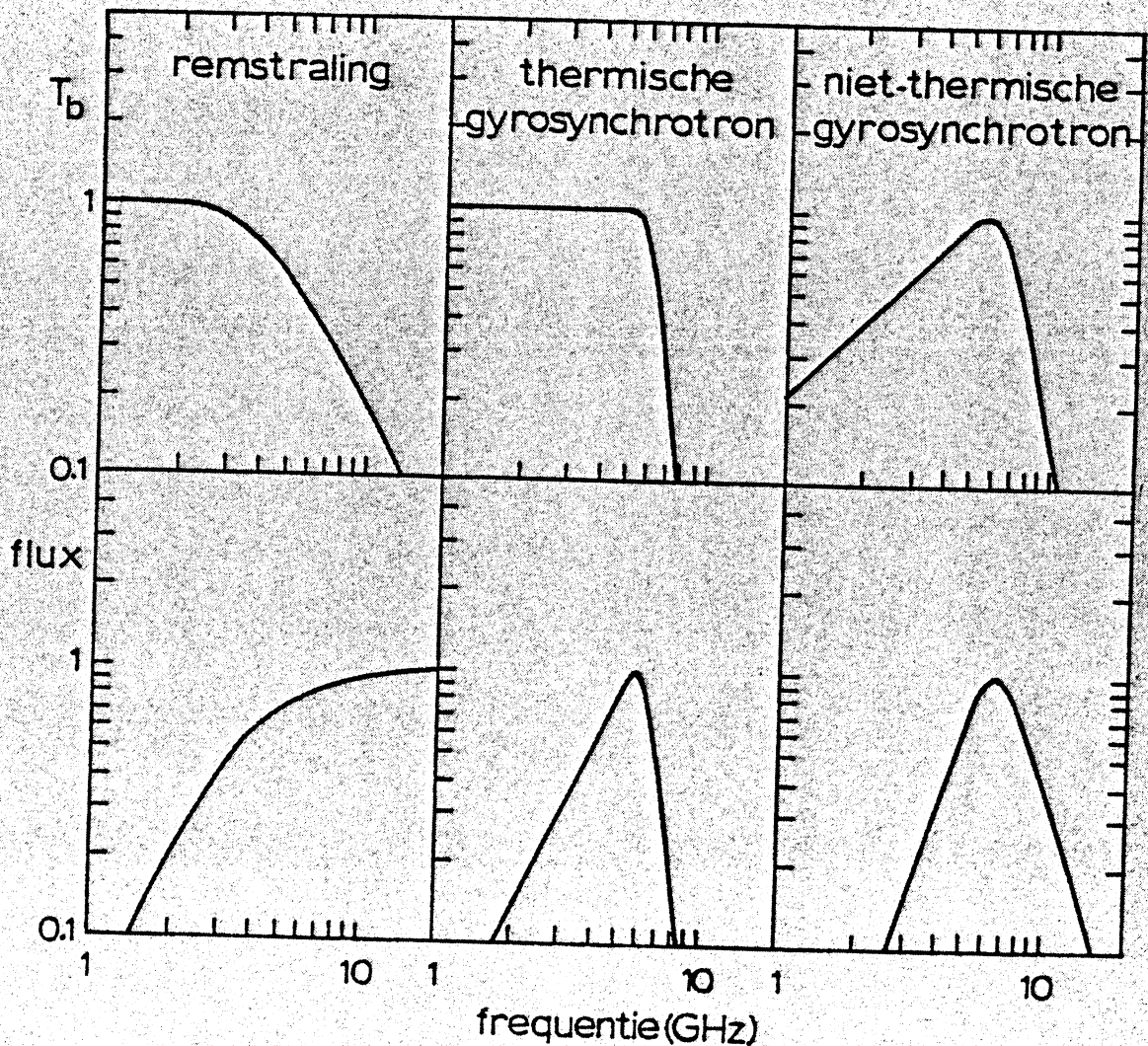


OPWEKKING EN TRANSPORT VAN STRALING

Rob
Rutten
Corrections

Dictaat college AIST

Vijfde druk



R.J. Rutten

Sterrekundig Instituut Utrecht

Copyright © 1988 R.J. Rutten, Sterrekundig Instituut Utrecht, The Netherlands.

Vermenigvuldiging op enigerlei wijze van enigerlei deel van deze uitgave is niet toegestaan zonder voorafgaande toestemming van de auteur.

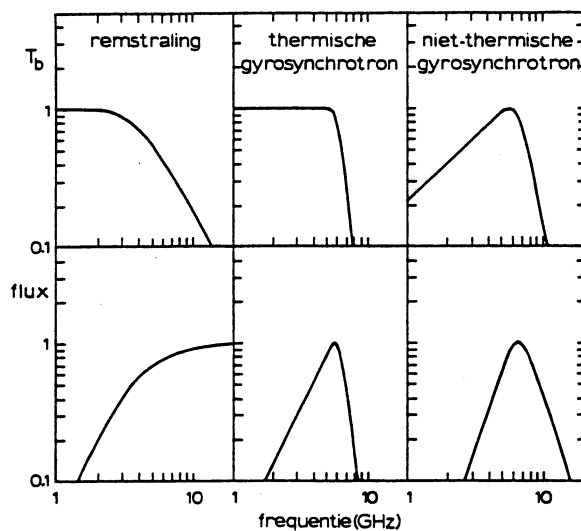
Eerste druk: najaar 1988, gebaseerd op eerdere dictaten van het derdejaarscollege OTS door C. Zwaan en R.J. Rutten, in LaTeX gezet door M. van der Klomp.

Tweede druk: najaar 1989, herzien (met schijfpreparatie door H.M.G. Burm) en uitgebreid (Hoofdstuk 8, met LaTeX-hulp van F. van der Wolf).

Derde druk: najaar 1990, herzien (met inbreng van A. Schadee) en uitgebreid (Appendices A-C).

Vierde druk: najaar 1991, herzien en uitgebreid (Hoofdstuk 8).

Vijfde druk: najaar 2000, correcties van Marco Kouwenhoven en anderen handmatig aangebracht; collegenaamswijziging NGSB → AIST.



Karakteristieke radiospectra voor remstraling, thermische synchrotronstraling en niet-thermische synchrotronstraling, in de vorm van helderheidstemperatuur $T_b(\nu)$ (boven) en irradiantie \mathcal{R}_ν (onder). De knikken en pieken markeren de overgang van optisch dikke naar optisch dunne omstandigheden. Zie Hoofdstuk 8; naar Gary en Hurford.

Inhoud

1	Inleiding	1
1.1	Waarom dit college?	1
1.1.1	EM straling als diagnostiek	1
1.1.2	EM straling als bouwsteen	1
1.2	Dit dictaat	2
1.3	Literatuur	2
1.4	Hoofdzaken	3
1.4.1	Golflengte, frequentie en energie	3
1.4.2	Spectraallijnen en continua	5
1.4.2.1	Spectraallijnen	5
1.4.2.2	Continua	8
1.4.3	Botsingsovergangen en stralingsovergangen	9
1.4.4	Fotoncreatie, fotondestructie, fotonverstrooiing en fotonconversie	11
1.4.5	Optisch dun en optisch dik	12
1.4.6	Thermisch en niet-thermisch	12
1.5	Hamvragen	13
2	Stralingsgrootheden	15
2.1	Inleiding: van lichtkracht naar intensiteit	15
2.2	Intensiteit en afgeleide grootheden	18
2.2.1	Intensiteit	18
2.2.2	Gemiddelde intensiteit	19
2.2.3	Flux	20
2.2.4	Energiedichtheid en stralingsdruk	21
3	Transportvergelijking	23
3.1	Inleiding: emissie en extinctie	23
3.2	Emissiecoëfficiënt	23
3.3	Extinctiecoëfficiënt	23
3.4	Transportvergelijking	25
3.5	Optische weglengte, dikte en diepte	25
3.6	Bronfunctie	27
3.7	Integraaloplossing	28
3.7.1	Straling uit een homogene laag	29
3.7.2	Straling uit een dikke laag	30
3.8	Spectraallijnen	32
3.8.1	Lijnen uit een homogene laag	33
3.8.2	Lijnen uit een dikke laag	34
4	Straling en materie in TE	37
4.1	Inleiding: thermodynamisch evenwicht	37
4.2	TE Stralingswetten	37
4.2.1	Kirchhoff	37
4.2.2	Planck	38
4.2.3	Afgeleide stralingswetten	40

4.2.3.1	Wien benadering	40
4.2.3.2	Rayleigh-Jeans benadering	40
4.2.3.3	Verschuivingswet van Wien	40
4.2.3.4	Stefan-Boltzmann	41
4.2.4	Stralingstemperaturen	41
4.2.4.1	Helderheidstemperatuur	41
4.2.4.2	Antennetemperatuur	41
4.2.4.3	Kleurtemperatuur	42
4.2.4.4	Effectieve temperatuur	42
4.3	TE Materiewetten	42
4.3.1	Maxwell	42
4.3.2	Boltzmann	43
4.3.3	Saha	44
4.3.4	Saha-Boltzmann	45
5	Discrete processen	47
5.1	Inleiding: bb overgangen	47
5.2	De vijf processen	47
5.2.1	Spontane deëxcitatie	47
5.2.2	Stralingsexcitatie	48
5.2.3	Geïnduceerde deëxcitatie	49
5.2.4	Botsingsexcitatie en botsingsdeëxcitatie	49
5.3	Einsteinrelaties	50
5.4	Emissiecoëfficiënt en extinctiecoëfficiënt	51
5.5	Bronfunctie	53
6	Continue processen	55
6.1	Inleiding: soorten processen	55
6.2	Straling van een versnelde lading	55
6.3	Electron + \vec{E} -veld	57
6.3.1	Vrij-vrij overgangen	57
6.3.2	Gebonden-vrij overgangen	58
6.3.3	H ⁻ extinctie	60
6.4	Electron + foton	61
6.4.1	Elastische verstrooiing	61
6.4.1.1	Rayleighverstrooiing	63
6.4.1.2	Resonantieverstrooiing	64
6.4.1.3	Thomsonverstrooiing	65
6.4.2	Inelastische verstrooiing	65
6.4.2.1	Comptonverstrooiing	65
6.4.2.2	Inverse Comptonverstrooiing	66
6.5	Electron + \vec{B} -veld	68
6.5.1	Cyclotronstraling	68
6.5.2	Synchrotronstraling	68
6.6	Collectieve verschijnselen	69
6.6.1	Stof en druppeltjes	69
6.6.2	Čerenkov straling	70
6.6.3	Plasma cutoff	70
6.6.4	Faraday rotatie	70
6.6.5	Razin cutoff	70
6.7	Kernreacties	71
6.7.1	Fusie- en splitsingsreacties	71
6.7.2	Paarannihilatie en paarcreatie	71
7	Stralingstransport	73
7.1	Inleiding: soorten evenwicht	73
7.1.1	TE	73

7.1.2	LTE	73
7.1.3	SE	74
7.1.4	NLTE	75
7.2	Stralingstransport bij LTE	75
7.2.1	Straling uit een dunne LTE laag	76
7.2.2	Straling in een dikke LTE laag: de Rosselandbenadering	76
7.2.3	Straling uit een dikke LTE laag	79
7.3	Stralingstransport bij verstrooiing	80
7.3.1	Pure verstrooiing	80
7.3.2	Absorptie en verstrooiing voor een twee-niveau atoom	81
7.3.3	Effectieve dikte	84
7.3.4	Verstrooide straling uit een dunne laag	85
7.3.5	Verstrooide straling in een dikke laag: de Eddingtonbenadering	85
7.3.6	Verstrooide straling uit een dikke laag	86
7.4	Stralingstransport bij conversie	88
8	Toepassingen	91
8.1	Inleiding: tussen dik en dun	91
8.2	Sterfotoferen	91
8.2.1	Continua van de zon	91
8.2.1.1	Extinctiecoëfficiënt	91
8.2.1.2	Vormingshoogte	92
8.2.1.3	Intensiteit en temperatuurverloop	94
8.2.1.4	Centrum-rand verloop	96
8.2.2	Spectraallijnen van de zon	96
8.2.2.1	Extinctiecoëfficiënt	96
8.2.2.2	Vormingshoogte	97
8.2.2.3	De Na I D lijnen	97
8.2.2.4	De Ca II K lijn	98
8.2.2.5	Intensiteit en temperatuurverloop	100
8.2.2.6	Centrum-rand verloop	101
8.2.2.7	Buiten de rand	101
8.2.3	Spectra van sterfotoferen	101
8.3	Steromhulsels	103
8.3.1	Stercorona's	103
8.3.1.1	Röntgenstraling van de zonnecorona	106
8.3.1.2	Visuele straling van de zonnecorona	106
8.3.1.3	Radiostraling van de zonnecorona	109
8.3.2	Sterwinden	112
8.3.3	Planetaire nevels	114
8.3.3.1	Fotoelektrische verhitting en foton-degradatie	114
8.3.3.2	Fluorescentie	116
8.3.3.3	Botsingsaanslag van verboden lijnen	117
8.3.3.4	Vrij-vrij straling	117
	Epiloog: stralingstransport per electron	119
A	Tabellen en termschema's	121
B	Formularium	131
C	Antwoorden	137
C.1	Hoofdstuk 1	137
C.2	Hoofdstuk 2	142
C.3	Hoofdstuk 3	147
C.4	Hoofdstuk 4	155
C.5	Hoofdstuk 5	160

C.6 Hoofdstuk 6	162
C.7 Hoofdstuk 7	164
Literatuur	170

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Waarom dit college?

