Opdracht 6.8 (blz 259)

$\bar{x}\cdot\bar{y} = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_2y_2$

Eigenschappen van inproduct (blz 254)

(1) $(\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y})\cdot\bar{z}$

$= 3(\lambda_1x_1+\lambda_2y_1)z_1 - 2(\lambda_1x_1+\lambda_2y_1)z_2$

$\quad -2(\lambda_1x_2+\lambda_2y_2)z_1 + 2(\lambda_1x_2+\lambda_2y_2)y_2$

$= \lambda_1(3x_1z_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 2x_2z_2)$

$\quad + \lambda_2(3y_1z_1 - 2y_1z_2 - 2y_2z_1 + 2y_2z_2)$

✓

(2) optelle en vermenigvuldige is commutatief.

$\Rightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$ ✓

(3) $\bar{x}\cdot\bar{x} = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$

$= 2(x_1-x_2)^2 + x_1^2$

Dus is het altijd groter of gelijk aan 0 ✓

(4) Met behulp van de abc-formule ~~op~~ zien we dat $3x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2=0$ als oplossing $x_1=x_2=0$ heeft en andere die complex. ✓

Conclusie: de afbeelding is een inproduct.

$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ voldoet aan (1) (2) met dezelfde beredenering als hierboven.

$\langle\bar{x},\bar{x}\rangle_2 = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2$

$\Rightarrow \langle\binom{1}{1},\binom{1}{1}\rangle_2 = 1 + 2\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 1 = -1$ ×

$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ is dus geen inproduct.

Oefening 1

$\langle \cdot , \cdot \rangle : (A, B) \mapsto T_r(A^T B)$

$\text{Dim}(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4 < \infty$

(1) $T_r\left[(\lambda A + \mu B)^T C\right]$

$= T_r\left[\lambda A^T C + \mu B^T C\right]$

$= \lambda T_r(A^T C) + \mu T_r(B^T C)$ ✓

(2) $\langle A, B\rangle = T_r(A^T B) = T_r((A^T B)^T) = T_r(B^T A) = \langle B, A\rangle$ ✓

(3) $\langle A, A\rangle = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2$ dit is ≥ 0 voor alle A

(4) $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 = 0$

enige reële oplossing is $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21} = 0$ ✓

Conclusie: $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ is een Euclidische ruimte

$\|A_1\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$

$\|A_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\|A_3\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

$\|A_4\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$\|A_1 - A_2\| = \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$

De rest gaat net zo.

In het algemeen

$\|A - B\| = \sqrt{(a_{11} - b_{11})^2 + (a_{12} - b_{12})^2 + (a_{21} - b_{21})^2 + (a_{22} - b_{22})^2}$

Hoek tussen A_1 en A_2

$\langle A_1, A_2\rangle = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 0 = 2$

$\|A_1\| \cdot \|A_2\| = 1 \cdot \sqrt{5}$

$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

De rest gaat op dezelfde manier

Oefening 2

$\dim(\mathbb{R}[x]_{\leq n}) = n+1 < \infty$

(1)

$\langle \lambda f(x) + \mu g(x), h(x) \rangle$

$= \int_{-1}^{1} (\lambda f(x) + \mu g(x)) h(x)\, dx$

$= \lambda \int_{-1}^{1} f(x) h(x)\, dx + \mu \int_{-1}^{1} g(x) h(x)\, dx$

$= \lambda \langle f(x), h(x) \rangle + \mu \langle g(x), h(x) \rangle$. ✓

(2) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx = \int_{-1}^{1} g(x) f(x)\, dx$

$= \langle g, f \rangle$ ✓

(3) $\langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx$

$f(x)^2$ is altijd positief dus de oppervlakte onder $f(x)^2$ is altijd groter dan of gelijk aan 0. ✓

(4) $\langle f, f \rangle$ is de oppervlakte onder $f(x)^2$ die is alleen 0 alsf als $f(x)^2 = 0$ voor alle waarden tussen -1 en 1. Dus dan moet moeten alle coëfficiënten 0 zijn. Met andere woorden. $f(x) = 0$. ✓

Conclusie het is een Euclidische ruimte.

$\|p_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 + 2x + 1\, dx} = \sqrt{2 \int_0^1 x^2 + 2x + 1\, dx} = \sqrt{2\left(\frac{1}{3} + 1 + 1\right)} = \sqrt{4\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\|p_2\| = \sqrt{2 \int_0^1 x^4 + 2x^2 + 1\, dx} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{28}{15}} = \sqrt{\frac{56}{15}}$

Afstand

$\|p_1 - p_2\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (x - x^2)^2\, dx} = \sqrt{2} \sqrt{\int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2\, dx}$

$= \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{15}}$

De rest is net zo gewoon invullen.

Oefening 4

$\langle \vec{x}, (1,2,0) \rangle = x_1 + 2x_2 = 0$

$\langle \vec{x}, (1,0,1) \rangle = x_1 + x_3 = 0$

In Matrix form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_3 = 2x_2$ en $-x_1 = 2x_2$

$\Rightarrow \langle (-1, 2, 1) \rangle$ spant alle vectoren ~~die~~ op die allemaal loodrecht op $(1,2,0)$ en $(1,0,1)$ staan.

(Je kan hier ook het uitwendig product gebruiken.
$(1,2,0) \times (1,0,1)$)