18^e keer § 5.5 5.6.2 en 5.8

- Diagonalisatie over $\mathbb{C}$
- e-macht matrix
- Markov ketens
- Google page-ranking

I Diagonalisatie over $\mathbb{C}$.

Laat $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

dan. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2+1 = 0$

dus $(\lambda-1)^2 = -1 \qquad \lambda = 1 \pm i = \sqrt{2}\, e^{\pm\frac{\pi}{4} i}$

eigenvectoren:

$\underline{1+i}$: $\begin{pmatrix} 1-(1+i) & -1 \\ 1 & 1-(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

$\underline{1-i}$: $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Dus. laat $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ dan.

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4} i} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\pi}{4} i} \end{pmatrix}$$

Dus $A^{100} = (P D P^{-1})^{100}$

$$= P D^{100} P^{-1}$$

$$= P\left(\sqrt{2}\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{4}i} & \\ & e^{-\frac{\pi}{4}i}\end{pmatrix}\right)^{100} P^{-1}$$

$$= 2^{50} P \begin{pmatrix} e^{25\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-25\pi i}\end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= 2^{50} P \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= -2^{50} P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= -2^{50} P P^{-1}$$

$$= -2^{50} \mathbb{I}_2$$

$$= \begin{pmatrix} -2^{50} & 0 \\ 0 & -2^{50} \end{pmatrix}.$$

NB $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \frac{1}{1 \cdot i - -i \cdot 1}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(-i)\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Wat is de e-macht van deze matrix A? ③

$$A = P \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{A} = P\, e^{\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}}\, P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= e^{1}\, P \begin{pmatrix} e^{i} & 0 \\ 0 & e^{-i} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= e\, P \begin{pmatrix} \cos(1) + i\sin(1) & 0 \\ 0 & \cos(1) - i\sin(1) \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= e \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) + i\sin(1) & 0 \\ 0 & \cos(1) - i\sin(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$= e \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$$

Vb2 Markov ketens

Stochastisch proces.

Def. Matrix alle coefficiente ≥ 0 en

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad \text{som kollommen} = 1$$

Noemen we een stochastische Matrix

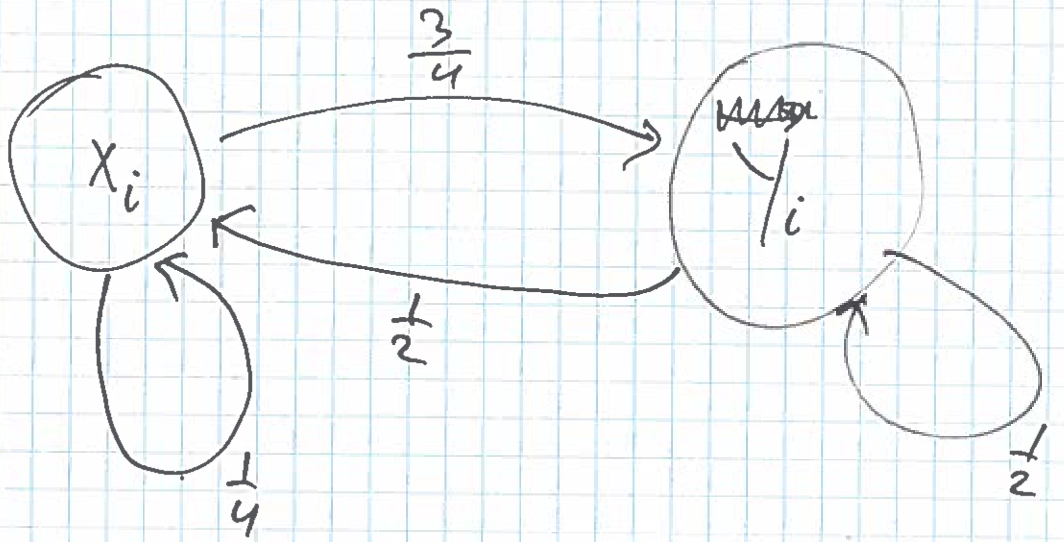
- Een vector $\vec{x}$ met $\sum x_i = 1$ en alle $x_i \geq 0$ noemen we een kansvector.