Met “straling” wordt hier uitsluitend electromagnetische (EM) straling bedoeld. Die is van tweeërlei astrofysisch belang: diagnostisch en energetisch.

1.1.1 EM straling als diagnostiek

Vrijwel alle astrofysische gegevens bereiken ons gecodeerd in het EM spectrum; het is “de schatkamer van de astronoom” (Pannekoek), een rijke diagnostiek omdat:

- alle objecten EM golven/fotonen uitzenden, dus waarneembaar zijn mits niet door een ander object afgeschermd; EM straling gaat met de lichtsnelheid, fotonen vervallen niet;
- resolutie mogelijk is in richting (beeld), tijd, golflengte en energie (spectrum), trillingsrichting (polarisatie);
- spectraallijnen rijke codering verschaffen van lokale condities (samenstelling, toestands-grootheden, bewegingen, magneetvelden).

De interpretatie van de astrofysische EM diagnostieken vereist kennis van de opwekking en het transport van straling. Dat geldt voor alle terreinen van de astrofysica.

Vraag 1.1 Vergelijk de diagnostische rijkdom van EM straling met de opbrengst van de overige astrofysische informatiedragers:

- neutrino’s;
- baryonen;
- gravitatiestraling;
- meteorieten en komeetinslagen;
- radar;
- sondes, orbiters, landers, encounters;
- astronauten en kosmonauten.

Vraag 1.2 Bedenk soorten waarnemingen en terreinen van astronomisch onderzoek waarbij kennis van opwekking en transport van straling *niet* belangrijk is.

1.1.2 EM straling als structuurbepaler

Vaak zijn straling en stralingstransport energetisch van belang, bijvoorbeeld:

- energietransport in sterren;
- door stralingsdruk aangedreven sterrewinden;

- verhitting van gasnevels door sterren;
- Comptonisatie in accretieschijven;
- stralingstijdperk in de Big Bang.

1.2 Dit dictaat

Dit dictaat gaat over opwekking en transport van straling. Beide onderwerpen zijn lastig en omvangrijk, en van beide wordt hier slechts de basis gelegd. Ze komen weer terug in de doctoraalcolleges.

Dit dictaat is als volgt ingedeeld:

- dit hoofdstuk is een inleiding waarin de hoofdthema's en probleemstellingen van dit onderwerp worden geïntroduceerd en allerlei begrippen worden gedefinieerd;
- hoofdstukken 2 en 3 bevatten macroscopische definities van diverse stralingsgrootheden en van de stralingstransportvergelijking;
- hoofdstuk 4 behandelt straling en materie in thermodynamisch evenwicht;
- hoofdstuk 5 specificeert de discrete stralingsprocessen microscopisch;
- hoofdstuk 6 specificeert de continue stralingsprocessen microscopisch;
- hoofdstuk 7 behandelt stralingstransport;
- hoofdstuk 8 geeft tenslotte astrofysische toepassingen.

De astrofysische toepassingen komen in dit dictaat achteraan om de meer formele presentatie van de basisstof in de hoofdstukken 2-7 niet te verstoren. Het loont echter om ze al te bestuderen bij de behandeling van de relevante formalismen, als voorbeeld en toetsing.

Dit dictaat bevat veel vragen. Ze zijn bedoeld om de lezer aan het denken te zetten, met als reden dat veel van de hier geboden stof doorzichtiger lijkt dan hij is. De vergelijkingen zijn eenvoudig en er wordt niet veel meer dan middelbare-school natuurkunde gevraagd, op hoofdstuk 6 na. Niettemin is de optische dikte van deze materie aanzienlijk. De vragen helpen dat duidelijk te maken. Antwoorden in appendix C.

Dit dictaat gebruikt cgs eenheden. De keus is echter niet belangrijk; de meeste formules zijn hetzelfde in het mksA stelsel.

Dit dictaat behandelt uitsluitend straling in en van *gassen*, inclusief geïoniseerde ("plasma's"). We hebben dus slechts te maken met vrije atomen, ionen, moleculen en electronen, eventueel in een magneetveld. Deze eenvoudige materie levert toch lastige stof — omdat je nog geen fysisch gevoel hebt ontwikkeld voor gassen waar je niet zomaar doorheen kijkt. De zon is van gas maar niet doorzichtig!

Vraag 1.3 Voor welke astrofysische onderzoeksobjecten is vaste-stof fysica vereist?

1.3 Literatuur

Geen boek dekt deze stof precies, maar dit dictaat volgt delen van: 4E00-413

- Rybicki en Lightman: *Radiative Processes in Astrophysics*, Bibnr. ~~FYS+ST-2He-107~~. Te verkrijgen bij AS². Heel goed; moeilijker dan dit dictaat en ook goed voor doctoraalcolleges plasma- en hoge-energie astrofysica. Aanschaf sterk aanbevolen.

Verder zijn nuttig om in te zien:

- 4E00-584
- Harwit: *Astrophysical Concepts*. Bibnr. ~~FYS+ST-2D506~~. Breed en goed.

- Böhm-Vikense: *Stellar Atmospheres*. 4E00-504

- Gray: *Observation and Analysis of Stellar Photospheres*. Bibnr. ~~FYS+ST 2D 586~~. 4E40-412
Eenvoudiger dan dit dictaat; interessant wegens de nadruk op instrumentatie en waarnemingsmethoden in de optische sterspectrometrie.
- Novotny: *Introduction to Stellar atmospheres and Interiors*. Bibnr. ~~FYS+ST 2HB 209~~. 4E00-403
Wat eenvoudig en ouderwets.
- Bowers en Deeming: *Astrophysics I & II*. Hier deel I. Bibnr. ~~FYS+ST 2D 564~~. 4E00-567
Te verkrijgen bij AS². Beknopt maar heel breed, soms slordig.

Ook zijn hier en daar verwijzingen opgenomen naar meer specialistische literatuur, vooral in de toepassingen in hoofdstuk 8. De referenties staan op p. 170.

1.4 Hoofdzaken

Hier volgt een korte typering van de thema's waaraan in dit dictaat aandacht wordt besteed, met introductie van allerlei terminologie en een overzicht van de voornaamste vraagstellingen, bedoeld als kenschets van de problematiek en als houvast in de meer gedetailleerde presentatie in de volgende hoofdstukken.

1.4.1 Golflengte, frequentie en energie

EM straling heeft *golfskarakter*. Uit de vier Maxwellvergelijkingen volgen golfvergelijkingen voor het elektrische veld \vec{E} en het magnetische veld \vec{B} waaraan transversale golven voldoen, met $\vec{E} \perp \vec{B}$, $\vec{B} \perp \vec{k}$ en $\vec{E} \perp \vec{k}$, waarbij de golfvector \vec{k} de voortplantingsrichting specificieert.

De derde loodrechtheid geldt in vacuüm en in isotrope media waarin de elektrische susceptibiliteit χ een scalar is. In media zoals dubbelbrekende kristallen is χ een tensor en verschilt de hoek tussen \vec{E} en \vec{k} van 90°.

De frequentie en golflengte hangen samen volgens:

$$\nu = c/\lambda, \tag{1.1}$$

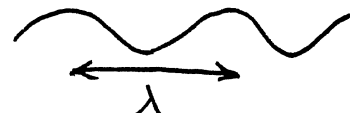
ν = frequentie, eenheid $s^{-1} = \text{Hz} = \text{cy/s}$ (cycles per second);

c = lichtsnelheid; in vacuüm $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$;

λ = golflengte, eenheid cm of Ångström ($1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm}$) of nm ($1 \text{ nm} = 10 \text{ Å}$);

σ = golfgetal, gedefinieerd als $\sigma = 1/\lambda_{vac}$ of $\nu = \sigma c_{vac}$. Eenheid cm^{-1} ;

ω = hoek- of cirkelfrequentie, gedefinieerd als $\omega = 2\pi\nu$.



In een medium wordt c ^{kleiner} en λ ^{groter} met toenemende brekingsindex n terwijl ν en σ niet veranderen. In dit dictaat wordt de brekingsindex verwaarloosd door $n = 1$ te stellen. Voor de golflengtes van spectraallijnen geldt de volgende conventie: voor $\lambda < 2000 \text{ Å}$: $\lambda = \lambda_{vac}$; voor $\lambda > 2000 \text{ Å}$: $\lambda = \lambda_{air}$ (15° C, 760 mm Hg). Omrekeningstabel in Allen, *Astrophysical Quantities*, §32.

EM straling heeft ook *deeltjeskarakter*. De Maxwellvergelijkingen voldoen niet op de microscopische schaal waarop kwantisatie merkbaar wordt: de wisselwerking tussen EM straling en materie gaat middels *fotonen* met energie:

$$E = h\nu \tag{1.2}$$

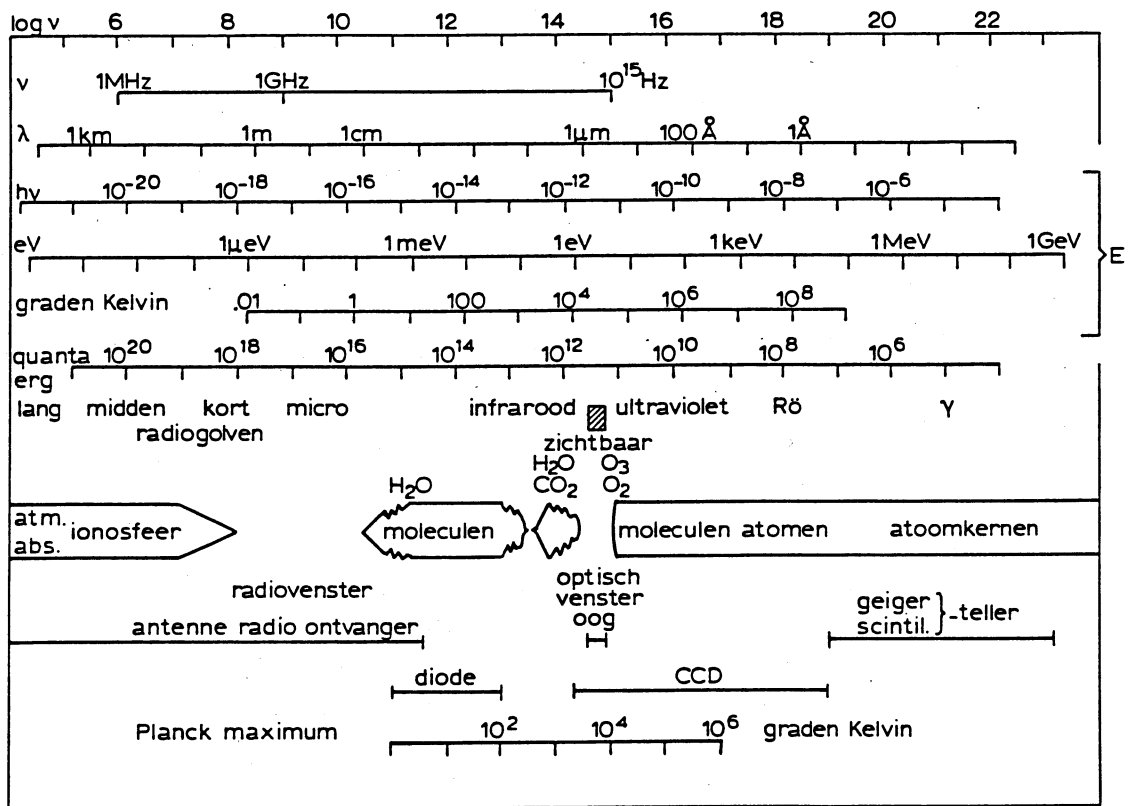
met h = de constante van Planck = $6.626 \times 10^{-27} \text{ erg sec}$ ($1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$).

Het astrofysisch gebruikte EM spectrum omvat maar liefst zo'n vijftien dekaden (Figuur 1.1). Elk golflengtegebied heeft zijn eigen karakteristieke stralingsprocessen. De aard van de waargenomen objecten hangt daarmee samen. Vaak is de straling aan de uiteinden van het spectrum (radio- en Röntgenstraling) vooral van niet-thermische oorsprong, terwijl de straling op tussenliggende golflengtes meest thermisch van origine is.

Elk golflengtegebied heeft ook zijn eigen karakteristieke waarnemingstechnieken (Tabel 1.2). Het openleggen van het EM spectrum is na de oorlog goed op gang gekomen, dankzij radio-astronomie en ruimtevaart. Maar aan de beeldscherpte valt nog veel te doen (Tabel 1.1); dat vereist veelal interferometrie vanuit de ruimte.

	Radio	Sub-mm	IR	Visueel	UV	ver-UV	Röntgen	γ
Openlegging	++	~	+	++	+	-	+	~
Beeldscherpte	+	-	~	+	-	-	-	-

Tabel 1.1: Stand van zaken in de waarnemingstechnieken



Figuur 1.1: Het EM spectrum. Naar Code, Astron. J. 65, 279

1.4.2 Spectraallijnen en continua

Astronomische spectra tonen *continua* met daarop gesuperponeerd *spectraallijnen*, in *absorptie* of in *emissie* ten opzichte van het lokale continuum. Zie Figuur 1.2 en Figuur 1.3 voor voorbeelden.



Spectraallijnen heten "lijnen" omdat spectrografen doorgaans rechte intreespleten hebben. De monochromatische afbeelding daarvan in het spectrum levert heldere of donkere lijnen dwars op de dispersierichting.

