Tentamen Grondslagen van de Wiskunde B

Dit tentamen bevat 5 opgaven; zie ook de ommezijde.

30 januari 2014, 13.30-16.30

Alle opgaven tellen even zwaar (10 punten); je cijfer is het totaal aantal punten, gedeeld door 5. Als een opgave uit meerdere deeltjes bestaat, staat bij elk deeltje hoeveel van de 10 punten dat deeltje waard is.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; en ga dan nadenken over de rest. Succes!

Opgave 1. In deze opgave beschouwen we de theorie T_{dep} van *dichte lineaire ordeningen met eindpunten*. De taal bevat één binair relatiesymbool $<$ en de axioma's zijn:

$$\begin{array}{ll} \forall x \neg(x < x) & \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z) \\ \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x) & \forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y)) \\ \exists z \forall x (x = z \vee z < x) & \exists w \forall y (y = w \vee y < w) \\ \exists xy (x < y) & \end{array}$$

a) (3) Laat zien dat T_{dep} twee modellen N and M heeft waarvoor geldt dat M een substructuur is van N, maar geen elementaire substructuur.

b) (2) Toon aan dat T_{dep} *geen* kwantoreliminatie heeft.

c) (3) Laat zien dat T_{dep} ω-categorisch is.

d) (2) Laat zien dat T_{dep} volledig is.

Opgave 2. In deze opgave is $L = L_{\text{rings}} = \{0, 1, +, \cdot\}$. We beschouwen de L-structuur $\mathbb{R}$ met de gewone ringstructuur, en de taal $L_{\mathbb{R}} = L \cup \{c_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, waar c_x een nieuwe constante is. We zien $\mathbb{R}$ als $L_{\mathbb{R}}$-structuur door te zetten: $(c_x)^{\mathbb{R}} = x$. Laat $E(\mathbb{R})$ de verzameling van alle $L_{\mathbb{R}}$-zinnen zijn die waar zijn in $\mathbb{R}$.

a) (5) Laat zien: als $\phi(x)$ een kwantorvrije $L_{\mathbb{R}}$-formule met één vrije variabele x is, dan is de verzameling

$$\{r \in \mathbb{R} \,|\, \mathbb{R} \models \phi(r)\}$$

hetzij eindig, hetzij co-eindig (als deelverzameling van $\mathbb{R}$).

b) (5) Bewijs dat de theorie $E(\mathbb{R})$ geen kwantoreliminatie heeft.

Opgave 3. In deze opgave staan drie beweringen. De vraag is steeds: bewijs de bewering door een bewijsboom te construeren, of weerleg de bewering door een tegenmodel te geven.

a) (3) $\forall x(g(f(x)) = x) \vdash \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y)$

b) (3) $(\exists x \phi(x)) \land (\exists x \psi(x)) \vdash \exists x(\phi(x) \land \psi(x))$

c) (4) $\neg\phi \to \psi \vdash \neg\psi \to \phi$

Opgave 4. Ter herinnering: als $L \subseteq L'$ twee talen zijn, T een L-theorie en T' een L'-theorie zodat $T \subset T'$, dan heet T' *conservatief over* T als voor elke L-zin ϕ waarvoor $T' \vdash \phi$, reeds geldt dat $T \vdash \phi$.

Laten nu een taal L en een L-theorie T vast gekozen zijn.

a) (5) Stel $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ is een L-formule met $n + 1$ vrije variabelen. Zij $L' = L \cup \{f\}$, waar f een nieuw n-plaatsig functiesymbool is, en T' de L'-theorie

$$T \cup \{\forall \vec{x}(\exists y \phi(\vec{x}, y) \to \phi(\vec{x}, f(\vec{x})))\}$$

Laat zien dat wanneer M een model van T is, we een interpretatie $f^M : M^n \to M$ van het functiesymbool f in M kunnen definiëren, zodanig dat de resulterende L'-structuur M een model van T' is.

b) (5) Laten L, L', T, T' als in a) zijn. Concludeer uit a), met behulp van de Volledigheidsstelling, dat T' conservatief is over T.

Opgave 5. In deze opgave definiëren we voor ordinaalgetallen de optelling en de vermenigvuldiging als volgt:

$$\begin{array}{ll} \alpha + 0 = \alpha & \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 & \alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha + \gamma = \bigcup \{\alpha + \beta \mid \beta \in \gamma\} & \alpha \cdot \gamma = \bigcup \{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in \gamma\} \end{array}$$

Hierbij is in de laatste regel aangenomen dat γ een niet-leeg limietordinaalgetal is.

a) (3) Laat zien dat voor elke niet-lege verzameling x van ordinaalgetallen en elk ordinaalgetal α, de volgende twee gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned} \alpha + \bigcup x &= \bigcup \{\alpha + \beta \mid \beta \in x\} \\ \alpha \cdot \bigcup x &= \bigcup \{\alpha \cdot \beta \mid \beta \in x\} \end{aligned}$$

b) (4) Laat zien dat de volgende distributieve wet geldt:

$$\alpha\cdot(\beta + \gamma) = (\alpha\cdot\beta) + (\alpha\cdot\gamma)$$

Hint: inductie naar γ. Gebruik deeltje a).

c) (3) Laat door een tegenvoorbeeld zien dat de volgende wet *niet* geldt:

$$(\alpha + \beta)\cdot\gamma = (\alpha\cdot\gamma) + (\beta\cdot\gamma)$$