§ 6.3 (deel) + § 6.4 deel. ①

- Nogmaals Gram-Schmidt.
- Orthogonale polynomen
- Symmetrische matrices.
- $A = A^T$ dan A heeft orthonormale basis van eigenvectoren.

I Gram Schmidt nogmaals

(niet in boek).

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ basis van W. Vind orthonormale basis.

<u>Idee</u>

$$\begin{array}{ccccccccc} U_1 & \subsetneq & U_2 & \subsetneq & U_3 & \subsetneq & \cdots & \subsetneq & U_k = W. \\ \| & & \| & & \| & & & & \\ \langle \vec{v}_1 \rangle & & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle & & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle & & & & \\ \langle \vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \rangle & & \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle & & \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle & & & & \end{array}$$

$\{\vec{u}_i\}$ orthonormaal.

Stel $\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_\ell$ orthonormale basis van U_ℓ dan.

$$\vec{w}_{\ell+1} = \vec{v}_{\ell+1} - P_{U_\ell}(\vec{v}_{\ell+1})$$

$$= \vec{v}_{\ell+1} - \sum_{j=0}^{\ell} \langle \vec{v}_{\ell+1}, \vec{u}_j \rangle \vec{u}_j$$

$$= \vec{v}_{\ell+1} - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\langle \vec{v}_{\ell+1}, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_\ell, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_\ell$$

$$\vec{u}_{\ell+1} = \frac{\vec{w}_{\ell+1}}{\|\vec{w}_{\ell+1}\|}$$

<u>Stelling</u> $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = \begin{vmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & \vec{v}_1 \\ \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle & \vec{v}_2 \end{vmatrix}$, ...

$$\vec{w}_\ell = \begin{vmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_{\ell-1} \rangle & \vec{v}_1 \\ \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle & & \langle \vec{v}_2, \vec{v}_{\ell-1} \rangle & \vec{v}_2 \\ \vdots & & & \\ \langle \vec{v}_\ell, \vec{v}_1 \rangle & & \langle \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell-1} \rangle & \vec{v}_\ell \end{vmatrix}$$

is een orthogonale basis van W

Bewijs

Merk op: $\vec{w}_\ell \in \langle \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_\ell \rangle$.

Verder is $\vec{w}_\ell \perp \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{\ell-1}$ ~~bewijs~~

immers

$$\langle \vec{w}_\ell, \vec{v}_j \rangle = \left\langle \begin{vmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_{\ell-1} \rangle & \vec{v}_1 \\ & & & \\ \langle \vec{v}_\ell, \vec{v}_1 \rangle & & \langle \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell-1} \rangle & \vec{v}_\ell \end{vmatrix}, \vec{v}_j \right\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_{\ell-1} \rangle & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle \\ & & & \\ \langle \vec{v}_\ell, \vec{v}_1 \rangle & & \langle \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell-1} \rangle & \langle \vec{v}_\ell, \vec{v}_j \rangle \end{vmatrix}$$

$= 0$ omdat kolom j en laatste kolom hetzelfde zijn.

$\square$

Vb $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle = 3$ $\quad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 1$

$\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle = 3$ $\quad \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = 3$

$\langle \vec{v}_3, \vec{v}_3 \rangle = 6$ $\quad \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 1$

$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{w}_2 = \begin{vmatrix} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle & \vec{v}_1 \\ \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle & \vec{v}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \vec{v}_1 \\ 1 & \vec{v}_2 \end{vmatrix}$

$= 3\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1 = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{w}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \vec{v}_1 \\ 1 & 3 & \vec{v}_2 \\ 3 & 1 & v_3 \end{vmatrix} = -8\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 8\vec{v}_3$$

$$= 8(-\vec{v}_1 + \vec{v}_3)$$

$$= 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

~~IV Symmetrische matrices~~

II Orthogonale polynomen

Geval van bovenstaande stelling:

Merk op dat $1, x, x^2, \dots, x^n \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

Hierop kun je Gram-Schmidt uitvoeren.

Bovenstaande stelling zegt dat als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct is op $\mathbb{R}[x]$ dan.

$$p_0(x) = 1 \qquad p_1(x) = \begin{vmatrix} \langle 1,1 \rangle & 1 \\ \langle x,1 \rangle & x \end{vmatrix}$$

$$p_2(x) = \begin{vmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,x \rangle & 1 \\ \langle 1,x \rangle & \langle x,x \rangle & x \\ \langle 1,x^2 \rangle & \langle x,x^2 \rangle & x^2 \end{vmatrix} \quad \text{etc}$$

orthogonale polynomen dwz $\langle p_i(x), p_j(x) \rangle = 0$ voor $i \neq j$

Vb legendre polynomen

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \quad \text{werk op}$$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \qquad \int_{-1}^{1} x\,dx = 0 \qquad \int_{-1}^{1} x^n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{als } n \text{ even} \\ 0 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

$$p_0 = 1 \qquad p_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 2x \qquad p_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & x \\ \frac{2}{3} & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9} = \frac{4}{3}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$p_4 = c\,(5x^3 - 3x) \qquad \text{etc.}$$

Symmetrische matrices

Vb $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ eigenvect. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\perp$

We bekijken $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot, \bullet)$ standaard inproduct

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \sum_i x_i y_i = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Laat A een symmetrische matrix zijn, dan willen we de volgende belangrijke stelling bewijzen.