	Radio	IR	Visueel	UV	Röntgen
Jargon ν Jargon E	MHz mJansky	$\mu\text{m}, \text{cm}^{-1}$ T_B	$\text{\AA}, \text{nm}$ erg, I/I_0	\AA erg	KeV Uhuru counts
Openlegging Faciliteiten	radar VLA, WSRT	IRAS (ISO)	Galilei UK/NL, ESO, USA	IUE IUE	Uhuru (AXAF)
Afbeelding Dispersie Detectie	apertuursynthese filters amplitude+fase	spiegel filters energie	lens, spiegel tralie fotonen collectief	spiegel tralie enkele fotonen	masker tralie, filters individuele fotonen
Continua Lijnen	remstraling spin-spin	vrij-vrij moleculen	gebonden-vrij atomen	Thomson ionen	Compton atoomkernen
Karakteristiek object	melkwegstelsel	IM	koele ster	hete ster	accretieschijf

Tabel 1.2: *Allerlei per spectraalgebied*

Vraag 1.4 Wat voor spectraallijnen toont de zon als er géén intreespleet wordt gebruikt? Bij zonsverduisteringen fotografeert men dikwijls het spectrum van de uiterste zonsrand "spleetloos". Hoe zien die spectra er uit? Waarom doet men dat?

1.4.2.1 Spectraallijnen

Spectraallijnen zijn het gevolg van *discrete* energieovergangen zoals de sprongen tussen gebonden niveau's van een valentie-electron in een atoom: *gebonden-gebonden* overgangen. *Excitatie* omhoog kan geschieden door opname van kinetische energie (*botsingsexcitatie*) of door absorptie van een foton (*stralingsexcitatie*). *Deëxcitatie* omlaag kan evenzo per botsing (*botsingsdeëxcitatie*) of door emissie van een foton (*stralingsdeëxcitatie*). Deze energieuitwisseling gaat middels quanta $h\nu = \Delta E_{mn}$ van het bij de bb overgang horende energieverschil $\Delta E_{mn} = E_m - E_n$ tussen de niveaus m en n ($m > n$); de betrokken fotonen hebben de bijbehorende specifieke golflengte $\lambda = hc/\Delta E_{mn}$.

Afkorting: bb = *bound-bound*.

Notatie: Fe I is het spectrum van neutraal ijzer, Fe II is het spectrum van éénmaal geïoniseerd ijzer (Fe^+), etc.

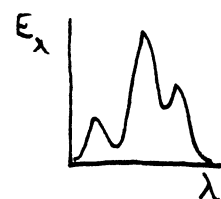
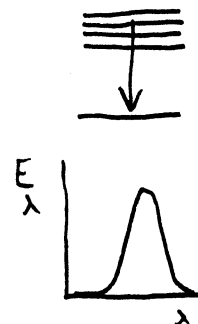
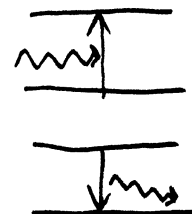
Spectraallijnen worden *verbreed* met een kansverdeling bepaald door:

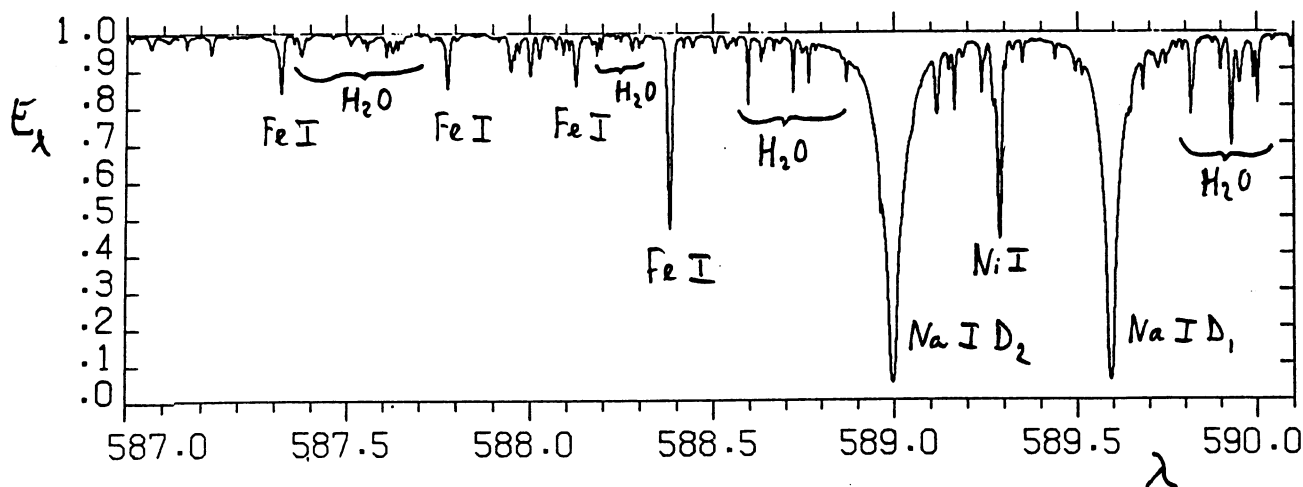
- *stralingsdemping*, door eindige verblijftijd in niveau's hoger dan het grondniveau, die daardoor onscherp zijn (*natuurlijke lijnbreedte* ten gevolge van de onzekerheidsrelatie);
- *botsingsdemping*, door storingen van naburige deeltjes;
- *Dopplerverbreiding*, een ensemble-gemiddelde over de Dopplerverschuivingen per stralend atoom.

De kansverdeling heet *lijnprofiel*.

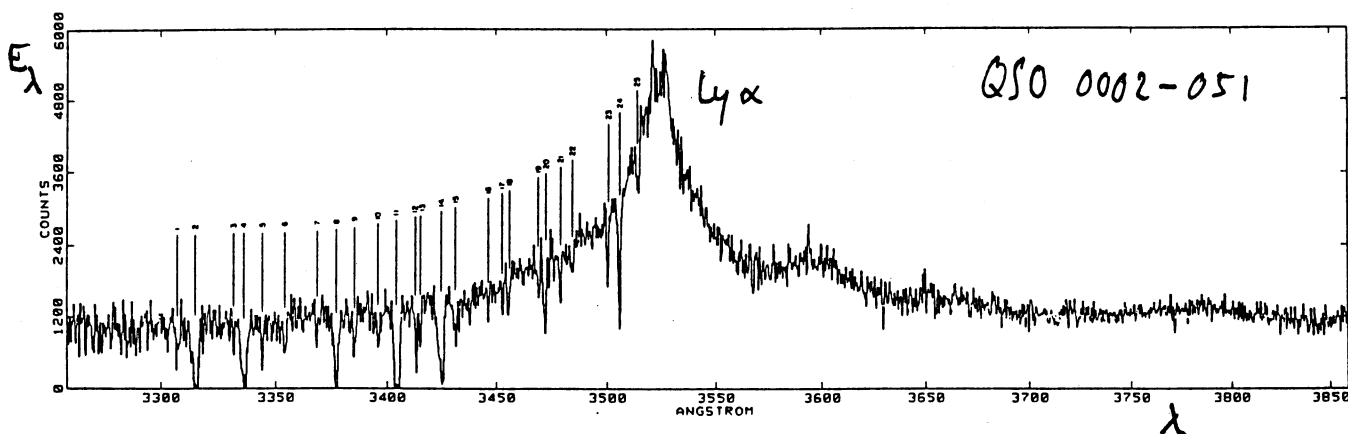
Spectraallijnen worden *gesplitst* door:

- (*hyper-*)*fijnstructuur* ten gevolge van isotopsplitsing en interactie van de atoomkern met de electronen (spin en magnetisch moment);
- magnetische velden (*Zeemansplitsing*);
- grootschalige bewegingen in de gezichtsrichting (*Dopplersplitsing*).

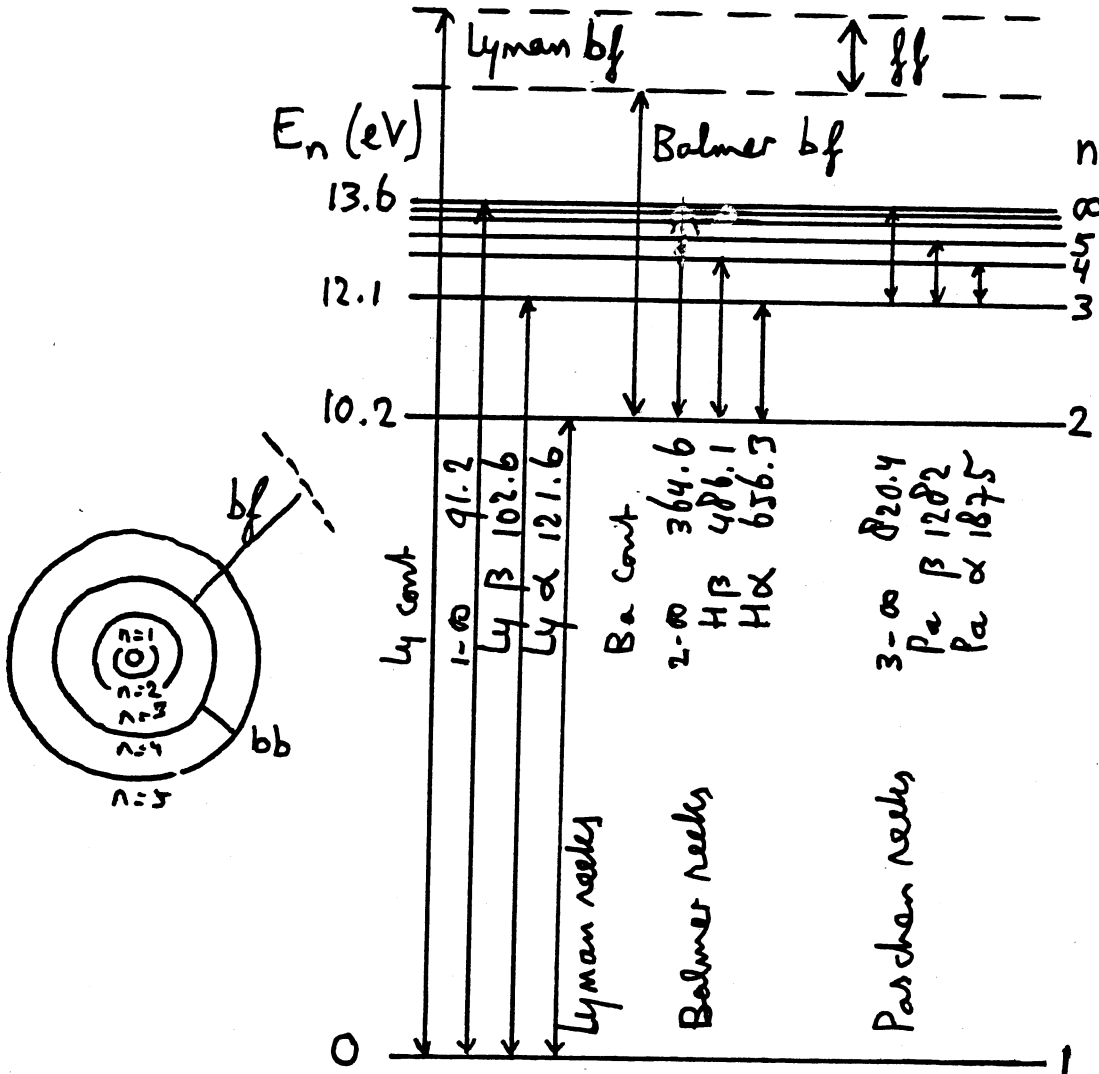




Figuur 1.2: De Na I D lijnen in het zonnenspectrum. Dit zijn de resonantielijnen (sterkste lijnen uit grondniveau) van Na I; de naam "D" stamt van Fraunhofer die de markantste donkere plekken in het zonnenspectrum alfabetisch nummerde. Ze corresponderen met de twee mogelijke overgangen tussen het grondniveau en de twee eerste aangeslagen niveau's van het neutrale natrium atoom (zie Na I termschema in Appendix A). Het zijn dezelfde spectraallijnen waarin de natriumlampen langs de snelwegen geel schijnen. Hier zijn ze in absorptie: de helderheid van de zon is kleiner op de lijngolflengten dan in het aangrenzende continuum. Dit stukje spectrum is uit de "fluxatlas" van Kurucz et al. (1984); verticaal staat de over de zichtbare zonnenschijf gemiddelde intensiteit. Horizontaal de golflengte in nm.



Figuur 1.3: De H I Ly α lijn in het spectrum van de quasar Q002+051. Deze resonantielijlijn correspondeert met de overgang tussen het grondniveau van waterstof en het eerste aangeslagen niveau (zie Figuur 1.4): het is de eerste (~~hoger~~ hogere) golvlige lijn van de Lymanreeks. Hij is hief te zien als brede emissiepiek rond 3530 Å. Op kortere golflengten is het Ly α "forest" te zien: een woud van Ly α lijnen met kleinere roodverschuiving. Ze zijn allemaal in absorptie. De meest markante zijn genummerd van 1 tot 25, maar nog veel meer zijn wellicht verborgen in de ruis. Waarneming met 2.54 m reflector te Las Campanas (Chili), door Young et al. (1982).



Figuur 1.4: Bohr-atoom en Grotrian diagram voor waterstof. Voor de eerste drie lijnereeksen in het spectrum van waterstof zijn de sprongen corresponderend met de eerste twee lijnen (bb) en met de seriegrens (∞) met hun golflengte aangegeven. Ook vrij-vrij (ff) en gebonden-vrij (bf) overgangen zijn ingetekend. De golflengten zijn in nm. Het is gebruikelijk om de Balmerlijnen aan te duiden als H α , H β etc., het bf Balmercontinuum met Ba cont; de bb Lymanovergangen als Ly α , Ly β etc., het bf Lymancontinuum met Ly cont.

