discriminant $D =$

$$(2\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle)^2 - 4\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \langle \vec{w}, \vec{w}\rangle \leq 0.$$

dus. $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$. en ook.

$$|\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

(2) Gelijkheid treedt op als.

$P(\lambda) = 0$ een unieke oplossing heeft.

dit is dan. $\lambda_0 = -\dfrac{2\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}{2\langle \vec{w}, \vec{w}\rangle}$.

Maar dan is $\langle \vec{v} + \lambda_0 \vec{w}, v + \lambda_0 \vec{w}\rangle = 0$

dus $\vec{v} + \lambda_0 \vec{w} = 0$ dus $\vec{v}, \vec{w}$ afh. ∎

II Driehoeksongelijkheid

Gevolg (Driehoeksongelijkheid)

$(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ inproduct ruimte dan geldt

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|w\|$$

Bewijs: $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \langle \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\rangle$

$$= \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{w}, \vec{w}\rangle$$

$$\leq \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| + \|w\|^2$$

$$= (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$$ ∎

III orthogonale vectoren

Def $(\mathbb{R}, V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ of $(\mathbb{C}, V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

dan heten twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ orthogonaal als $\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$.

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx =$

(Eerder gezien $\cos nx$, $\cos mx$ orthogonaal als $n \neq m$.

vb $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ orthogonaal. maar ook $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

Stelling $(\mathbb{R}, V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ en $\alpha = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ een deelverzameling van V bestaande uit vectoren die onderling ~~loodrecht~~ twee aan twee loodrecht (aanname $\vec{v}_i \neq \vec{0}$). dan is α lineaire onafhankelijk.

Bewijs: Stel $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$

dan is $\langle\vec{v}_j, \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k\rangle = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle\vec{v}_j, \vec{v}_i\rangle = \lambda_j \underbrace{\langle\vec{v}_j, \vec{v}_j\rangle}_{\neq 0} \Rightarrow \lambda_j = 0$$

Dit geldt voor elke $j = 1, 2, \ldots, k$.

Dus $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ lineair onafhankelijk. □

We noemen $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ een orthogonaal stelsel..

IV orthogonaal $\rightarrow$ orthonormaal.

Stel $\vec{v}_1, \dots \vec{v}_k$ orthogonaal, dan kunnen we orthonormaliseren

dwz. $\vec{w}_i = \dfrac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}$ dan $\langle \vec{w}_i, \vec{w}_i \rangle = 1$

Zo'n stelsel noemen we orthonormaal

dwz

Def $\vec{w}_1, \dots \vec{w}_k$ heet orthonormaal als $\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle = \delta_{ij}$.

Laat $\beta = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ een orthonormale basis van $(\mathbb{R}, V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

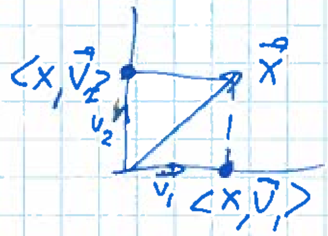
Dan kunnen we elke vector schrijven als

$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i$ dan is

$\langle \vec{v}_j, \vec{x} \rangle = \langle v_j, \sum_i x_i \vec{v}_i \rangle = \sum x_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = x_j$.

Dus

$$\boxed{\vec{x} = \sum \langle \vec{x}, \vec{v}_j \rangle \vec{v}_j .}$$



~~Dus $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_j \langle \vec{x}, \vec{v}_j \rangle \vec{v}_j$~~

Laat nu ook $\vec{y} = \sum_i y_i \vec{v}_i$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \sum_i x_i \vec{v}_i, \sum y_j \vec{v}_j \rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$

$= \sum_i x_i y_i$

Dus $\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$. als $\{\vec{v}_i\}$ stelsel orthonormale vector.

