Tentamen Grondslagen van de Wiskunde A met beknopte uitwerkingen

20 december 2021, 09:30–12:30

DIT TENTAMEN BEVAT 5 OPGAVEN; ZIE OOK DE OMMEZIJDE.
Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. Voor functies $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zeggen we "β domineert α" (notatie: $\alpha \ll \beta$) als er voor elke $N \in \mathbb{N}$ een $k \in \mathbb{N}$ is zodat voor alle $n > k$ geldt:

$$\frac{\beta(n)}{\alpha(n)+1} > N$$

a) (6 punten) Laat $\alpha^0, \alpha^1, \ldots$ een rij functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zijn. Laat zien dat er een functie $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is zo dat $\alpha^i \ll \beta$ geldt voor alle i.

b) (4 punten) Stel dat A een verzameling van functies $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is zodat er voor elke functie $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een $\beta \in A$ is met $\alpha \ll \beta$. Laat zien dat A niet aftelbaar is.

Uitwerking: a) Definieer de functie $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ door

$$\beta(n) \;=\; \max(\{n(\alpha^i(n)+1) \,|\, 0 \le i \le n\}) + 1$$

Dan geldt: als $n > N$ dan hebben we voor alle $i \le n$:

$$\beta(n) > n(\alpha^i(n)+1) > N(\alpha^i(n)+1)$$

Als nu $i, N \in \mathbb{N}$ willekeurig, dan geldt voor $n > \max\{i, N\}$:

$$\beta(n) > N(\alpha^i(n)+1)$$

wat betekent dat $\beta \gg \alpha^i$.

b): Stel A is aftelbaar. A kan niet de lege verzameling zijn, dus A kan geschreven worden als $\{\alpha^0, \alpha^1, \ldots\}$. Met deeltje a) is er een β zodat $\beta \gg \alpha^i$ voor alle i, en de veronderstelling over A geeft ons een $\gamma \in A$ zodat $\gamma \gg \beta$. Dan is $\gamma = \alpha^i$ voor zekere i, en we hebben dus

$$\alpha^i \gg \beta \gg \alpha^i$$

Hieruit volgt vrij eenvoudig $\alpha^i \gg \alpha^i$, wat tot een tegenspraak leidt.

Opgave 2. Laat X een poset zijn. Onder een *bos* in X verstaan we een deelverzameling $B \subseteq X$ met de eigenschap dat voor alle $x \in B$ de verzameling $B_x = \{y \in B \mid y \leq x\}$ lineair geordend is (met de ordening van X).
Laat zien dat er een bos M in X is met de volgende eigenschap: voor elke $x \in X$ is er een $m \in M$ met $x \leq m$ of $m \leq x$.

[Hint: bewijs eerst, met behulp van het Lemma van Zorn, dat er een 'maximaal bos' bestaat. Leid dan daaruit de genoemde eigenschap af]

Uitwerking: we volgen de hint. Laat P de verzameling van bossen in X zijn, geordend door inclusie ($\subseteq$). Stel $\mathcal{C}$ is een keten in P; we beschouwen $\bigcup \mathcal{C}$. Stel $x, y, z \in \bigcup \mathcal{C}$ met $y, z \leq x$. Vanwege de keten-eigenschap is er nu een $C \in \mathcal{C}$ zodat $x, y, z \in C$. Maar C is een bos, dus we concluderen dat $y \leq z$ of $z \leq y$ moet gelden. Met andere woorden: $\bigcup \mathcal{C}$ is een bos, en daarmee een bovengrens voor $\mathcal{C}$ in P.

We concluderen met het lemma van Zorn dat P een maximaal element heeft: dat wil zeggen, er is een maximaal bos in X. Laat M zo'n maximaal bos zijn. We laten zien dat M de eigenschap heeft die gegeven is in de opgave.

Neem een $x \in X$. Als $x \in M$ dan is er $m \in M$ met $x \leq m$: neem $m = x$. Als $x \notin M$ dan is de deelverzameling $M \cup \{x\}$ van X geen bos, vanwege de maximaliteit van M. Dat wil zeggen dat er $a, b, c \in M \cup \{x\}$ zijn met $b, c \leq a$ maar $b \not\leq c$, $c \not\leq b$. Dit kan niet met $a, b, c \in M$, dus minstens een van a, b, c is gelijk aan x. Als $a = x$ dan moet $b \in M$ of $c \in M$ dus er is $m \in M$ met $m \leq x$; als $b = x, a \neq x$ dan is er $m \in M$ met $x \leq m$.

Opgave 3. Stel X is een poset, en $A \subset X$ is een deelverzameling met de eigenschap dat voor elk dalend rijtje $c_0 > c_1 > \cdots$ in X, er een $k \in \mathbb{N}$ is met $c_k \in A$.

a) (6 punten) Stel een deelverzameling $Y \subseteq X$ voldoet aan de volgende voorwaarden:

i) $A \subseteq Y$

ii) Voor alle $x \in X$ geldt: als $X_{<x} = \{y \in X \mid y < x\} \subseteq Y$, dan $x \in Y$.

Laat zien dat $Y = X$.

b) (4 punten) Is X een welordening? Motiveer je antwoord.