Bij onvoldoende *resolutie* (in λ , of in x, y, z, t , of in polarisatierichting) levert zulke splitsing lijnverbreding.

Spectraallijnen hangen altijd samen met discrete bb processen maar het is niet zo dat emissielijnen in een waargenomen spectrum altijd het directe gevolg zijn van fotonemissie door stralingsdeëxcitatie, of dat absorptielijnen altijd het directe gevolg zijn van fotonabsorptie door stralingsexcitatie. Dat hangt af van het stralingstransport door het medium. In het algemeen zijn spectraallijnen het gevolg van de *extra* bb processen die op de specifieke lijngolflengte in het medium kunnen optreden, naast de processen die het continue spectrum op die golflengte en de naastliggende golflengten veroorzaken.

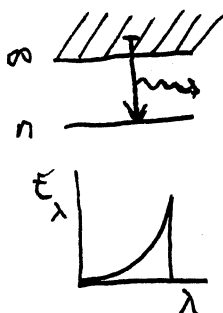
Vraag 1.5 Wat is H I? En H II en H III?
Hebben deze spectra spectraallijnen? Waarbij hoort de 21 cm lijn?
Bevat Fe XII spectraallijnen? Zo ja, in wat voor golflengtegebied?

Vraag 1.6 Vergelijk de waargenomen golflengten van de Na I D lijnen in Figuur 1.2 en de Ly α lijn in Figuur 1.3 met die van de bijbehorende bb sprongen in de betreffende termschema's (Appendix A). Wat is je conclusie?
Figuur 1.3 toont een groot aantal spectraallijnen met $\lambda < 3530 \text{ \AA}$: het Ly α forest. Hyperfijnstructuur, Zeemansplitsing of Dopplersplitsing?

1.4.2.2 Continua

Continua zijn het gevolg van niet-discrete processen waarbij fotonen worden geabsorbeerd of geëmitteerd:

– *gebonden-vrij overgangen* van atomen en moleculen.



Vrijmaken van een valentie-electron uit een gebonden toestand n , door absorptie van een foton met energie groter of gelijk aan de ionisatie-energie $\Delta E_{\infty n} = E_{\infty} - E_n$ vanuit dat niveau (*stralingsionisatie*), of invangen van een vrij electron (*recombinatie*) in een gebonden toestand, onder emissie van een foton met energie groter of gelijk aan $\Delta E_{\infty n}$ (*stralingsrecombinatie*). De *vrije* toestanden boven de *ionisatiegrens* zijn niet discreet omdat het vrije electron willekeurige kinetische energie ($1/2 m_e v^2$ mag hebben: $h\nu = \Delta E_{\infty n} + (1/2) m_e v^2$). Ionisatie en recombinatie kunnen ook weer geschieden door opname of afgifte van kinetische energie (*botsingsionisatie en botsingsrecombinatie*), zonder foton.

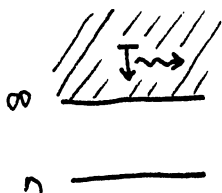
Afkorting: bf = bound-free.

Notatie: Fe I bf is het continue spectrum horend bij de ionisatie van neutraal ijzer (*seriegrenscontinuum* van Fe). Fe II bf is het gebonden-vrij spectrum van Fe^+ , etc.

– *dissociatie en associatie* van moleculen;

– *kernsplitsing en kernfusie*;

– *vrij-vrij overgangen = remstraling*.



Dit is emissie of absorptie van fotonen tengevolge van de versnelling of vertraging van een geladen deeltje in een Coulombveld, bijvoorbeeld bij botsing van een ion en een electron.

Afkorting: ff = free-free.

Notatie: Fe I ff is het spectrum tengevolge van interactie tussen een vrij electron en een Fe^+ ion. Fe II ff is het vrij-vrij spectrum van Fe^{++} , etc.

– *cyclotronstraling, synchrotronstraling*.

Ten gevolge van versnelling van een lading in een magneetveld;

– *paarannihilatie, paarcreatie*;

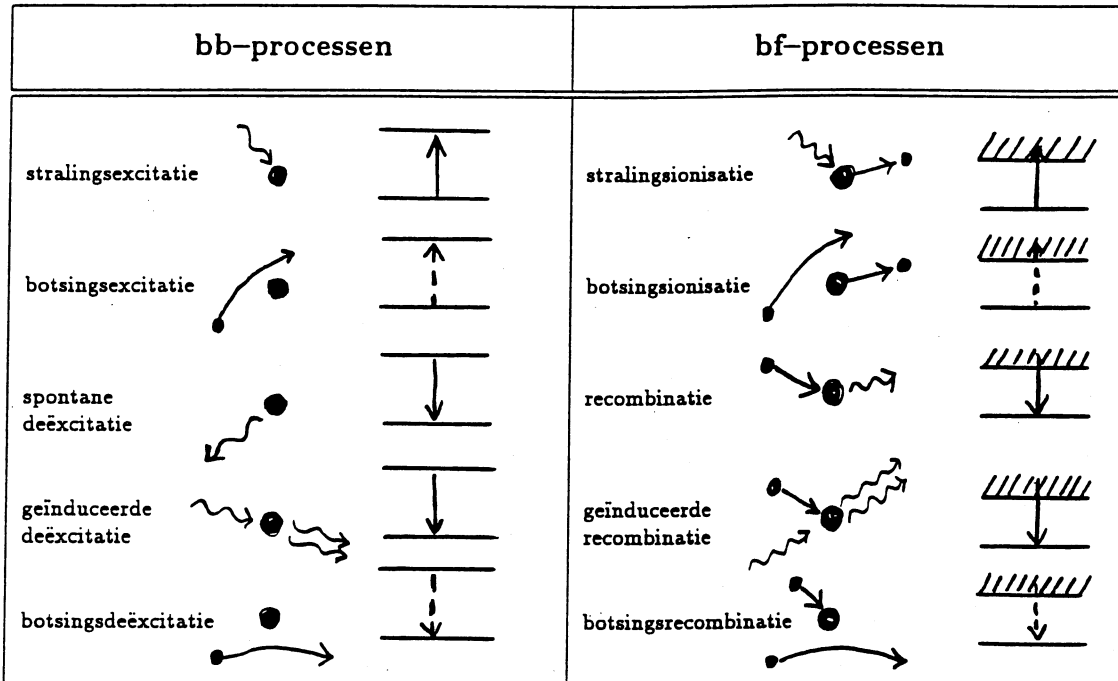
– *Čherenkovstraling*.

Boegschok van een deeltje dat in een medium de lokale lichtsnelheid overschrijdt.

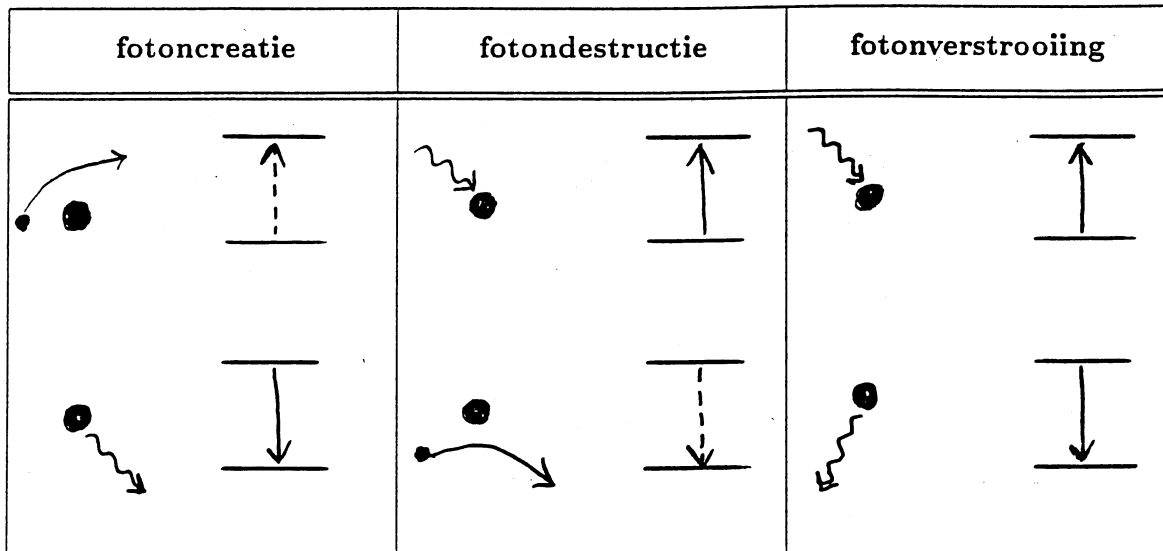
Een speciaal, astrofysisch belangrijk, geval vormen de bf en ff processen van neutraal waterstof met een extra electron, het H^- ion. H^- bf ionisatie is losmaking van het tweede gebonden electron in H^- ; H^- bf recombinatie is invang van een vrij electron door een neutraal waterstofatoom in de gebonden H^- toestand (er is er maar één); H^- ff is emissie of absorptie

ten gevolge van de versnelling of vertraging van een vrij electron in het Coulombveld van een neutraal waterstofatoom.

Vraag 1.7 Wat zijn HI bf processen? Wat is de notatie voor het remstralingspectrum tengevolge van botsingen tussen vrije protonen en electronen?



Figuur 1.5: De bb en bf processen.

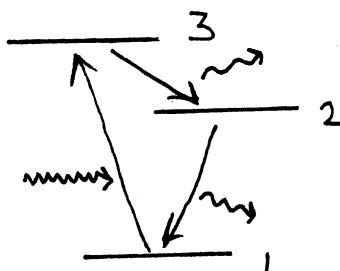


Figuur 1.6: Drie paren bb interacties: creatie, destructie en verstrooiing van fotonen.

1.4.3 Botsingsovergangen en stralingsovergangen

Gebonden-gebonden excitatie en deëxcitatie, gebonden-vrij ionisatie en recombinitie, moleculaire dissociatie en associatie *etc.* kunnen geschieden zowel door opsouperen dan wel vrijmaken van stralingsenergie in de vorm van fotonen als door opsouperen dan wel vrijmaken van kinetische energie middels een deeltjesbotsing. Figuur 1.5 toont alle vijf soorten overgangen die mogelijk zijn tussen twee discrete energieniveaus (*bb*) en tussen een gebonden en een vrije toestand (*bf*). Bij de tweede en vijfde processen in elke kolom zijn geen fotonen betrokken. Het vierde proces, respectievelijk *geïnduceerde deëxcitatie* en *geïnduceerde recombinitie*, kun je zien als een resonantieproces: een foton van precies de goede energie triggert stralingsdeëxcitatie — ofwel, het aangeslagen atoom resoneert mee met de langskomende golf. Het vrijkomende foton heeft dezelfde eigenschappen (frequentie, richting, golfase) als het inducerende foton.

Bij meer niveau's zijn omwegen mogelijk, zie Figuur 1.7.



Figuur 1.7: Fotonconversie.

Vraag 1.8 Ga na dat een fotonconversiereeks als in Figuur 1.7 kan bestaan uit $Ly\beta$ omhoog, gevolgd door $H\alpha$ en $Ly\alpha$ omlaag. Kun je ook zo'n trits maken met *bf* overgangen, bijvoorbeeld het Ly cont?

Vraag 1.9 Is met geïnduceerde deëxcitatie kinetische energie gemeoid? En met geïnduceerde recombinitie?

Vraag 1.10 Ga na dat botsingsrecombinitie een drie-deeltjes botsing vereist. Wanneer zal botsingsrecombinitie een zeldzaam proces zijn?

Vraag 1.11 Teken een diagram als in Figuur 1.5 voor *ff* overgangen. Bevat dit ook vijf processen? Hoeveel deeltjes zijn bij elk proces betrokken?

1.4.4 Fotoncreatie, fotondestructie, fotonverstrooiing en fotonconversie

In Figuur 1.6 zijn de *bb* processen van Figuur 1.5 in drie *paren* samengenomen:

- botsingsexcitatie gevolgd door stralingsdeëxcitatie (spontaan of geïnduceerd) = *creatie foton* = omzetting kinetische energie in straling;
- stralingsexcitatie gevolgd door botsingsdeëxcitatie = *destructie foton* = omzetting straling in kinetische energie;
- stralingsexcitatie gevolgd door stralingsdeëxcitatie = *verstrooiing foton* = herverdeling van straling.

Bij *verstrooiing* verandert tenminste de richting tussen inkomend en verstrooid foton, met een isotrope dan wel anisotrope herverdeling (*richtingsredistributie*) al naar gelang het proces. De frequentie kan gelijk blijven bij *bb* processen tussen dezelfde twee niveaus, bijvoorbeeld bij *resonantieverstrooiing* vanuit een grondniveau; dan is de verstrooiing *coherent* of *monochromatisch* als de frequentie precies gelijk blijft. Het kan ook zijn dat de frequentie een

beetje verandert door herverdeling over de lijnbreedte: *frequentieredistributie*.

De procesparen in Figuur 1.6 gelden voor twee niveau's; bij meerdere niveau's kan *fotonconversie* zoals in Figuur 1.7 optreden, waarbij een energierijk foton wordt omgezet in twee andere op langere golflengten.

