Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A met uitwerkingen

10 november 2011, 14.00-17.00

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Hieronder zijn gegeven drie deelverzamelingen X van $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Bepaal voor iedere X of X eindig of aftelbaar oneindig is, dan wel kardinaliteit 2^ω heeft. Licht je antwoord toe.

i)(4)	X	$=$	$\{A \subseteq \mathbb{N} \mid$ voor elk stijgend rijtje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ is er een $n \in \mathbb{N}$ met $a_n \in A\}$
ii)(3)	X	$=$	$\{A \subseteq \mathbb{N} \mid$ zowel A als $\mathbb{N} - A$ is oneindig$\}$
iii)(3)	X	$=$	$\{A \subseteq \mathbb{N} \mid$ voor alle $B \subseteq \mathbb{N}$ geldt $A \cap B = \emptyset$ of $A \cap B = A\}$

Uitwerking:i). In de beschrijving van X werd (zoals op het tentamen gespecificeerd werd) met 'stijgend rijtje' een *strict* stijgend rijtje bedoeld. Als elk strict stijgend rijtje ooit in A terechtkomt, dan is het complement van A eindig; immers elke oneindige deelverzameling van $\mathbb{N}$ bevat een oneindig stijgend rijtje. De verzameling X van i) is dus de verzameling van alle co-eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Deze verzameling staat in bijectie (via complement) tot de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$, die aftelbaar oneindig is (opgave 19d uit het dictaat).

ii). Omdat de verzameling van oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ kardinaliteit 2^ω heeft, volstaat het om een injectie van deze verzameling in de verzameling X van ii) te geven, om te zien dat ook X kardinaliteit 2^ω heeft. Gegeven $A \subseteq \mathbb{N}$ oneindig, laat $f(A) = \{2n \mid n \in A\}$. Dan is f duidelijk injectief; $f(A)$ is oneindig, en ook het complement van $f(A)$ is oneindig (want bevat alle oneven getallen).

iii) Als voor alle $B \subseteq \mathbb{N}$ geldt $A \cap B = \emptyset$ of $A \cap B = A$, dan kan A ten hoogste één element hebben. Omgekeerd, als $|A| \leq 1$ dan voldoet A aan deze voorwaarde. We zien dat $X = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, |A| \leq 1\}$. Deze verzameling is aftelbaar oneindig door de aftelling $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \ldots$

Opgave 2. Ter herinnering: een $\mathbb{Q}$-deelvectorruimte van $\mathbb{R}$ is een deelverzameling V van $\mathbb{R}$ waarvoor geldt: als $v, w \in V$ dan ook $v + w \in V$; en als $v \in V$ en $q \in \mathbb{Q}$, dan ook $qv \in V$.

a) (5) Bewijs met behulp van het Lemma van Zorn dat er een $\mathbb{Q}$-deelvectorruimte V van $\mathbb{R}$ bestaat die maximaal is met betrekking tot de eigenschap dat $1 \notin V$.

b) (5) Zij V als in a). Bewijs: voor elke $x \in \mathbb{R}$ is er een uniek paar $(q, v) \in \mathbb{Q} \times V$ zodat $x = v + q$.

uitwerking a) Beschouw de poset P van $\mathbb{Q}$-deelvectorruimten van $\mathbb{R}$ die 1 niet bevatten. Bijvoorbeeld, $\{q\pi \,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ is zo'n ruimte. Als $\mathcal{C}$ een keten in P is en $v, w \in \bigcup \mathcal{C}$ dan is er een element $V \in \mathcal{C}$ met $v, w \in V$ (omdat $\mathcal{C}$ een keten is). Dus $v + w \in \bigcup \mathcal{C}$. Ook is, als $v \in \bigcup \mathcal{C}$, $qv \in \bigcup \mathcal{C}$ voor elke $q \in \mathbb{Q}$. En $1 \notin \bigcup \mathcal{C}$. We zien dat $\bigcup \mathcal{C}$ een element van P is, en een bovengrens in P is van de keten $\mathcal{C}$. Omdat elke keten in P een bovengrens heeft, voldoet P aan het lemma van Zorn en heeft dis een maximaal element. Dit is de gevraagde V.

b) Laten we eerste de uniciteit bewijzen: als $x = v_1 + q_1 = v_2 + q_2$ dan zien we dat $q_2 - q_1 \in V$. Als $q_2 - q_1 \neq 0$, dan is omdat V een $\mathbb{Q}$-deelvectorruimte is, ook $1 = \frac{1}{q_2 - q_1}(q_2 - q_1) \in V$, in strijd met de keuze van V. Dus $q_1 = q_2$ en derhalve ook $v_1 = v_2$.

Voor het bestaan van (q, v) merken we op: als $x \in V$ neem $v = x, q = 0$. Als $x \notin V$, dan moet per maximaliteit van V, 1 een element zijn van de $\mathbb{Q}$-deelvectorruimte van $\mathbb{R}$ opgespannen door V en x. Dat betekent dat er een $q \in \mathbb{Q}$ is en een $v \in V$ zodat $v + qx = 1$. Bovendien is $q \neq 0$ want $v \neq 1$ $(1 \notin V)$. Dus $x = \frac{-1}{q} v + \frac{1}{q}$.

