Review van het boek 'Nonstandard Analysis" door J. Ponstein.

Tot ver in de negentiende eeuw werkten wiskundigen vrijelijk met "infinitesimaal kleine" en "oneindig grote" getallen. Een voorbeeld hiervan is de manier waarop Euler de formule

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2})$$

(voor complexe z) afleidde: hij begint met te zeggen dat voor 'oneindig grote' waarden van n,

$$2 \sinh x = (1 + \frac{x}{n})^n - (1 - \frac{x}{n})^n$$

Nu staat er rechts een veelterm van de vorm $a^n - b^n$, die ontbonden kan worden als $(a-b)(a-\varepsilon_1 b)\cdots(a-\varepsilon_{n-1} b)$, waar $1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ de n-de eenheidswortels zijn. Enzovoorts.

Deze manier van werken werd verlaten na de invoering door Weierstrass van rigoureuze argumenten met ε's en δ's, omdat niet altijd duidelijk was, hoe de redeneringen met 'oneindig groot' geïnterpreteerd moesten worden. Cauchy 'bewees' bijvoorbeeld dat de puntsgewijze limiet van een convergente rij continue functies continu is. . .

Eén van de verrassingen van de twintigste-eeuwse Modeltheorie is de ontwikkeling door Abraham Robinson van de 'niet-standaardanalyse', die het mogelijk maakte de oude werkwijze met infinitesimalen en oneindig grote getallen van een correcte interpretatie te voorzien. Ze werden dus gerehabiliteerd (ja, ook het bewijs van Cauchy! Alleen moet de conclusie anders worden uitgelegd).

De theorie gaat uit van een domein van *hyperreële getallen* $^*R$ waarin zich 'niet-standaard' getallen bevinden. $^*R$ is zo geconstrueerd dat elke deelverzameling A van de verzameling van gewone reële getallen R een extensie $^*A \subset {^*R}$ heeft, en dito voor elke verzameling van deelverzamelingen van R, etc.

Hiervoor geldt het *transfer principe* dat grofweg zegt dat $^*A$ dezelfde eigenschappen heeft m.b.t. $^*R$, als A m.b.t. R. Verder heeft elke $r \in {^*R}$ een unieke schrijfwijze als $r = s + x$ waarbij $s \in R$ (s is het 'standaard deel' van r), en x een 'infinitesimaal' is, dat wil zeggen dat $|x| < \frac{1}{n}$ voor elk positief natuurlijk getal n.

We hebben nu het volgende simpele bewijs van de tussenwaarde stelling van de analyse: Stel $f : [a,b] \to R$ continu met $f(a) < 0$ en $f(b) > 0$. We moeten een $x \in (a,b)$ vinden met $f(x) = 0$. Bewijs: kies $m \in {^*N}$ hypergroot (m is groter dan elk standaard natuurlijk getal). Verdeel het interval $[a,b]$ in m subintervalletjes van lengte $\frac{b-a}{m}$. Er is nu een kleinste $k \in {^*N}$ waarvoor geldt dat $f(a + k\frac{b-a}{m}) > 0$. Uit de continuïteit van f volgt nu, dat als s het standaard deel van $a + k\frac{b-a}{m}$ is, $f(s) = 0$ geldt. Het beroep dat in dit bewijs gedaan wordt op het 'kleinste element' principe voor $^*N$ is gerechtvaardigd door het transfer principe.

Jaap Ponstein, in leven hoogleraar Operations Research in Groningen, begon zich na zijn emeritaat voor de grondslagen van deze niet-standaard analyse te interesseren. Na uitgebreide literatuurstudie legde hij zijn inzichten neer in een manuscript dat, na zijn plotseling overlijden in 1995, werd uitgetypt en dat nu is uitgegeven door de Research School Systems, Organization and Management.

Het boekje handelt grotendeels (100 van de 140 bladzijden) over de *grondslagen* van de niet-standaardanalyse: de constructie van $^*R$ en de principes van redeneren erover. Voor een logicus als ondergetekende is deze behandeling een beetje wijdlopig en omslachtig. Maar door de prettige stijl waarin het geschreven is, en de vele voorbeelden (zoals de in deze recensie genoemde), is het heel geschikt om een eerste indruk op te doen van het vak. En een waardig testimonium van een wiskundige met originele interesses.

Jaap van Oosten