In de eerste twee paren worden lokale kinetische energie en stralingsenergie in elkaar omgezet. Deze procesparen koppelen het stralingsveld aan de lokale omstandigheden. Bij voldoende grote botsingsfrequentie valt er sterke koppeling te verwachten tussen het lokale stralingsveld en de lokale deeltjessnelheden: *equipartitie* van energie.

Als botsingsexcitaties en botsingsdeëxcitaties zeldzaam zijn kan het stralingsveld (op de golflengte van de spectraallijn die bij deze *bb* overgang hoort) echter onafhankelijk zijn van de lokale deeltjesenergieën. Dit zal het geval zijn als de deeltjesdichtheid zo laag is dat er überhaupt weinig interacties zijn, maar ook als er — op de gegeven golflengte — voornamelijk coherente verstrooiingsprocessen plaats hebben. De door ons waargenomen straling zegt dan wellicht niets over de plaats waar we de straling vandaan zien komen, *i.e.* waar de gedetecteerde fotonen werden geëmitteerd: het ingevangen foton dat de voorafgaande excitatie van het laatste verstrooiende atoom verzorgde kwam van elders, en de oorspronkelijke creatie van dat quantum stralingsenergie door een botsingsexcitatie–stralingsdeëxcitatie paar gebeurde wellicht vele verstrooiingsprocessen eerder en heel ergens anders. Onderweg in zo'n reeks *bb* verstrooiingsprocessen behoudt zo'n quantum dan zijn identiteit, met informatie over zijn creatie: namelijk de typische bewegingsenergie van de deeltjes op de plaats waar het werd aangemaakt. Bij elke verstrooiing nadien fungeert het kortstondig als potentiële energie van een aangeslagen atoom om vervolgens opnieuw te worden uitgezonden in een andere richting. Deze *niet-lokaal bepaalde aard* van straling ten gevolge van verstrooiing vormt het kernprobleem van het stralingstransport.

Deze beschrijving betreft *bb* verstrooiing, *i.e.* lijnfotonen; bij elastische verstrooiing van continuümfotonen kan evenzo *niet-lokale* karakterisering van het stralingsveld optreden. Bijvoorbeeld mist om een lantaarn. Je ziet de mist, niet de lantaarn; de kleurtemperatuur van de straling is echter die van de lamp en niet die van de mist.

Vraag 1.12 Figuur 1.6 bevat niet alle mogelijke combinaties van de vijf *bb* processen in Figuur 1.5. Hoe zit het met de andere paren?

Vraag 1.13 Zijn er voor *bf* processen soortgelijke paren voor creatie, destructie en verstrooiing? En voor *ff* processen?

Vraag 1.14 Ga na dat ook bij fotonconversie het probleem zich kan voordoen dat waargenomen fotonen niet daar zijn gecreëerd waar je ze vandaan ziet komen. Zijn er tritsen processen tussen drie niveau's waarbij er wel koppeling met de lokale kinetische deeltjesenergieën is?

Vraag 1.15 Is de kleurtemperatuur van de blauwe hemel die van de zon? En de kleurtemperatuur van de volle maan?

1.4.5 Optisch dun en optisch dik

Een object is *optisch dun* op een golflengte als het voor straling op die golflengte doorzichtig is, en *optisch dik* als zulke straling er niet doorheen komt. De waarnemer “kijkt” door een optisch dun object heen, en door een optisch dik object niet.

Een optisch dik object heeft een “oppervlak” (*fotosfeer*) waar je blik blijft steken — waar de fotonen die je detecteert hun laatste interactie hadden. Bij een voorwerp van vaste stof is dat een scherp gedefinieerde laag, maar ook bij een optisch dik gasvormig voorwerp kunnen we van oppervlak spreken als benaming voor de laag waaruit fotonen ontsnappen. Bij de zon bijvoorbeeld is de bolschil waar het zichtbaar licht uit ontsnapt maar enkele honderden km dik, terwijl de zonsdiameter 1400 Mm bedraagt. De vrijkomende straling bevat informatie over deze laag. Als de fotonen in dat laatste proces waren gecreëerd is dat *lokale* informatie, maar

in het geval van verstrooiing hoeft dat niet zo te zijn — zoals bij de optisch dikke mistbank om een lantaarn.

Een optisch dun object daarentegen verandert niets aan de meerderheid van de er doorheen vliegende fotonen. Slechts enkele zullen interactie ondergaan (destructie, verstrooiing of conversie) en er zullen wat nieuwe fotonen bijkomen (door creatie, verstrooiing of conversie). Er is géén oppervlak; de fractie eigen bijdrage aan het stralingsveld bevat *ongelokaliseerde* informatie over het hele object.

Vraag 1.16 Is de zon voor alle straling optisch dik? Ligt het “oppervlak” waar het zonlicht vandaan komt voor alle golflengten even diep in de zon? Waar zal dat van af hangen?

Vraag 1.17 Voor neutrino's is de zon “optisch” dun. Heeft het dan wel zin om neutrino's uit de zon te detecteren? Hoe kan men ze onderscheiden van de neutrino's uit andere sterren?

1.4.6 Thermisch en niet-thermisch

In het procespaar dat fotoncreatie levert wordt thermische bewegingsenergie per botsing in een foton omgezet. De zo gecreëerde fotonen zijn *thermisch*. Bij voldoende grote botsingsfrequentie wordt koppeling bereikt tussen stralingsveld en deeltjessnelheden: er worden zoveel stralingsquanta bij botsingen gecreëerd en vernietigd dat er equipartitie is tussen stralingsenergie en kinetische energie. Zulke straling is dan *thermisch* op de bb golflengte: in overeenstemming (in “evenwicht”) met de kinetische temperatuur ter plekke.

Bij bb verstrooiing wordt het nieuwe foton geleverd door een soortgelijk foton dat van elders kwam; bij veel verstrooiing of fotonconversie kan de koppeling tussen straling en lokale kinetische temperatuur vervallen. Al naar gelang de oorsprong van de fotonen kan een heel stralingsveld al dan niet thermisch zijn.

Een stralingsveld dat in evenwicht is met de Maxwellverdeling voor de deeltjessnelheden daar waar het ontstaat volgt de Planckfunctie behorend bij de temperatuur op die plek (hoofdstuk 4).

Vraag 1.18 Bij lagere botsingsfrequentie neemt de kans op bb verstrooiing toe. Waarom?

Vraag 1.19 Als cyclotron- en synchrotronstraling, paarannihilatie of botsingen met niet-thermische deeltjes bijdragen is het stralingsveld veelal niet thermisch. Waarom?

Vraag 1.20 Is de dampkring van de aarde in thermisch evenwicht met de zonnestraling? En met het licht van de blauwe hemel?

1.5 Hamvragen

De paragrafen hierboven definiëren de astrofysische vragen die men zich bij elk waargenomen object dient te stellen, zowel voor continua als voor elke bestudeerde spectraallijn:

- wordt het object gezien in emissie of absorptie?
- is het object optisch dik of dun?
- uit welke laag komt de waargenomen straling?
- hoe staat het met de excitatie, deëxcitatie, ionisatie, associatie, snelheden, magneetvelden *etc.* daar ter plekke?
- welke processen leveren de waargenomen fotonen?
- zijn de waargenomen fotonen in hun laatste proces gecreëerd, of is verstrooiing of fotonconversie belangrijk?
- is de straling thermisch of niet-thermisch?

De antwoorden op deze vragen bepalen de diagnostiek die het EM spectrum verschaft voor het bedrijven van astrofysica. In de volgende hoofdstukken wordt dit gereedschap aangescherpt.

- Vraag 1.21* In een bekende natuurkundepraktikumproef wordt met een spectroscop gekeken naar een vlam waarin zout (NaCl) wordt gestrooid. Men ziet dan de Na I D lijnen als emissielijnen. Zo'n vlam is optisch dun in de Na I D lijnen; maak daar gebruik van om bovenstaande vragen te beantwoorden.
- Vraag 1.22* Vervolgens wordt dezelfde proef uitgebreid door de met zout bestrooide vlam in projectie tegen een helderder continuumbron te bekijken. De twee Na I resonantielijnen ziet men dan als absorptielijnen op het heldere achtergrondcontinuum. Wat is er nu anders?
- Vraag 1.23* Het zonnenspectrum in Figuur 1.2 toont de Na I D lijnen ook in absorptie. In veel schoolboeken verklaart men dit uit analogie met de tweede proef, maar pas aan het einde van dit dictaat zullen we de juistheid van deze analogie kunnen vaststellen (hij gaat slechts gedeeltelijk op). Waarom zijn de natriumlijnen van de zon zo veel moeilijker te begrijpen dan die van de vlam?
- Vraag 1.24* In het quasarspectrum in Figuur 1.3 verschijnt de Ly α lijn niet in absorptie maar in emissie. Houdt dat in dat het ontstaan van deze lijn makkelijker te begrijpen is?

Hoofdstuk 2

Stralingsgrootheden

2.1 Inleiding: van lichtkracht naar intensiteit

Hoe zullen we de straling van een astrofysisch object beschrijven? We beginnen met een heuristische inleiding:

totale lichtkracht L [erg s⁻¹],

de totale door een object per tijdseenheid uitgestraalde energie. Engelse naam: *luminosity*. Dat is een getal zonder veel diagnostische waarde, slechts tijdsafhankelijk. Een eerste verfijning is spectrale scheiding:

monochromatische lichtkracht L_ν [erg s⁻¹ Hz⁻¹],

de per tijdseenheid op de frequentie ν per eenheid van bandbreedte uitgezonden energie, met $L \equiv \int_0^\infty L_\nu d\nu$. Maar je meet niet makkelijk alles rondom een object. Op aarde meet je slechts:

irradiantie \mathcal{R}_ν [erg cm⁻² s⁻¹ Hz⁻¹],

de totale energie van alle fotonen van het object die per tijdseenheid en per eenheid van bandbreedte op de gegeven frequentie ν een oppervlakte-eenheid passeren van een meetvlak dat net buiten de aardse dampkring loodrecht op de richting naar het object is geplaatst. Binnenwaartse extrapolatie tot het oppervlak van het object of tot een bolschil er binnen in levert een veralgemening:

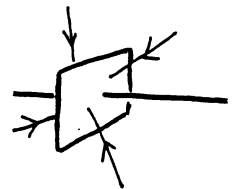
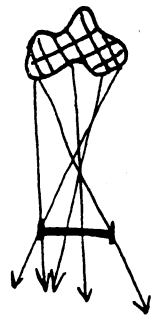
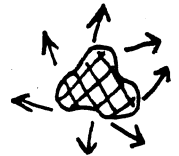
flux \mathcal{F}_ν [erg cm⁻² s⁻¹ Hz⁻¹],

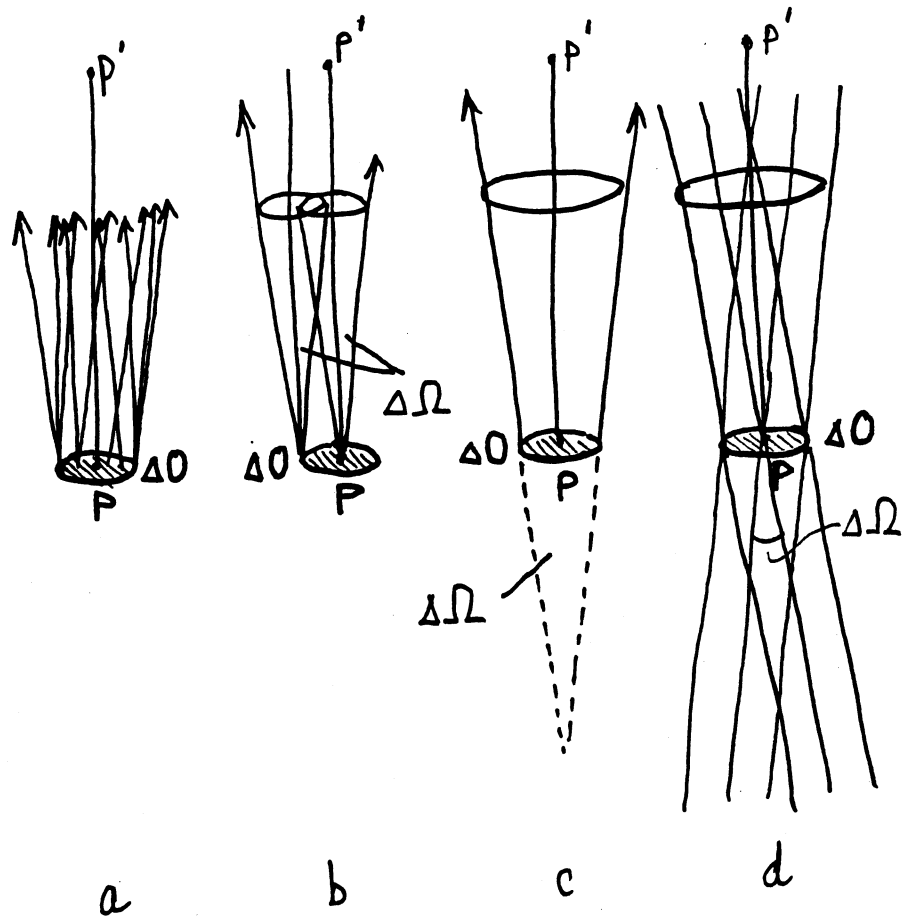
op de frequentie ν

de energie die per seconde en per Hertz gaat door een oppervlakte van 1 cm² dat op een gegeven plaats loodrecht op een gegeven richting is geplaatst. De veralgemening houdt in dat de plaats van het meetoppervlakte overal gekozen mag worden, en ook dat er straling "van achteren" mag komen, tegen de gegeven richting in. Die telt dan negatief mee. Daarmee is de flux de *netto* energiestroom door het oppervlakte in de gegeven richting. Dat is een goede maat voor de beschrijving van *energietransport*. De flux is een veelgebruikte grootheid: bij detectie (vaak in plaats van wat eigenlijk irradiantie moet heten), als maat voor de energie die het oppervlak van een object verlaat, en bij de beschrijving van het energietransport binnenin een object. Dit is de *monochromatische flux*; de *totale flux* \mathcal{F} wordt gegeven door: $\mathcal{F} \equiv \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu d\nu$.