Uitwerking: a) Stel $Y \neq X$; kies $c_0 \in X - Y$. Volgens ii) is dan $X_{<c_0} \nsubseteq Y$, dus is er een $c_1 < c_0$ met $c_1 \notin Y$. We krijgen zo een oneindig rijtje

$$c_0 > c_1 > \cdots$$

in $X - Y$. Maar nu is gegeven dat er altijd een k is zodat $c_k \in A$. Tevens is A een deelverzameling van Y, dus $c_k \in Y$; tegenspraak.

b) Nee! X kan alles zijn, als we kiezen $A = X$. Iets interessanter is de vraag: is $X - A$ een welordening? Immers, deze poset bevat geen oneindig dalend rijtje. Echter, $X - A$ hoeft geen lineaire ordening te zijn.

Opgave 4. In deze opgave beschouwen we de taal $L = \{\exp, <\}$ waar exp een 1-plaatsig functiesymbool is en $<$ een 2-plaatsig relatiesymbool. We beschouwen de L-structuur $\mathbb{R}$, met $\exp^{\mathbb{R}}(x) = e^x$ en $<^{\mathbb{R}}$ de gewone ordening op $\mathbb{R}$.

a) (3 punten) Definieer het getal 0 door een L-formule, d.w.z. geef een L-formule $\phi_0(x)$ die in $\mathbb{R}$ alleen waar is voor $x = 0$.

b) (3 punten) Definieer het getal 1 door een L-formule $\phi_1(x)$.

c) (4 punten) Definieer de kromme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ door een L-formule $\phi(x, y)$.

Uitwerking: a) Laat $\phi_0(x)$ de formule

$$\forall y(\forall z(y \leq \exp(z)) \leftrightarrow y \leq x)$$

zijn. Deze is alleen waar voor $x = 0$.

b) Voor $\phi_1(x)$ neem $\forall y(\phi_0(y) \to x = \exp(y))$ of $\exists y(\phi_0(y) \wedge x = \exp(y))$.

c) Helaas! Een brainwave van mij. Volle punten voor een ieder, voor dit deeltje.

Opgave 5. We beschouwen de taal $L_{\mathbb{R}}$ van $\mathbb{R}$-vectorruimten: de taal heeft een constante 0, een functiesymbool + voor optelling van vectoren, en voor elke $r \in \mathbb{R}$ een functiesymbool f_r voor vermenigvuldiging van een vector met de scalar r. We hebben ook de theorie $T_{\mathbb{R}}$ van $\mathbb{R}$-vectorruimten, gegeven door de axioma's

$$\begin{array}{ll} f_r(0) = 0 & \forall xy(f_r(x+y) = f_r(x) + f_r(y)) \\ \forall x(f_1(x) = x) & \forall x(f_r(f_s(x)) = f_{rs}(x)) \\ \forall x(f_{r+s}(x) = f_r(x) + f_s(x)) & \end{array}$$

(Samen met de axioma's voor een abelse groep gegeven door 0 en +). Bewijs met behulp van de Compactheidsstelling dat er geen $L_{\mathbb{R}}$-formule $\phi(x,y)$ in twee vrije variabelen x en y is, die uitdrukt dat x en y lineair onafhankelijk zijn over $\mathbb{R}$, met andere woorden: die zo is dat voor elke $\mathbb{R}$-vectorruimte V en elk tweetal elementen v, w van V geldt: $V \models \phi(v,w)$ precies als v en w in V lineair onafhankelijk zijn.
[Hint: gesteld zo'n formule $\phi(x,y)$ bestond; beschouw dan de ontkenning $\neg\phi(x,y)$. Beschouw een uitbreiding van de taal met twee nieuwe constanten, en formuleer een geschikte uitbreiding van de theorie $T_{\mathbb{R}}$]

Uitwerking: Stel zo'n formule $\phi(x,y)$ was er wel. Dan drukt $\neg\phi(x,y)$ uit dat x en y lineair afhankelijk zijn: d.w.z., $x = 0$ of $y = f_r(x)$ voor zekere r.

Laat L' de taal $L_{\mathbb{R}} \cup \{c,d\}$ zijn, waar c, d nieuwe constanten zijn. Zij T' de theorie:

$$T_{\mathbb{R}} \cup \{\neg\phi(c,d)\} \cup \{\neg(c = 0)\} \cup \{\neg(f_r(c) = d) \,|\, r \in \mathbb{R}\}$$

Als $T'' \subset T'$ eindig is, dan bevat T'' maar eindig veel van de axioma's $\neg(f_r(c) = d$; zeg, T'' bevat de axioma's

$$\neg(f_{r_1}(c) = d), \ldots, \neg(f_{r_k}(c) = d)$$

Neem nu $\mathbb{R}$ als vectorruimte over zichzelf, $c^{\mathbb{R}} = 1$ en $d^{\mathbb{R}} \notin \{r_1, \ldots, r_k\}$. Dan is $\mathbb{R}$ met deze interpretatie een model van T'', want $c^{\mathbb{R}}$ en $d^{\mathbb{R}}$ zijn afhankelijk over $\mathbb{R}$.

We zien dat elke eindige deeltheorie T'' van T' consistent is, dus met de Compactheidsstelling is T' consistent. Dit leidt tot een tegenspraak. Stel nl. V ee model van T'. Dan is V een vectorruimte over $\mathbb{R}$, c^V en d^V zijn afhankelijke vectoren maar $c^V \neq 0$ en $r \cdot c^V \neq d^V$ voor alle $r \in \mathbb{R}$! Dit kan natuurlijk niet. Deze tegenspraak bewijst dat de veronderstelde formule niet kan bestaan.