Herkansingstentamen Recursietheorie

1 juli 2002, 14.00–17.00

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven; zie ook de achterkant.
Advies: maak eerst die opgaven, die je kunt; ga daarna pas nadenken over de rest.
SUCCES!

Opgave 1:
Laat $j : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ een primitief recursieve bijectie zijn als in het dictaat.

Als $F : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ een partiële functie is, is de *grafiek* van F gedefinieerd als de verzameling

$$\mathrm{Gr}(F) = \{j(x, y) \,|\, x \in \mathrm{dom}(F) \text{ en } y = F(x)\}$$

a) Bewijs: als $\mathrm{Gr}(F)$ r.e. is, is F partieel recursief.

b) Bewijs, dat er voor elke partieel recursieve functie F een functie G bestaat met de eigenschappen:

   i) $\mathrm{dom}(F) \subseteq \mathrm{dom}(G)$

   ii) $F(x) \leq G(x)$ voor alle $x \in \mathrm{dom}(F)$

   iii) $\mathrm{Gr}(G)$ is primitief recursief

c) Bewijs of weerleg: als $\mathrm{Gr}(F)$ primitief recursief is en F is totaal, dan is F primitief recursief.

Opgave 2:

a) Bewijs, dat er een primitief recursieve functie F van twee argumenten is, met de eigenschap dat voor alle $e, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$W_{F(e,n)} \text{ is eindig } \iff n \in W_e$$

b) Bewijs, dat er een primitief recursieve functie F van één variabele is, zodat voor alle $e \in \mathbb{N}$ geldt:

$$W_{F(e)} \text{ is eindig } \iff F(e) \in W_e$$

Opgave 3:
Noem een partiële functie $F : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ *stijgend* als voor alle $x, y \in \mathrm{dom}(F)$ geldt: als $x \leq y$ dan $F(x) \leq F(y)$.

Zij R de volgende verzameling:

$$R = \{e \mid \varphi_e \text{ is niet stijgend}\}$$

Bewijs, dat R recursief opsombaar, maar niet recursief is.

Opgave 4:
Klassificeer de volgende verzamelingen binnen de arithmetische hiërarchie:

a) $A = \{e \mid \mathrm{dom}(\varphi_e) \text{ bevat geen priemgetallen}\}$

b) $A = \{e \mid \mathrm{rge}(\varphi_e) \subseteq \mathcal{K}\}$
(Hier is $\mathcal{K}$ de standaardverzameling $\{e \mid e \bullet e \text{ is gedefinieerd}\}$)

Opgave 5:
Bewijs, dat er geen formule $\psi(x)$ in de taal van PA is, zodat voor alle PA-zinnen φ geldt:

$$\mathrm{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$$