Bij de overgang van lichtkracht op irradiantie hierboven werd de *ontvangst* van de fotonen gespecificeerd (lokatie en oriëntatie van het meetoppervlakte). Maar het is informatiever ook de voortplantingsrichting te specificeren waarin de fotonen zelf reizen; de beste beschrijving zal die zijn waarin zowel de ontvangst als het vertrek van de fotonen wordt vastgelegd. Dat gebeurt met de:

intensiteit I_ν [erg cm⁻² s⁻¹ Hz⁻¹ ster⁻¹],





Figuur 2.1: Stralingskegels. Alle fotonen die vertrekken uit een punt van een oppervlakje ΔO binnen $\Delta\Omega$ van de richting PP' (a) bepalen een stralingskegeltje (b). De kegeltjes uit alle punten van ΔO vormen tezamen een grote afgeknotte kegel, eveneens met tophoek $\Delta\Omega$ (c). Evenzo voor straling dóór een oppervlakje (d). Naar Novotny.

op een gegeven frequentie

de energiestroom in een gegeven richting, per tijdseenheid, per eenheid van bandbreedte en per eenheid van ruimtehoek, door een oppervlakte-eenheid geplaatst in het meetpunt loodrecht op de gegeven richting.

Deze specificeert de energiestroom in een stralingsbundel zowel op de plaats van vertrek als op de plaats van aankomst omdat met deze definitie de intensiteit niet van de afgelegde afstand onderweg afhangt (in een lege ruimte althans). We illustreren dit met twee willekeurige oppervlakjes ΔO_1 in punt P_1 en ΔO_2 in P_2 , waardoorheen fotonen in alle richtingen reizen. We zijn geïnteresseerd in al die fotonen die *beide* oppervlakjes passeren: eerst ΔO_1 , dan ΔO_2 . Deze fotonen vertegenwoordigen enerzijds de energiestroom die door ΔO_1 "vertrekt" naar ΔO_2 , anderzijds de energiestroom die door ΔO_2 "aankomt" uit ΔO_1 .

Bekijk deze energiestroom eerst in punt P_1 . Empirische ervaring of fysisch inzicht leert dat deze recht evenredig moet zijn met de meetduur Δt en de bandbreedte $\Delta \nu$: hoe groter, hoe meer fotonen. Hoe zit het met de richtingen? Van alle mogelijke richtingen door ΔO_1 selecteren we alleen diegenen die ook door ΔO_2 gaan. Dus is de gezochte energiestroom evenredig met de geprojecteerde oppervlakte $\Delta O_1 \cos \theta_1$ en ook met de uitsnede uit de bol van alle richtingen geslagen om punt P_1 die het oppervlakje ΔO_2 vertegenwoordigt, dus evenredig met $(\Delta O_2 \cos \theta_2)/r^2$ ster. Hierin staat "ster" voor steradiaal = de eenheid van ruimtehoek, i.e. de drie-dimensionale uitbreiding van hoekmaat, van een stukje cirkelboog l met $\alpha = l/r$ rad tot een stukje boloppervlak A met $\Omega = A/r^2$ ster. Vanuit punt P_1 is de ruimtehoek die de spreiding van onze energiestroom definieert dus $\Delta \Omega_1 = \Delta O_2 \cos \theta_2 / r^2$ ster. Daarmee wordt de intensiteit de energiestroom langs een "straal", de verbindinglijn $P_1 - P_2$. Eén enkele straal ($\Delta \Omega = 0$) gaat niet, dus spreekt men van een *bundel* stralen ("pencil of radiation"), met ruimtelijke spreiding $\Delta \Omega$. Zie Figuur 2.1.

De bundelspreiding $\Delta \Omega_1$ moet voldoende klein zijn dat de recht-evenredigheid inderdaad geldt. Evenzo is het nodig om voldoende kleine ΔO_1 , Δt en $\Delta \nu$ te gebruiken: als ook het meetoppervlakje, de meetduur en de bandbreedte maar klein genoeg zijn heerst ook daarbinnen homogeniteit van het stralingsveld. Dus wordt de definitie van intensiteit een evenredigheidsdefinitie in de *limiet* voor $\Delta \rightarrow 0$:

$$dE_\nu \equiv I_1 dt d\nu dO_1 \cos \theta_1 d\Omega_1 = I_1 dt d\nu dO_1 \cos \theta_1 \frac{dO_2 \cos \theta_2}{r^2}$$

is de energie van deze fotonen met de intensiteit I_1 in punt P_1 als evenredigheidsconstante.

Bekijk nu dezelfde energiestroom in punt P_2 . Ook daar geldt evenredigheid met de geprojecteerde grootte van het meetoppervlakje $\Delta O_2 \cos \theta_2$ en met de ruimtehoekuitsnede die oppervlakje O_1 aan de hemel van punt P_2 opspant:

$$dE_\nu \equiv I_2 dt d\nu dO_2 \cos \theta_2 d\Omega_2 = I_2 dt d\nu dO_2 \cos \theta_2 \frac{dO_1 \cos \theta_1}{r^2}$$

Deze evenredigheid definieert de intensiteit I_2 in punt P_2 . Gelijkstelling van deze twee uitdrukkingen voor dezelfde hoeveelheid energie (de som van alle fotonen die door beide oppervlakjes gaan) levert dat $I_1 = I_2$, dus dat deze evenredigheidsconstante langs de straal van P_1 naar P_2 niet verandert: *de intensiteit van een bundel blijft onderweg behouden*. De definitie hoeft dus maar voor één punt langs de straal gegeven te worden:

$$I_\nu \equiv \frac{dE_\nu}{dt d\nu dO d\Omega}$$

waarin I_ν de intensiteit is van de bundel die een hoeveelheid energie ter grootte dE_ν transporteert door een vlakje dO dat loodrecht op een specifieke richting in een specifiek meetpunt is geplaatst, langs alle stralen door dO binnen een ruimtehoek $d\Omega$ rond die richting, gedurende een tijdje dt op een specifiek moment, en per frequentiebandje $d\nu$ rond een specifieke frequentie ν .

Vraag 2.1 In welke eenheden wordt dE_ν gemeten?

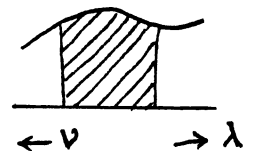
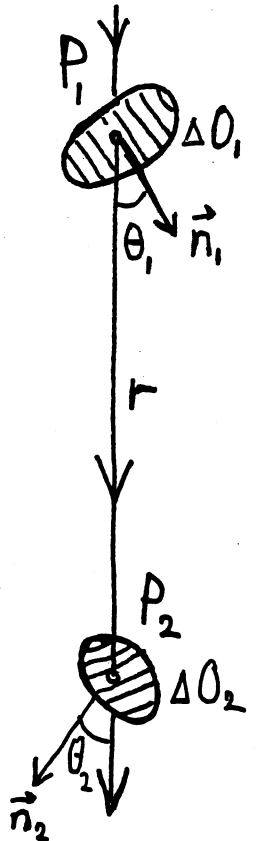
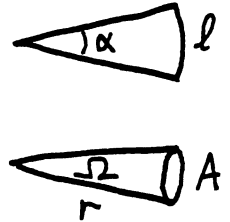
Vraag 2.2 Monochromatische grootheden zoals L_ν , \mathcal{F}_ν en I_ν gelden per eenheid van bandbreedte, d.w.z. de energie die stroomt in een frequentiebandje ter breedte $\Delta \nu$ tussen ν en $\nu + \Delta \nu$ wordt gegeven door $L_\nu \Delta \nu$, $\mathcal{F}_\nu \Delta \nu$ en $I_\nu \Delta \nu$ respectievelijk.

Analoog kunnen we ook L_λ etc. definiëren, bijvoorbeeld met \dot{A} als eenheid van bandbreedte, alsook L_σ en L_ω voor golfgetal en hoekfrequentie.

- Laat zien dat $I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda$ mits $|d\nu| = (c/\lambda^2) d\lambda$;

- ga na dat geldt $d\nu/\nu = -d\lambda/\lambda$.

- zijn I_ν en I_λ voor een gegeven bundel nu numeriek gelijk of niet?



- impliceert het minteken dat I_ν of I_λ negatief is?
- laat zien dat $\int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda$;
- wat is de omrekeningsfactor van I_ν naar I_σ ? En naar I_ω ?

Vraag 2.3 Het is mogelijk voor de intensiteit in plaats van $[\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ ster}^{-1}]$ de volgende eenheden te gebruiken:

- $[\text{erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1}]$;
- $[\text{erg cm}^{-2} \text{ ster}^{-1}]$;
- $[\text{erg cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1}]$,

door de eenheid van bandbreedte anders te kiezen.
Welke eenheden zijn dat in deze drie gevallen?

Vraag 2.4 Ga na:

- voor een isotrope straler op afstand d geldt: $\mathcal{R}_\nu = L_\nu / (4\pi d^2)$;
- voor een bolvormige straler geldt: $\iint \mathcal{F}_\nu dO = L_\nu$;
- voor een isotroop stralingsveld geldt: $\mathcal{F}_\nu = 0$.

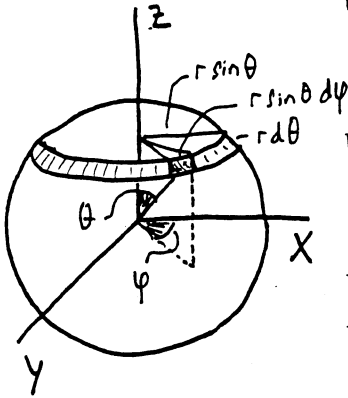
Vraag 2.5 Ga na:

- in poolcoördinaten: $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$;
- een kamerhoek meet $\pi/2$ ster;
- een hele bol meet 4π ster.

Vraag 2.6 Hangt de intensiteit in een homogene bundel van $\Delta\Omega$ ster nu wel of niet af van $\Delta\Omega$?

Vraag 2.7 De belichtingsmeter in een fototoestel is een intensiteitsmeter die beter is naarmate hij scherper kijkt: in een spiegelreflexcamera dóór de lens, en het beste als "spotmeter" naar een klein elementje uit het afgebeelde voorwerp.

Verandert de door zo'n spotmeter aangegeven belichtingstijd als je een object niet van dichtbij met een groothoeklens maar van veraf met een telelens fotografeert? Wat betekent dat voor de intensiteit op de twee plaatsen?



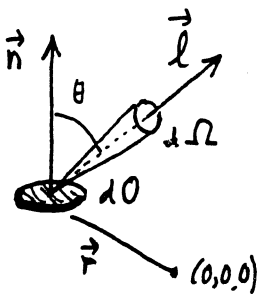
2.2 Intensiteit en afgeleide grootheden

De heuristische beschrijving hierboven laat zien dat de intensiteit de aangewezen grootheid is om straling te beschrijven. Hier volgen definities van met de intensiteit samenhangende grootheden.

2.2.1 Intensiteit

De intensiteit I_ν wordt gedefinieerd als de evenredigheidscoëfficiënt I_ν in:

$$\begin{aligned} dE_\nu &\equiv I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) (\vec{l} \cdot \vec{n}) dO dt d\nu d\Omega \\ &= I_\nu(x, y, z, \theta, \varphi, t) \cos\theta dO dt d\nu d\Omega, \end{aligned} \quad (2.1)$$



waarin dE_ν de hoeveelheid energie is die getransporteerd wordt door het oppervlak dO , ter plekke \vec{r} en met \vec{n} de normaal op dO , tussen de tijdstippen t en $t + dt$, in de frequentieband tussen ν en $\nu + d\nu$ en in de ruimtehoek $d\Omega$ rond de richting \vec{l} .

Een betere naam voor I_ν is *oppervlaktehelderheid*. Engels: *specific intensity*.

Dimensie I_ν : $[\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ ster}^{-1}]$ of $[\text{W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ ster}^{-1}]$.

Conversie naar golflengte-eenheid: $I_\lambda = I_\nu c / \lambda^2$, met $d\lambda$ en $d\nu$ beide stijgend positief gekozen.

Dit is de *monochromatische* intensiteit; de *totale* intensiteit is:

$$I \equiv \int_0^\infty I_\nu d\nu.$$

De intensiteit hangt af van de plaats, de richting, de tijd en de frequentie, en beschrijft het stralingsveld volledig¹. De definitie geldt zowel voor de door een oppervlak uitgestraalde intensiteit als voor de intensiteit onderweg langs een bundel.

De intensiteit verandert *niet* langs een bundel, tenzij er onderweg *extinctie* (verlies van fotonen door absorptie, verstrooiing of conversie) of emissie optreedt. Als de brekingsindex $n \neq 1$ verandert de intensiteit wel; zonder bewijs vermelden we hier dat de grootheid I/n^2 behouden blijft. Binnen een glazen ruit verschilt de intensiteit dus wel van de opvallende intensiteit, maar hij herneemt bij de uitrede van de bundel weer de oorspronkelijke waarde. De intensiteit verandert ook niet bij toepassing van optiek (lenzen, spiegels *etc.*), behalve als daarin absorptieverliezen optreden. De intensiteit in het beeld van een telescoop is dus net zo groot als nabij het object.

