Grondslagen van de Wiskunde
Deeltentamen B

15 januari 2009, 14:00–17:00.

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven; lees ook de achterzijde. Alle opgaven tellen even zwaar. Advies: doe eerst die opgaven, die je kunt, en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1 In deze opgave is L een taal zonder constanten.

(a) Bewijs dat elke kwantorvrije L-zin hetzij logisch equivalent is met $\bot$, hetzij met $\neg\bot$.

(b) Stel dat T een L-theorie is die kwantor-eliminatie heeft. Laat zien: als T een oneindig model heeft, dan is elk model van T oneindig.

Opgave 2 Laten L en L' twee talen zijn met $L \subset L'$. Stel T is een L-theorie. Laat T' de L'-theorie zijn, gegeven door die L'-zinnen ϕ waarvoor geldt dat $T \models \phi$.
Bewijs dat T' conservatief is over T, d.w.z. dat voor elke L-zin ψ geldt: als $T' \models \psi$, dan $T \models \psi$.

Opgave 3 Construeer bewijsbomen voor de volgende uitspraken:

(a) $\vdash \forall x \forall y\, (\neg(x = y) \vee F(x) = F(y))$

(b) $\{\neg(\phi \to \psi)\} \vdash \phi$

(c) $\{(\phi \to \psi), (\chi \to \rho)\} \vdash (\phi \vee \chi) \to (\psi \vee \rho)$

Opgave 4 Laat $L = \{S\}$, waar S een éénplaatsig functiesymbool is. Laat T de volgende L-theorie zijn:

$$T = \begin{array}{c} \{\forall x \forall y (S(x) = S(y) \to x = y),\ \forall y \exists x (S(x) = y)\} \cup \\ \{\forall x \neg(\underbrace{S(\cdots S}_{n}(x) \cdots) = x \mid n > 0\} \end{array}$$

(a) Bewijs, dat T geen eindige modellen heeft.

(b) Geef twee aftelbaar oneindige modellen van T die niet isomorf zijn.

(c) Toon aan dat als M en N overaftelbare modellen van T zijn van dezelfde kardinaliteit, M en N isomorf zijn.

(d) Beredeneer dat T volledig is.

Opgave 5 Ter herinnering: het *Regulariteitsaxioma* in de verzamelingenleer zegt: als $x \neq \emptyset$, dan is er een $y \epsilon x$ zodat $y \cap x = \emptyset$. Voorts heet een verzameling x *transitief* als elk element van x een deelverzameling is van x.

(a) Bewijs dat uit de axioma's van ZF volgt: als $x \subseteq \{x\}$, dan $x = \emptyset$.

(b) Bewijs ook uit ZF: als x transitief is en $x \neq \emptyset$, dan $x = \{\emptyset\} \vee \{\emptyset\} \epsilon x$