Opgave 3. Herinner: als L en M welgeordende verzamelingen zijn, dan betekent de notatie $L \preceq M$ dat L isomorf is met een beginsegment van M. We schrijven $L \prec M$ als $L \preceq M$ en $L \ncong M$.

a) (5) Bewijs: als $L \prec M$ dan is er een unieke $m \in M$ zodat L isomorf is met $\{x \in M \,|\, x < m\}$.

b) (5) Bewijs, dat er geen oneindige rij $L_0, L_1, \cdots$ van welordeningen bestaat, zodat $L_{n+1} \prec L_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Uitwerking: a) Dit is als in het dictaat.

b) Stel zo'n oneindige rij bestond. Elke L_n is dan isomorf met $\{x \in L_0 \mid x < a_n\}$ voor een unieke $a_n \in L_0$. En omdat $L_{n+1} \prec L_n$ geldt, volgt dat $a_{n+1} < a_n$ in L_0. Dit geeft een oneindig dalend rijtje in L_0, maar dat kan niet als L_0 een welordening is (de deelverzameling $\{a_1, a_2, \ldots\}$ heeft dan geen kleinste element).

Opgave 4.

a) (4) Laat L de taal zijn met één 2-plaatsig functiesymbool $\cdot$ voor vermenigvuldiging; en laat $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ de L-structuren zijn (met gewone vermenigvuldiging). Geef een L-zin die waar is in $\mathbb{C}$ maar niet in $\mathbb{R}$.

b) (4) Laat $L = \{\leq\}$ de taal van partiële ordeningen zijn en M de L-structuur met $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ en $\leq^M = \{(x, y) \mid x$ is een deler van $y\}$.

Geef een L-formule $\phi(x)$ die het element 2 definieert in M (d.w.z.: voor alle $m \in M$ geldt: $M \models \phi[m/x] \Leftrightarrow m = 2$).

c) (2) Laat $L = \{f\}$ waar f een 1-plaatsig functiesymbool is. Geef een L-zin ϕ zodat voor elke L-structuur M geldt: als $M \models \phi$ dan is M oneindig.

Uitwerking: a) Bijvoorbeeld: laat $\phi(x)$ het getal 1 definiëren door te zetten: $\phi(x) \equiv: \forall y(x \cdot y = y)$. Nu geldt in $\mathbb{C}$ dat er een z is met $z^3 = 1$ maar $z^2 \neq 1$; in $\mathbb{R}$ heb je zo'n element niet. De gevraagde zin had dus kunnen luiden:

$$\exists v(\phi(v \cdot (v \cdot v)) \wedge \neg \phi(v \cdot v))$$

b) Je kunt uitdrukken dat er in de gegeven partiële ordening precies één element onder 2 zit en precies 3 elementen erboven.

c) Hier kon je nemen: $\forall xy(f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \exists z \forall w \neg(f(w) = z)$. Deze zin drukt uit dat f injectief is, maar niet surjectief. Dat kan alleen als de verzameling oneindig is.

Opgave 5. In deze opgave is weer $L = \{f\}$ met f een 1-plaatsig functiesymbool. Voor een L-structuur M en $a \in M$ zeggen we dat a *cyclisch* is, als er een natuurlijk getal $n \geq 1$ is zodat $(f^M)^n(a) = a$.

Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er geen L-theorie bestaat waarvan de modellen precies die L-structuren zijn die cyclische elementen hebben.

Uitwerking. Noem a 'cyclisch van graad n' als $(f^M)^n(a) = a$. Voor elke *vaste* $n \geq 0$ is er een L-zin ϕ_n die uitdrukt dat er geen elementen zijn zie cyclisch zijn van graad n:

$$\phi_n \equiv \forall x \neg(\underbrace{f(\cdots f}_{n \text{ keer}}(x)\cdots) = x)$$

Stel nu, dat een L-theorie T bestaat waarvan de modellen precies die L-structuren zijn die cyclische elementen hebben. We beschouwen de theorie $T \cup \{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$. Elke eindige deeltheorie hiervan is bevat in een verzameling van de vorm $T \cup \{\phi_n \mid 1 \leq n \leq k\}$ voor een zekere k. Gegeven zo'n k kunnen we het volgende model maken: neem $\{0, \ldots, k\}$ en $f(x) = x + 1(\mathrm{mod} k + 1)$. Deze structuur heeft cyclische elementen (elk element is cyclisch), maar geen elementen die cyclisch zijn van graad $\leq k$. Dus dit is een model voor $T \cup \{\phi_n \mid 1 \leq n \leq k\}$. We concluderen dat elke eindige deeltheorie van $T \cup \{\phi_n \mid n \geq 1\}$ consistent is. Met de Compactheidsstelling volgt dat de gehele theorie consistent is. Maar dat kan niet: want deze theorie zegt dat er cyclische elementen zijn, maar dat er geen cyclische elementen zijn van enige eindige graad. Deze tegenspraak bewijst dat zo'n T als gegeven niet bestaan kan.