deel 6.4. en 6.5

Herh symm matrices.

- Hermitische matrices.
- Orthogonale "
- eigenschappen
- Unitaire matrices.
  groepen.!

I Herhaling. Symmetrische matrices.

Stelling $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A = A^T$ dan bestaat er een basis β van orthonormale eigenvectoren. zodat

$$A^{\beta}_{\beta} = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

waarbij de kolommen van ~~A~~ S ~~bestaan~~ ~~uit~~ een orthonormale basis vormen van $\mathbb{R}^n$.

Vb

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$ eigenwaarden $\overset{a-1}{+3}$ en $\overset{a+1}{+1}$

$\lambda = a+1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = a-1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} A S = S^T A S = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

II Hermitische matrices.

Stelling Zelfde stelling als boven maar nu voor $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ met $A = \overline{A}^T$ en $\lambda_i \in \mathbb{R}$ geldt nog steeds!

III Orthogonale matrices

Kijk waar de Stelling in Symm matrices

Def $V = (\mathbb{R}^n)$ Een $n\times n$-matrix heet orthogonaal als de kolommen van A een orthonormaal stelsel vectoren vormt.

Stelling $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ~~orthogonaal dan is~~

De volgende beweringen zijn equivalent

(1) A orthogonaal

(2) $A^T A = I_n$.

(3) $A^{-1} = A^T$

(4) $A A^T = I_n$ ~~rijen vo~~

(5) rijen vormen orthonormaal stelsel

Gevolg **Stelling** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $A = A^T \Leftrightarrow$ ~~dan~~ er bestaat een orthogonale matrix S zodat

$$S^{-1} A S = S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bewijs $\Rightarrow$ al gezien

$\Leftarrow$

$$A = S D S^T$$

$$A^T = (S D S^T)^T = S^{TT} D^T S^T$$

$$= S D S^T. \quad \text{dus } A = A^T$$

$\square$

IV Eigenschappen orthogonale matrices.

Vb $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ← det $= 1$ ~~eigenwaarde~~

Algemeen det $= \pm 1$.

Immers kolommen $\perp$ op elkaar lengte $= 1$

det $= \pm$ Volume opgespannen door kolom of rij vectoren !

Stelling $A \in \mathbb{R}^n$ A orthogonaal

(1) det $A = \pm 1$

(2) Spec$(A) \subseteq \{-1, 1\}$.

Bewijs v eigenvector van A.

$$\langle A\vec{v}, A\vec{v} \rangle = v^T A^T A v = v^T v = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$$

$$\langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle.$$

Gevolg $\lambda^2 = 1$ dus $\lambda = \pm 1$.

- Bovenstaande voorbeeld heeft geen reële eigenvectoren !

<u>Stelling</u> $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonaal $V = \mathbb{R}^n$

lengtes veranderen niet

dan geldt (1) $\|A\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ (2) $\cancel{A}\,A\vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w}$

hoeken veranderen niet

(2) $d(A\vec{v}, A\vec{w}) = d(\vec{v}, \vec{w})$

$\|A\vec{v} - A\vec{w}\| = \|\vec{v} - \vec{w}\|$.

afstanden veranderen niet.

(3) ~~A is een L_A~~

$L_A \; V \to U \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}$

L_A is een isomorfisme (A inverteerbaar)

(4) Als $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ orthonormale basis van ~~A~~ $\mathbb{R}^n$ dan $A\vec{u}_1, \ldots A\vec{u}_n$ orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$.

<u>Bewijs</u> (2) volgt uit (1) omdat

$A(\vec{v} - \vec{w}) = A\vec{v} - A\vec{w}$

~~(4) $\langle A\vec{x}, A\vec{y}$~~

$$A\vec{x} \cdot A\vec{y}$$
$$\|$$

(1) en (4) Merk op $\langle A\vec{x}, A\vec{y} \rangle = (A\vec{x})^T A\vec{y}$.

$= \vec{x}^T \underbrace{A^T A}_{I_n} \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Hieruit volgt (1) en (4).

(3) NB A heeft eigenw ± 1 dus geen eigenw 0 merk op $N(A) = E_0 = \{0\}$.
Dus A is inverteerbaar.

V Unitaire matrices.

A hermitisch $A = S^{-1} \Lambda S$.
met ~~S een orthon~~ kolommen in
S een orthonormaal stelsel
maw $\bar{S}^T S = \mathbb{I}_n$. ofwel $\bar{S}^T \Lambda S = A$.
Zo'n matrix noemen we niet orthogonaal
maar Unitair.

Stelling $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ dan zijn equivalent.
① S is Unitair. dwz
② $\bar{S}^T S = \mathbb{I}_n$.
③ $\bar{S}^T = S^{-1}$
$S \bar{S}^T = \mathbb{I}_n$.
rijen zijn orthonormaal.

Stelling A unitair dan
① $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$ $A\vec{x} \cdot A\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}$
② $d(A\vec{x}, A\vec{y}) = d(\vec{x}, \vec{y})$
③ $\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n$ orthonormale basis.
$A\vec{u}_1 \quad A\vec{u}_n$ opnieuw orthonormale basis.
④ $|\det A| = 1$

VI Groepen

$O_n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = I_n\}$ Orthogonale groep

$SO_n = \{A \in O_n \mid \det A = 1\}$ speciale

$U_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \bar{A}^T A = I_n\}$ unitaire

$SU_n = \{A \in U_n \mid \det A = 1\}$ speciale

Bovenstaande verzamelingen zijn groepen

① $A, B \in O_n$ dan $(AB)^T AB = B^T A^T A B$
$= I_n$.

dus $AB \in O_n$. ② $I_n \in O_n$

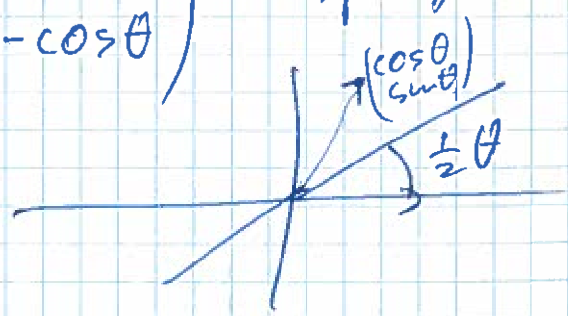
③ $A^T = A^{-1}$ dus $A^{TT} \cdot A^T = A A^T = I_n$.

dus $A^{-1} \in O_n$.

Associativiteit volgt uit Matrix verm

O_2 : $\underset{\det 1}{\leftarrow} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ rotatie over

$\underset{-1}{\det} \leftarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ spiegel lijn



Meer is er niet!