Uitwerkingen tentamen Lin Algebra (1)
29-01-2010

Opg 1 (a) We kunnen de U van de LU-decompositie bepalen door de matrix naar driehoeksgedaante (bijna Rij-echelon vorm) te vegen. We lossen gelijktijdig opg (b) op.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

(b) Hieruit kunnen we $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ bepalen uit opgave (b). Namelijk $x_3 = -\frac{1}{4}$ daaruit volgt $x_2 = \frac{1}{2}$ en $x_1 = \frac{15}{8}$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Merk op dat we U krijgen als volgt

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} A$$

Dus $L = (E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Opg 2 verderop

Opg 3 We kunnen een basis vinden door te vegen met de 4 vectoren.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dus basis van W:

$\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$

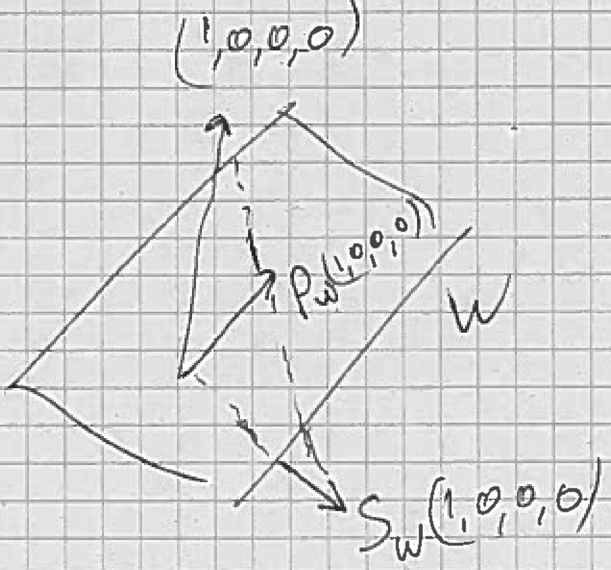
(b) $(1,0,0,-1)$ staat hier loodrecht op.

(c) Merk op dat $(1,0,0,1), (0,1,0,0)$ en $(0,0,1,0)$ al orthogonaal.

Dus we hoeven alleen maar lengte 1 te geven.

f) Ofwel $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0,0)$ en $(0,0,1,0)$ zijn orthonormaal.

e) $$P_W(1,0,0,0) = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(1,0,0,0)\right\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$+\left\langle (0,1,0,0),(1,0,0,0)\right\rangle (0,1,0,0)$$
$$+\left\langle (0,0,1,0),(1,0,0,0)\right\rangle (0,0,1,0)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \vec{0} + \vec{0}$$
$$= \left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$$



Meetkundig zie je in dat

$$S_W(1,0,0,0) = P_W(1,0,0,0) + \left(P_W(1,0,0,0) - (1,0,0,0)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right) + \left(\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right) - (1,0,0,0)\right) =$$
$$= (0,0,0,1)$$

Opg 2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

N.B. Je ziet dat $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ een eigenvector is bij eigenwaarde 2

Bepalen eigenwaarden:

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

Eigenwaarde $\lambda = 1$ (alg multipliciteit 1)

$\lambda = 2$ (alg " 2)

Eigenvectoren $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dus 2 onafh. eigenvectoren namelijk $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2b

$$B = S\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{met}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bepalen S^{-1} vegen met kolommen

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow S^{-1}$$

Dus $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$B^N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^N & \\ & & 2^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Werk zelf uit</u>

Opg 4

(a1) merk op dat de $\underline{0}$ matrix voldoet

dan $\underline{0}^T = \underline{0}$ dus $\underline{0} \in A_n$

(a2) $A, B \in A_n$ en $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ dan

$$(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$$
$$= -\lambda A - \mu B$$
$$= -(\lambda A + \mu B)$$

Uit bovenstaande volgt dat A_n een lineaire deelruimte is van de ruimte van alle reële $n \times n$-matrices.