Vaak wordt de richting niet duidelijk gespecificeerd. Dan wordt impliciet bedoeld: de intensiteit die we ontvangen, langs de kijkrichting.

Vraag 2.8 Verandert de intensiteit van licht dat in een absorptievrij prisma wordt gedispergeerd?

Vraag 2.9 De intensiteit van de zonnestraling is bij de aarde net zo groot als bij Saturnus, terwijl Saturnus tien keer zo ver van de zon af staat. Ontvangt Saturnus net zoveel energie als de aarde?

Vraag 2.10 Wat voor belichtingstijd heb je nodig om de volle maan te fotograferen? En hoe verhoudt die zich tot de belichtingstijd die een astronaut op de maan zelf dient te gebruiken? En op Mercurius?

Vraag 2.11 Ga na dat voor op aarde waargenomen straling de eis dat $\Delta\Omega$ homogeen met straling gevuld is impliceert dat het object in hoekmaat groter moet zijn dan het scheidend vermogen van de telescoop.

Ontwerp voor een amateurastronoom een intensiteitsmeter voor achter haar telescoop. Aan welke eisen moet die voldoen om de intensiteit te meten van:

- het zonsoppervlak;
- een zonnevlek;
- de rode vlek op Jupiter;
- de Melkweg?

Vraag 2.12 Kan de amateurastronoom uit vraag 2.11 de intensiteit van Sirius A meten?

Vraag 2.13 De beeldscherpte van de Hubble Space Telescope had veel beter moeten zijn dan van enige telescoop op aarde² omdat in de ruimte de atmosferische beeldonrust (*seeing*) ontbreekt. Zulke scherptewinst resulteert in aanzienlijke gevoeligheidswinst voor sterren, maar niet voor uitgebreide objecten zoals nevels. Waarom? Is een (goede) ruimtetelescoop een goede keus om melkwegstelsels mee te fotograferen? En QSO's?

2.2.2 Gemiddelde intensiteit

De *gemiddelde intensiteit* J_ν wordt gedefinieerd door:

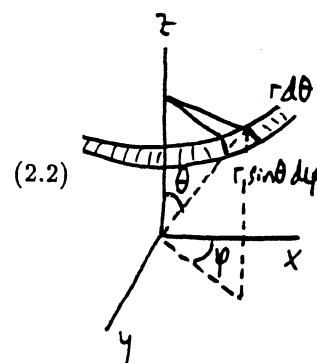
$$J_\nu(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (2.2)$$

i.e. gemiddeld over alle richtingen.

Dimensie J_ν : [$\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{ster}^{-1}$], net zoals I_ν .

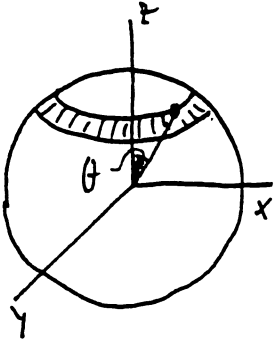
De *totale gemiddelde intensiteit* wordt gegeven door:

$$J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint I_\nu d\nu d\Omega = \int_0^\infty J_\nu d\nu.$$



¹tenzij de trillingsrichting van de EM golf er toe doet (polarisatie). Dan overgaan op de 4 Stokes parameters (Rybicki en Lightman § 2.4).

²dat zou ook zo zijn als Perkin Elmer een luttel bedrag had gestoken in de vijfhoekprismaafproef waarmee de grote-schaal vorm van een spiegel eenvoudig kan worden gecontroleerd (zie Wilson, ESO Messenger september 1990.)



Deze hoekgemiddelde intensiteit geeft aan hoeveel intensiteit ergens beschikbaar is voor processen die niet richtingsgevoelig zijn, zoals stralingsexcitatie en stralingsionisatie.

Voor een *isotroop* stralingsveld geldt: $J_\nu = I_\nu$.

Voor een *axiaal-symmetrisch* stralingsveld, met de z -as ($\theta \equiv 0$) langs de symmetrie-as, geldt:

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = -2\pi d\mu,$$

waarin $\mu \equiv \cos \theta$, en dus:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu(z, \mu) d\mu. \quad (2.3)$$

Vraag 2.14 Een oneindig groot oppervlak straalt overal en in alle richtingen een intensiteit I_0 de lege ruimte in. Wat is J in een punt van dit oppervlak? En in een punt op afstand d van het oppervlak?

Vraag 2.15 Hoe verhoudt zich de gemiddelde intensiteit van de zonnestraling nabij de aarde tot de intensiteit ervan? (De straal van de zon bedraagt $R_\odot = 0.00465$ AE.)

Vraag 2.16 Hoe verhouden de intensiteit en de gemiddelde intensiteit van het zonlicht bij Saturnus zich tot die bij de aarde?

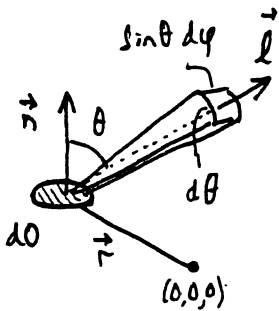
2.2.3 Flux

De *monochromatische flux* \mathcal{F}_ν wordt gedefinieerd als:

$$\mathcal{F}_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t) \equiv \int I_\nu \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.4)$$

Dimensie \mathcal{F}_ν : [$\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$] of [$\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$].

Dit is de energiestroom per sec door een oppervlak van een cm^2 dat ter plekke \vec{r} loodrecht op richting \vec{n} is geplaatst. Het is de *netto* energiestroom want de perspectief-factor $\cos \theta$ telt neerwaartse bijdragen negatief:

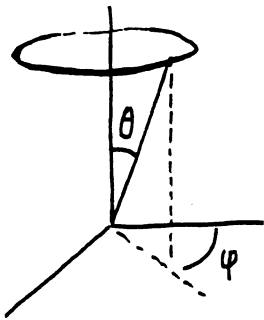


$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_\pi^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos(\pi - \theta) \sin(\pi - \theta) d(\pi - \theta) d\varphi \\ &\equiv \mathcal{F}_\nu^+ - \mathcal{F}_\nu^-, \end{aligned} \quad (2.5)$$

met de opwaartse flux \mathcal{F}_ν^+ en de neerwaartse flux \mathcal{F}_ν^- beide positief.

Voor een isotroop stralingsveld geldt: $\mathcal{F}_\nu^+ = \mathcal{F}_\nu^- = \pi I_\nu$ en $\mathcal{F}_\nu = 0$.

Bij axiale symmetrie geldt:



$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu(z) &= 2\pi \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I_\nu d\mu \\ &= 2\pi \int_0^1 \mu I_\nu d\mu - 2\pi \int_0^{-1} \mu I_\nu d\mu \\ &= \mathcal{F}_\nu^+ - \mathcal{F}_\nu^-. \end{aligned} \quad (2.6)$$

In axiale symmetrie is alleen de z -component van de flux niet 0. Daarom wordt doorgaans over "de flux" = \mathcal{F}_z gesproken. Met "de flux van een ster" wordt veelal de uitwaartse flux \mathcal{F}^+ door een cm^2 van het steroppervlak bedoeld; als radioastronomen daarentegen "flux" zeggen bedoelen ze meestal de op aarde en langs de kijkrichting gemeten irradiantie van een bron.

N.B. Vaak wordt πF in plaats van \mathcal{F} geschreven; Rybicki en Lightman schrijven F voor \mathcal{F} .

Vraag 2.17 Hoe verhoudt zich de flux van de zonnestraling nabij de aarde zich tot de intensiteit, de gemiddelde intensiteit en de irradiantie ervan?

Vraag 2.18 Hoe verhoudt de zonneflux bij de aarde zich tot die bij Saturnus?

2.2.4 Energiedichtheid en stralingsdruk

De stralingsenergiedichtheid u_ν is:

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega. \quad (2.7)$$

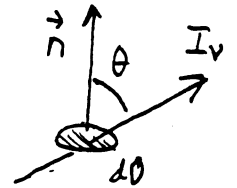
Dimensie u_ν : [erg cm⁻³ Hz⁻¹] of [J m⁻³ Hz⁻¹].

Dit is de energie per cm³ en per Hz per bundel I_ν .

De stralingsdruk p_ν is:

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega. \quad (2.8)$$

Dimensie p_ν : [dyne cm⁻² Hz⁻¹] of [N m⁻² Hz⁻¹].



De stralingsdruk is volkomen analoog aan de gasdruk, en een scalar als de straling isotroop is. Straling oefent alleen een kracht uit bij een gradiënt in de stralingsdruk, analoog aan de opwaartse kracht. Absorptie van fotonen in inelastische botsingen is iets anders want bij re-emissie krijg je dan nog een tweede impulsoverdracht.

Vraag 2.19 Leidt vergelijking (2.7) af.

Vraag 2.20 Leidt vergelijking (2.8) af.

Vraag 2.21 Ga na dat de volgende onderlinge relaties gelden:

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad u = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty J_\nu d\nu$$

Hoe interpreteer je de voorfactor $4\pi/c$?

Vraag 2.22 Laat zien dat voor isotrope straling $p_\nu = u_\nu/3$. Verklaring?

Vraag 2.23 Beschouw een doos met spiegelende wanden die isotrope straling bevat. Ga na dat bij reflectie aan een wand geldt:

$$p_\nu = \frac{2}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega.$$

Toch is er geen verschil met vergelijking (2.8), waarom? Geldt in een spiegelende doos dat $p_\nu = u_\nu/3$?

Hoofdstuk 3

Transportvergelijking

3.1 Inleiding: emissie en extinctie

De intensiteit langs een bundel is behouden tenzij onderweg *lokale* emissieprocessen of extinctieprocessen optreden die fotonen aan de bundel toevoegen of eruit verwijderen. In dat geval worden de lokale toename en de lokale afname van de intensiteit gemeten met coëfficiënten die, analoog aan de intensiteit zelf, als empirisch geldige evenredigheidsconstanten worden gedefinieerd.

3.2 Emissiecoëfficiënt

Ervaring leert dat de *lokale emissie* van fotonen, *i.e.* de lokale toevoeging van fotonen aan het stralingsveld, evenredig is met het aantal stralende deeltjes en met de meetduur Δt , de meetbandbreedte $\Delta\nu$ en de bundelspreiding $\Delta\Omega$ waarover gemeten wordt. De evenredigheidscoëfficiënt kan worden gedefinieerd per deeltje, per gram, of per cm^3 . In dit dictaat definiëren we de *monochromatische emissiecoëfficiënt* j_ν per cm^3 als de constante in:

$$dE_\nu = j_\nu dV dt d\nu d\Omega, \quad (3.1)$$

met dE_ν de energie die tengevolge van de lokale vrijmaking van fotonen wordt toegevoegd aan het stralingsveld ter plekke, in een volume-elementje dV , per bandbreedte $d\nu$, gedurende een tijdje dt en in de richtingen $d\Omega$.

Dimensie j_ν : [$\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{ster}^{-1}$].

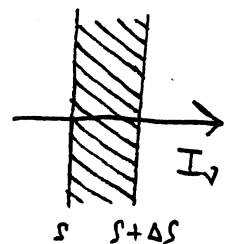
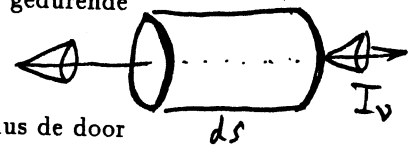
Net als I_ν hangt j_ν af van de plaats, de richting, de tijd en de frequentie.

Een bundel met doorsnede dO vult over een afgelegde weg ds een volume dV , dus de door lokale emissie aan een bundel toegevoegde intensiteit is:

$$dI_\nu(s) = j_\nu(s) ds. \quad (3.2)$$

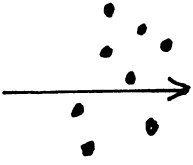
Vraag 3.1 Een dunne homogene laag ter dikte Δs wordt van links verlicht door een bundel met intensiteit $I_\nu(s)$. Wat is de uittredende intensiteit $I_\nu(s + \Delta s)$ rechts als de emissiecoëfficiënt j_ν is en er geen extinctie plaats vindt? Blijft dit resultaat geldig voor een dikke laag, *i.e.* voor grote Δs ?

Vraag 3.2 Waarom wordt de emissiecoëfficiënt in termen van intensiteit gedefinieerd en niet als flux?



3.3 Extinctiecoëfficiënt

Ervaring leert ook dat het aantal ter plekke uit een bundel geëxtingeerde fotonen evenredig is met het aanbod aan fotonen en met het aantal extingerende deeltjes. De evenredigheidsconstante heet de *extinctiecoëfficiënt*. Ook deze coëfficiënt kan worden gedefinieerd per deeltje, per gram of per cm^3 ; hier volgen alle drie.



Eerst per deeltje:

$$dI_\nu = -I_\nu \sigma_\nu n ds \quad (3.3)$$

met σ_ν de monochromatische extinctiecoëfficiënt = "werkzame doorsnede" per deeltje ($[\text{cm}^2]$) en n de dichtheid van de absorberende deeltjes ($[\text{cm}^{-3}]$).