Stel we beginnen met een kansvector $\vec{X}_0$ en een stochastische matrix M dan.

$$\vec{X}_1 = M\vec{X}_0 \qquad \vec{X}_2 = M\vec{X}_1 = M^2\vec{X}_0 \quad \text{etc}$$

noemen we een Markov keten

Vb $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\vec{X}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$



$$0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+\tfrac{1}{4})$$

$$\lambda = +1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -\tfrac{1}{4} \;\text{——}\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_n = M^n \vec{X}_0 = \frac{1}{5} M^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}(+1)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\cancel{n\ \text{lange}}\ \ n\ \text{groot}]{} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Spel

5 personen

1 persoon op plaats x

4 personen op plaats y

in x ligt een tetra-dobbelsteen 4 keer 3 vertrekken 1 blijven.

in y liggen tetradobbelsteen 2 blijven 2 vertrekken

Hoe zal de verdeling uiteindelijk zijn?

Vb3 Google (Markov process!)

Gebaseerd op stelling Perron Frobenius.

die zoiets zegt als dat er een eigenvector is bij maximale eigenw ($\lambda = 1$) alle andere $|\lambda| < 1$ zodat. $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ met $\vec{v}_i \geq 0$

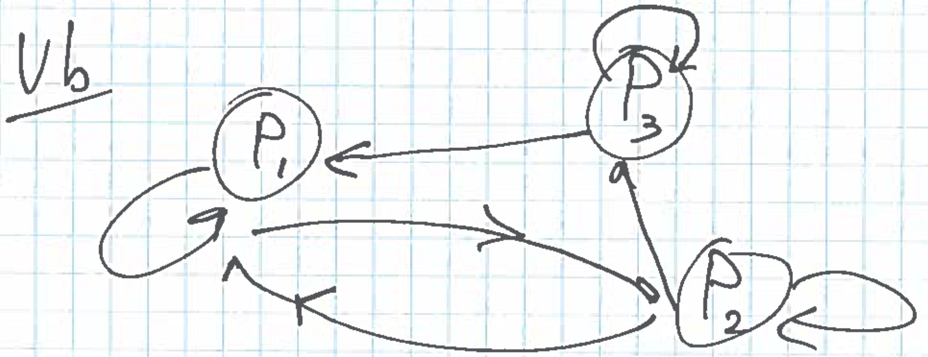
$$A^k(\mu_1 \vec{v}_1 - - - \mu_n \vec{v}_n) = - - - -$$

maximale eigenvector

$$\Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{gaat naar } 0}\Big) + \mu_n \vec{v}_n$$

Hoe werkt Google page ranking

Vb



$N_1 = 2$

$N_2 = 3$

$N_3 = 2$.

P_j zijn web pagina.

P_j heeft l_j links.

$R(P_i)$ ranking
zoeken hoogste ranking

Als zo'n link naar pagina P_i wijst dan krijgt die pagina een bijdrage $\frac{R(P_j)}{N_j}$ aan gewicht van webpagina P_j

Vraag

Def. $\mathcal{R}(P_i) = \sum_{P_j} \frac{\mathcal{R}(P_j)}{\ell_j}$ Def.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{R}(P_1) \\ \mathcal{R}(P_2) \\ \mathcal{R}(P_3) \end{pmatrix}}_{= I(P)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}(P_1) \\ \mathcal{R}(P_2) \\ \mathcal{R}(P_3) \end{pmatrix}$$

dus $I(P)$ is een eigenvector bij eigenw 1

$\mathcal{R}(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{R}(P_1)$ is het grootst

Google berekent niet eigenvector maar laat matrix een aantal keren werken op vector

$\longrightarrow$ ~~eigen~~ eigenvector toe