# Tentamen Recursietheorie

29 april 2002, 14.00–17.00

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; ga daarna pas nadenken over de rest.
SUCCES!

**Opgave 1**:
Bewijs, dat de volgende functies primitief recursief zijn:

a) De Euler $\varphi$-functie: $\varphi(n) =$ het aantal getallen $k$, $1 \leq k < n$, zodat $\text{ggd}(k, n) = 1$;

b) De functie $F(x) = \langle \underbrace{x, x, \ldots, x}_{x \text{ keer}} \rangle$

**Opgave 2**:
Bewijs, dat er een primitief recursieve functie $F$ is, met de eigenschap dat voor alle $e \in \mathbb{N}$:

$$F(W_e) = W_{F(e)}$$

**Opgave 3**:
Bewijs, dat er geen totaal recursieve functie $F$ is met de volgende eigenschappen:

i) $W_e = W_{e'} \Rightarrow W_{F(e)} = W_{F(e')}$

ii) $W_{F(e)} \neq \emptyset \Leftrightarrow W_e$ is oneindig

**Opgave 4**:
Klassificeer de volgende verzamelingen binnen de arithmetische hiërarchie:

a) $A = \{e \mid e \bullet e = e\}$

b) $A = \{e \mid \varphi_e^{-1}(\{0\})$ is oneindig$\}$

**Opgave 5**:

a) Laat zien dat er in de taal van PA een zin $\psi$ is waarvoor geldt:

$$\text{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \exists x \overline{\text{Bew}}(x, \overline{\ulcorner \neg\psi \urcorner})$$

b) Zij $\psi$ als in a). Laat zien dat $\neg\psi$ waar is in $\mathbb{N}$, maar dat $\neg\psi$ niet te bewijzen is uit de axioma's van PA.

**Beknopte uitwerking**.
**opgave 1**. a). Definieer de functie $\psi(n,k)$ als volgt:

$$\begin{array}{lcl} \psi(n,0) & = & 0 \\ \psi(n,k+1) & = & \left\{ \begin{array}{cl} \psi(n,k)+1 & \text{als ggd}(n,k+1)=1 \\ \psi(n,k) & \text{anders} \end{array} \right. \end{array}$$

Dan is $\psi$ gedefinieerd met primitieve recursie uit de nulfunctie en een functie die is opgebouwd d.m.v. gevalsonderscheiding uit primitief recursieve functies. Dus $\psi$ is primitief recursief. Er geldt: $\varphi(n) = \psi(n, n-1)$, dus $\varphi$ is primitief recursief.
b). Dit gaat analoog; definieer $\psi(x,n)$ door

$$\begin{array}{lcl} \psi(x,0) & = & \langle\rangle \\ \psi(x,n+1) & = & \psi(x,n) * \langle x \rangle \end{array}$$

$\psi$ is gedefinieerd met primitieve recursie uit een constante functie en de primitief recursieve functie $x, y \mapsto y * \langle x \rangle$, dus primitief recursief; en $F(x) = \psi(x,x)$.

**Opgave 2**. Door een slordigheid van mij was een triviale oplossing mogelijk: de identieke functie $F(x) = x$ voldoet. Een betere versie van de opgave was geweest: vind een primitief recursieve functie $F$ zodat geldt voor alle $e$:

$$W_{F(e)} = \{F(x)+1 \mid x \in W_e\}$$

Dit kan als volgt worden opgelost: zij $G(f,e,x)$ de partieel recursieve functie zodat:

$$G(f,e,x) \simeq \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{als er een paar } \langle y,z \rangle \text{ is met} \\ & T(1,e,y,z) \,\&\, x = S^1_1(f,y)+1 \\ \text{ongedefinieerd} & \text{anders} \end{array} \right.$$

Volgens de recursiestelling is er een code $f$ zodat $f \bullet (e,x) \simeq G(f,e,x)$. Zet $F(e) = S^1_1(f,e)$. Ga na dat $F$ aan de vereisten voldoet.

**Opgave 3**. Uit i) volgt, dat $A = \{e \mid W_{F(e)} \neq \emptyset\}$ extensioneel is als verzameling codes van r.e. verzamelingen. Ook is $A$ r.e., zoals eenvoudig is na te gaan. Als ook ii) zou gelden, dan moet volgens de stelling van Rice-Shapiro de collectie van oneindige r.e. verzamelingen open zijn in de Scott-topologie op r.e. verzamelingen. Dit levert een tegenspraak op met de karakterisering van deze topologie als gegeven in het dictaat.

**Opgave 4**.a) $A = \{e \mid e \bullet e = e\}$ is r.e. want $A = \{e \mid \exists y(T(1, e, e, y) \& U(y) = e)\}$.

$A$ is niet recursief, want $\mathcal{K}$ is reduceerbaar tot $A$. Dit kan bijvoorbeeld zo: kies met de recursiestelling een code $f$ zodat

$$f \bullet (e, x) \simeq \begin{cases} S^1_1(f, e) & \text{als } e \bullet e \text{ gedefinieerd} \\ \text{ongedefinieerd} & \text{anders} \end{cases}$$

Er volgt voor $F(e) = S^1_1(f, e)$, dat $e \in \mathcal{K} \Leftrightarrow F(e) \in A$.
b) $A = \{e \mid \forall n \exists m \exists y(m > n \& T(1, e, m, y) \& U(y) = 0)\}$ waaruit volgt dat $A$ een $\Pi_2$-verzameling is.

Er is een primitief recursieve functie $F$, zodat geldt: $W_{F(e)} = \{x \mid e \bullet x = 0\}$ (doe dit zelf). Dus $\{e \mid W_e \text{ is oneindig}\} \leq_m A$. Omdat de eerste verzameling $m$-compleet is in $\Pi_2$ volgt, dat $A$ strict $\Pi_2$ is.

**Opgave 5**.a) Er is een primitief recursieve functie $N$ met de eigenschap dat voor formules $\varphi$ geldt: $N(\ulcorner\varphi\urcorner) = \ulcorner\neg\varphi\urcorner$. De functie $N$ is representeerbaar is PA, zeg door een formule $\chi(x, y)$. Voor formules $\psi$ volgt nu, dat

$$\mathrm{PA} \vdash \forall y(\chi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}, y) \leftrightarrow y = \overline{\ulcorner\neg\psi\urcorner})$$

Pas het Diagonalisatielemma toe op de formule: $\varphi(v) \equiv \exists yx(\chi(v, y) \wedge \overline{\mathrm{Bew}}(x, y))$. Dit geeft een zin $\psi$ waarvoor $\mathrm{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$ en dus is $\psi$ de gevraagde zin.
b) Stel dat $\psi$ waar is in $\mathbb{N}$, dan ook (omdat $\mathbb{N}$ een model is van PA) de zin $\exists x \overline{\mathrm{Bew}}(x, \overline{\ulcorner\neg\psi\urcorner})$. En dus is er een bewijs van $\neg\psi$, en dus is $\neg\psi$ ook waar in $\mathbb{N}$. Dit levert een tegenspraak. Derhalve is $\neg\psi$ waar in $\mathbb{N}$, maar als $\neg\psi$ zou volgen uit de axioma's van PA, dan was er een bewijs van $\neg\psi$; dus $\psi$ zou waar zijn. En ook dit levert een tegenspraak.