V Orthogonale projecties

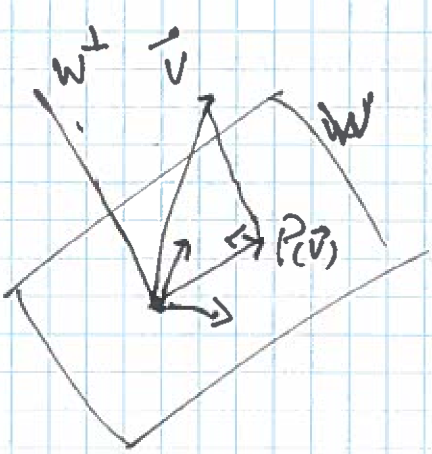
$(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ inproduct ruimte.

Laat W een lineaire deelruimte zijn van. V met orthonormale basis $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$

dan is

$$P(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{w}_k \rangle w_k$$

de loodrechte projectie van $\vec{v}$ op W.



$$\vec{v} = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{P(\vec{v})} + \underset{\substack{\Uparrow \\ W^\perp}}{(\vec{v} - P(\vec{v}))}$$

$$\langle \vec{v} - P(\vec{v}), \vec{w}_i \rangle =$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w}_i \rangle - \langle v, \vec{w}_1 \rangle \langle w_1, \vec{w}_i \rangle \cdots - \langle v, \vec{w}_k \rangle \langle w_k, w_i \rangle$$

$$= \langle v, \vec{w}_i \rangle - \langle v, w_i \rangle$$ omdat $\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle = \delta_{ij}$.

$$= \vec{0}.$$

Stelling

$\boxed{V = W \oplus W^\perp}$. ! Zonder bewijs lees zelf na !!

Vb $\mathbb{R}^3$ $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x+y+z=0$

orthogonale basis $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

maak orthonormaal

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$\vec{u}_1$ $\quad$ $\vec{u}_2$

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\rangle \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt2} - \frac{z}{\sqrt2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\0\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} + \left(\frac{x}{\sqrt6} - \frac{2y}{\sqrt6} + \frac{z}{\sqrt6}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{-2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{x-z}{2} + \frac{x-2y+z}{6}\\ 0 + \frac{-2x+4y-2z}{6}\\ \frac{x-z}{2} + \frac{x-2y+z}{6}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4x-2y-2z\\-2x+4y-2z\\-2x-2y+4z\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}4 & -2 & -2\\-2 & 4 & -2\\-2 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

VI Gram - Schmidt proces.

We willen uit een basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ een orthonormale basis construeren.!

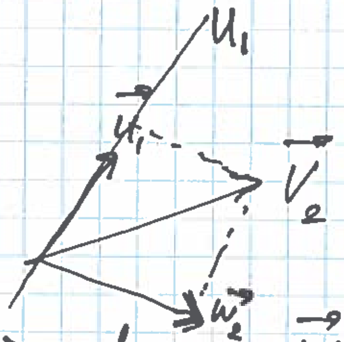
Idee achter proces is P_W loodrechte projectie op W dan voor $\vec{v} \notin W$ geldt.

$$\boxed{\vec{v} - P_W(\vec{v}) \perp W.}$$

Algoritme:

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_k\}$ basis. $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$$



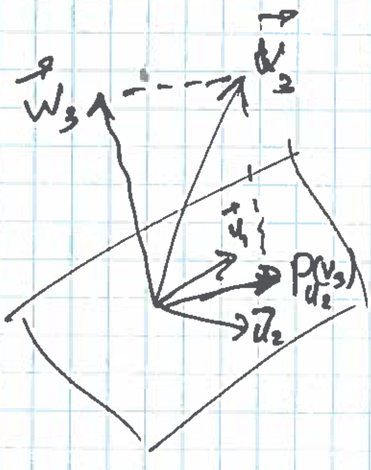
laat $U_1 = \langle \vec{u}_1 \rangle$ dan. $\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - P_{U_1}(\vec{v}_2)$.

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}$$

laat $U_2 = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$.

dan. $\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - P_{U_2}(\vec{v}_3)$.

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}.$$



etc etc.

Vb

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \boxed{\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}.}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \langle \vec{v}_2, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\+1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\text{[illegible]}}{3} \begin{pmatrix}1\\+1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{\text{[illegible]}}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 - \langle \vec{v}_3, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 .$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} - 0 \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{u}_3 = \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}.}$$