(b) ~~basis is~~ Laat

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \\ & \ddots & & \\ -1 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

de matrix met een 1 op $(i,j)^e$-plaats en een -1 op $(j,i)^e$ plaats

F_{ij} met $1 \leq i < j \leq n$ vormt een basis

Merk op dat $A \in A_n$ dan $A = (a_{ij})$ waarbij $a_{ji} = -a_{ij}$ is te schrijven als

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} F_{ij}.$$

dus F_{ij} met $1 \leq i < j \leq n$ spannen A_n op.

onafh. Stel.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{N} \lambda_{ij} F_{ij} = \underline{0} \quad \text{dus}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \cdots & \lambda_{1N} \\ -\lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & & \\ -\lambda_{13} & -\lambda_{23} & 0 & & \\ & & & \ddots & \lambda_{N-1,N} \\ -\lambda_{1N} & & & -\lambda_{N-1,N} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_{ij} = 0$ Dus F_{ij} lin. onafh.

$\dim = 1+2+3+\cdots+n-1 = \frac{1}{2}n(n-1)$

(d) $(A*B)^T = (AB-BA)^T = (AB)^T-(BA)^T$

$= B^TA^T - A^TB^T = BA - AB =$

$-(A*B)$ Dus $A*B \in A_n$.

(e) Dit was een werkcollege opgave.

$A^T = -A$ dus $\det(A^T) = \det(A)$

$$\begin{gathered} \det(A^T) \\ \shortparallel \\ \det(-A) = (-1)^n \det A. \end{gathered}$$

dus als n oneven volgt hieruit dat

$\det(A) = -\det(A)$ ofwel $\det(A) = 0$.

Opg 5

(a) $\det(C_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$

$= x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 + x_3 x_1^2 - x_1^2 x_2 - x_2^2 x_3$
$- x_3^2 x_1$

elke term heeft graad $1+2=3$.

(b) Gebruik definitie van $\det(A) = \det((a_{ij}))$

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma_n)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$

$\cancel{= \sum_{\sigma \in S_N} 1\, x_{\sigma(2)}\, x^2_{\sigma(3)}\, x^3_{\sigma(4)} \cdots x^{n-1}_{\sigma(n)}}$

$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sign}(\sigma)\, 1 \cdot x_{\sigma(2)}\, x^2_{\sigma(3)} \cdots x^{N-1}_{\sigma(N)}$

dus graad is $0+1+2 \cdots + N-1 = \frac{1}{2} N(n-1)$.

(c) Trek rij j van rij i af dit verandert de determinant van C_N niet
De i^e rij wordt dan
$(0, x_i - x_j, x_i^2 - x_j^2, \cdots \quad x_i^{N-1} - x_j^{N-1})$.

merk op dat $x_i^k - x_j^k$ deelbaar is (9)

door $x_i - x_j$ (zie Hint) dus:

we mogen $x_i - x_j$ voor de determinant halen. dit geeft

$$\det(C_N) = (x_i - x_j) \cdot \det(\text{Andere matrix})$$

we kunnen dit voor alle $i \leq j$ doen, ~~dus~~

~~det~~ (d) Dit geldt voor elk paar (i,j) dus

$$\det(C_N) = \left(\prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x)\right) \cdot \det(\text{Matrix}).$$

Als we nu naar de graad kijken als polynoom in $(x_1, \ldots x_N)$.

dan is de graad gelijk aan $\frac{1}{2}N(\cancel{N}-1)$

$= (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$

~~Aangezien $\det(C_N)$ heeft graad $\frac{1}{2}($~~

Merk op dat de graad van

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq N} x_i - x_j \quad \text{gelijk is aan } \frac{1}{2}n(n-1)$$

Dus det(Matrix) moet een constante zijn.

(e) $\det(C_N) \neq 0$ als $x_i \neq x_j$ voor alle $i \neq j$.