<u>Stelling</u> $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot)$ standaard inproduct ruimte. $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding $X \mapsto A \cdot X$. Als A symmetrisch, dan bestaat er een orthonormale basis van eigenvectoren.

We zullen deze stelling in een paar stappen bewijzen.

<u>Stap 1</u> In plaats van ~~het~~ het inproduct nodig te zien behelpen we de ~~bool~~ alles in $\mathbb{C}^n$ werk op $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$. en op $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \cdot)$ hebben we het standaard hermitische product $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum \bar{x}_i y_i = (\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

~~Dus~~ Over $\mathbb{C}$ ontbindt $\varphi_A(x) = \det(A - x\mathbb{I}_n)$ ~~Bewijs~~ in factoren $(x - \lambda_i)^{m_i}$.

Laat $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ een eigen vector dus.

$$\vec{x} \cdot A\vec{x} = \bar{\vec{x}}^T A \vec{x} = \bar{\vec{x}}^T \bar{A}^T \vec{x} = \overline{A\vec{x}}^T \vec{x} = A\vec{x} \cdot \vec{x} = (\lambda \vec{x}) \cdot \vec{x} = \bar{\lambda}\, \vec{x} \cdot \vec{x}$$

$$\vec{x} \cdot A\vec{x} = \vec{x} \cdot \lambda \vec{x} = \lambda\, \vec{x} \cdot \vec{x}$$

Dus $\lambda = \bar{\lambda}$ dus $\lambda \in \mathbb{R}$

gevolg het karakteristiek polynoom ontbind over $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{Vanaf nu weer gewoon inproduct}}$

Stap 2 laat $\vec{x}$ eigenvector bij eigenw λ
$\vec{y}$ " " " μ

dus $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ als $\lambda \neq \mu$.

Bewijs. ~~$\vec{x} \cdot A\vec{y} = \langle \vec{x}, \mu \vec{y} \rangle = \mu\, x \cdot$~~

$$\mu \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x}^T A \vec{y} = \vec{x}^T A^T \vec{y} =$$

$$(A\vec{x})^T \cdot \vec{y} = \lambda \vec{x}^T \cdot \vec{y}$$

dus $(\mu - \lambda)(\vec{x}^T \cdot \vec{y}) = 0$.

dus $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. ofwel $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Stap 3 (moeilijkste)

$d(\lambda) = m(\lambda)$

Bewijs: We weten $\mathbb{R} = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$

laat $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_{d(\lambda)}$ basis van $E(\lambda)$ (met Gram-Schmidt kunnen we aannemen dat dit een orthonormale basis is

~~Breidt dit uit met een basis van~~

~~$E_\lambda^\perp$~~ Merk op $A E_\lambda \subseteq E_\lambda$ maar ook

$$A E_\lambda^\perp \subseteq E_\lambda^\perp$$

immers als $\vec{y} \in E_\lambda^\perp$ en $\vec{x} \in E_\lambda$

dan $\vec{x} \cdot A\vec{y} = x^T A \vec{y} = x^T A^T \vec{y}$

$$= (A\vec{x})^T y = A\vec{x} \cdot \vec{y} = \lambda \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$= 0.$$

Dus $A\vec{y} \perp E_\lambda$ en dus $A\vec{y} \in E_\lambda^\perp$

Laat $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{d(\lambda)}$ basis van E_λ breid die uit met een basis van $E_\lambda^\perp$ $\vec{u}_{d+1} \dots \vec{u}_n$

Dan t.o.v. deze basis heeft de matrix de vorm

$$\cancel{\lambda I_d} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ \hline & & & B \end{array}\right)$$

~~λ is nu geen.~~

$\cancel{\varphi_A(x) = \pm(x-\lambda)^d \varphi_B}$

$$\varphi_A(x) = (\lambda - x)^d \varphi_B(x).$$

We tonen nu aan dat λ geen eigenwaarde van B. Stel λ heeft wel een eigenwaarde B dan heeft B een eigenvector $\vec{w}$ zodat $B\vec{w} = \lambda\vec{w}$ maar dan is

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vec{w} \end{pmatrix}$ een eigenvector van A. die in $E_\lambda^\perp$ zit.

maar ook in E_λ moet zitten.

gevolg $\vec{w} = \vec{0}$ ↯ $\square$

Geef eventueel een Vb.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$