Vervolgens per eenheid van weglengte:

$$dI_\nu = -I_\nu \alpha_\nu ds \quad (3.4)$$

met α_ν de monochromatische lineaire extinctiecoëfficiënt ($[\text{cm}^{-1}]$). Deze maat is identiek aan meting per eenheid van volume:

$$dI_\nu = -I_\nu \alpha_\nu ds$$

met α_ν de monochromatische volume-extinctiecoëfficiënt = werkzame doorsnede per volume-eenheid ($[\text{cm}^2 \text{cm}^{-3}] = [\text{cm}^{-1}]$).

Tenslotte per eenheid van massa:

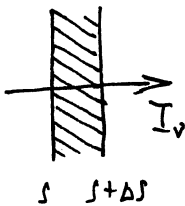
$$dI_\nu = -I_\nu \kappa_\nu \rho ds \quad (3.5)$$

met κ_ν de monochromatische massa-extinctiecoëfficiënt = werkzame doorsnede per massa-eenheid ($[\text{cm}^2 \text{g}^{-1}]$) en ρ de massadichtheid ($[\text{g cm}^{-3}]$).

De laatste definitie (Engelse naam: *opacity*) wordt het meest gebruikt. Hier conformeren we echter aan de notatie van Rybicki en Lightman en gebruiken de vorm 3.4.

De term "extinctie" verdient commentaar. In veel boeken wordt "absorption" gebruikt voor wat hier extinctie heet. De reden om hier (een conventie van C. Zwaan volgend) *extinctie* te zeggen is dat er onderscheid gemaakt moet worden tussen het verdwijnen van fotonen uit een bundel door destructie en het verdwijnen van fotonen uit een bundel door verstrooiing of conversie. Bij verstrooiing bijvoorbeeld blijven de fotonen nog voortbestaan, maar ze hebben een andere richting en/of een andere frequentie gekregen en tellen daarom in de gegeven bundel niet meer mee. Onder extinctie verstaan we hier het totaal van de processen waarbij fotonen uit de bundel verdwijnen, en onder absorptie uitsluitend foton destructie. Elders gebruikt men absorptie voor het totaal, en zegt dan "ware absorptie" voor de destructie van fotonen.

Vraag 3.3 Dus: extinctie \equiv destructie + verstrooiing + conversie van fotonen de bundel uit. Evenzo: emissie \equiv de som van alle processen die fotonen aan de bundel toevoegen. Hoe doen verstrooiing en conversie daaraan mee?



Vraag 3.4 Ga na dat geldt: $\alpha_\nu = \sigma_\nu n = \kappa_\nu \rho$.

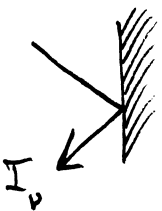
Vraag 3.5 Een dunne homogene laag ter dikte Δs wordt van links verlicht door een bundel met intensiteit $I_\nu(s)$. Wat is de uit tredende intensiteit $I_\nu(s + \Delta s)$ rechts als de extinctiecoëfficiënt α_ν is en er geen lokale emissie plaats vindt? Blijft dit resultaat geldig voor een dikke homogene laag, i.e. voor grote Δs ?

Vraag 3.6 Waarom worden de emissie- en extinctiecoëfficiënt in de limiet $d = \lim \Delta \rightarrow 0$ gedefinieerd?

Vraag 3.7 Kun je coëfficiënten voor de emissie en extinctie van oppervlakken op dezelfde wijze definiëren als de volume-coëfficiënten van vergelijkingen (3.2) en (3.4)?

Vraag 3.8 Ga na dat de monochromaticiteitsindex ν bij α_ν niet dezelfde betekenis heeft als bij I_ν en j_ν . Wat is de omrekeningsfactor van α_ν naar α_λ ? En van κ_ν naar κ_λ ? Heeft het zin een totale extinctiecoëfficiënt $\alpha \equiv \int \alpha_\nu d\nu$ in te voeren?

Vraag 3.9 Ga na dat $\alpha_\nu ds < 1$. Kan $\alpha_\nu ds = 0$ zijn? Is $\alpha_\nu ds < 0$ hetzelfde als emissie $j_\nu ds$?



Vraag 3.10 Ga na dat de extinctiecoëfficiënt hier is gedefinieerd zonder richtingsafhankelijkheid. Denk je dat dat altijd opgaat? Hoe zou je hem wél richtingsafhankelijk definiëren?

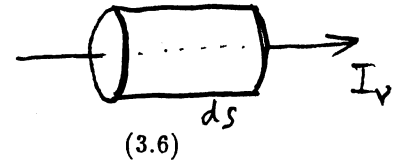
3.4 Transportvergelijking

Bekijk een plat doosje met zijden $dO \perp ds$, met s een coördinaat langs de bundel. De intensiteit langs de bundel is behouden, behoudens eventuele lokale emissie en extinctie die we combineren tot:

$$dI_\nu(s) = I_\nu(s + ds) - I_\nu(s) = j_\nu(s) ds - \alpha_\nu(s) I_\nu(s) ds,$$

ofwel

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu.$$



Dit is de belangrijke *stralingstransportvergelijking*.

Hij geldt zeer algemeen. Er dient voldaan te zijn aan de voorwaarden dat de extingerende deeltjes klein zijn ten opzichte van hun onderlinge afstanden en dat ze random en onafhankelijk van elkaar door het medium zijn verspreid. Doorgaans is dat in orde.

Vraag 3.11 Deze vergelijking is *proefondervindelijk* opgesteld. Met wat voor proef zou je hem bewijzen? Waarom is ook deze vergelijking per limiet $d = \lim \Delta \rightarrow 0$ gesteld? Kun je hem zien als een behoudswet?

Vraag 3.12 Beschouw een inhomogene laag ter dikte $s = D$ die van links ($s = 0$) wordt bestraald met intensiteit $I_\nu(0)$. Wat is de rechts uittredende intensiteit $I_\nu(D)$
 - in het geval van pure emissie ($\alpha_\nu(s) = 0$)?
 - in het geval van pure extinctie ($j_\nu(s) = 0$)?

3.5 Optische weglengte, dikte en diepte

De *monochromatische optische weglengte* $d\tau_\nu$ van een laagje ter dikte ds gemeten langs de bundel is:

$$d\tau_\nu(s) \equiv \alpha_\nu(s) ds. \quad (3.7)$$

De *monochromatische optische dikte* van de hele laag, met geometrische dikte D , is:

$$\tau_\nu(D) = \int_0^D \alpha_\nu(s) ds, \quad (3.8)$$

wederom langs de bundel gemeten. Dit is de totale weglengte van de bundel door de laag, niet geometrisch maar "optisch": een maat voor de totale extinctie langs de afgelegde weg. In het geval van pure extinctie ($j_\nu = 0$) wordt de transportvergelijking

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu,$$

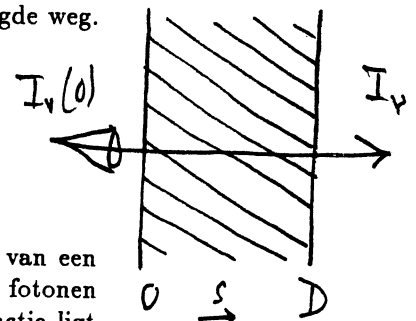
met als oplossing:

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)}.$$

Dus is $\tau_\nu(D)$ de exponentieel-verval parameter die bepaalt hoeveel er over blijft van een bundel die een extingerende laag ter dikte D heeft doorlopen. De fractie resterende fotonen bedraagt $I_\nu(D)/I_\nu(0) = e^{-\tau_\nu(D)}$. De overgang tussen weinig extinctie en veel extinctie ligt bij de $1/e$ waarde, i.e. bij optische dikte $\tau_\nu = 1$. Een laag heet *optisch dik* voor $\tau_\nu(D) > 1$ en *optisch dun* als $\tau_\nu(D) < 1$.

Hoe ver dringen de fotonen gemiddeld in de laag door? Onderweg, voor $s < D$ binnen de laag, geldt evenzo

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(s)},$$



waarin $\tau_\nu(s)$ de optische weglengte is van 0 tot s , of de optische dikte van die deellaag. De kans dat een opvallend foton een optische weglengte $\tau_\nu(s)$ in de laag aflegt alvorens te worden geëxtingeerd is $e^{-\tau_\nu(s)}$ dus, aangezien het gemiddelde van een grootheid x welke spreidt met kansverdeling $f(x)$ wordt gegeven door:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty x f(x) dx}{\int_0^\infty f(x) dx},$$

is de gemiddelde optische fotonweglengte $\langle \tau_\nu(s) \rangle$:

$$\langle \tau_\nu(s) \rangle \equiv \frac{\int_0^\infty \tau_\nu(s) e^{-\tau_\nu(s)} d\tau_\nu(s)}{\int_0^\infty e^{-\tau_\nu(s)} d\tau_\nu(s)} = 1. \tag{3.9}$$

De gemiddelde geometrische weglengte van een foton in een homogeen medium is daarmee:

$$l_\nu = \frac{\langle \tau_\nu(s) \rangle}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}. \tag{3.10}$$

In een inhomogeen medium is dit een representatieve lokale vrije weglengte.

Naast de optische dikte $\tau_\nu(D)$ en de optische weglengte $\tau_\nu(s)$ wordt ook vaak de *monochromatische optische diepte* $\tau'_\nu(s)$ gebruikt. Deze wordt gedefinieerd als de optische weglengte langs de kijkrichting, dus tegen de bundelrichting in van buiten naar binnen het object in:

$$d\tau'_\nu(s) \equiv -\alpha_\nu(s) ds.$$

Bijvoorbeeld in het geval van axiale symmetrie met de z -as langs de symmetrie-as en de kijkrichting daaraan tegengesteld. Dan is, met je oog in $s = z = \infty$, de *radiële optische diepte* van een lokatie met $z = z_0$:

$$\tau'_\nu(z_0) = \int_\infty^{z_0} \alpha_\nu dz. \tag{3.11}$$

Optische weglengte en optische diepte verschillen in richting en in nulpuntsdefinitie. Optische weglengte is de maat voor het doordringingsvermogen van fotonen; optische diepte meet het doordringingsvermogen van je blik. De eerste dient voor de beschrijving van stralingstransport binnen astrofysische objecten; de tweede voor de beschrijving van de straling die we waarnemen. Optische dikte is de totale optische weglengte door het object.

Vraag 3.13 Wat zijn de dimensies van $d\tau_\nu$ en $\tau_\nu(D)$?

Vraag 3.14 Hoe moet $d\tau_\nu$ gedefinieerd worden bij gebruik van σ_ν en κ_ν voor de extinctiecoëfficiënt?

Vraag 3.15 Wat voor betekenis moet aan de index ν in τ_ν gehecht worden? Hoe zet je τ_ν om in τ_λ ? Heeft de integraal $\int_0^\infty \tau_\nu d\nu$ betekenis?

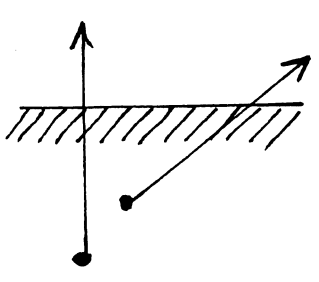
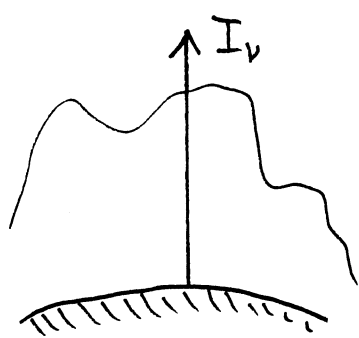
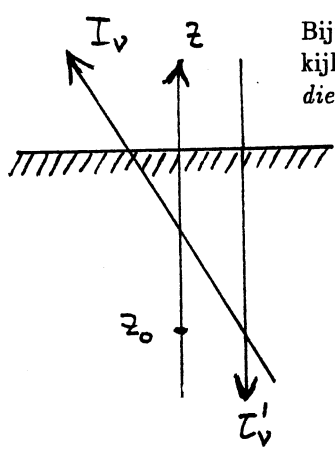
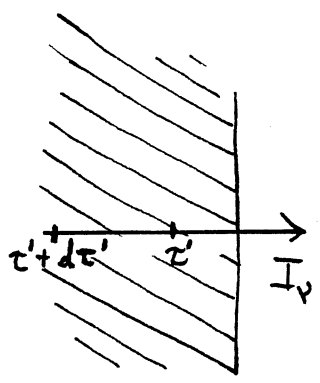
Vraag 3.16 Leidt formule 3.10 af uit de waarschijnlijkheid dat een foton een geometrische weglengte s haalt, zonder de optische weglengte te gebruiken.

Vraag 3.17 Gelden bovenstaande uitdrukkingen voor gemiddelde optische en geometrische weglengte ook als er emissie optreedt? En in het geval van verstrooiing?

Vraag 3.18 Als we naar de zon kijken op een frequentie waarop de corona volstrekt doorzichtig is, wat is dan de optische dikte daarvan? En de optische diepte aan de basis van de corona? Waar moet je beginnen met integreren om de optische diepte van een bepaald niveau binnen de zon zelf te bepalen?

Vraag 3.19 Wat is de optische dikte van een homogene laag ter dikte D als de vrije weglengte daarin l_ν bedraagt?

Vraag 3.20 De uit een optisch dikke laag ontsnappende fotonen komen uit de meest naar buiten gelegen deellaag met optische dikte $\tau_\nu \approx 1$ langs de bundel, waarom? Hoe diep steekt die laag in radiële optische diepte τ'_ν voor de gezichtslijnen met $\mu = 1$ en $\mu = 0.2$?



Vraag 3.21 Hoe luidt de definitie van radiële optische diepte als je in plaats van de naar buiten gerichte z -coördinaat (de "hoogte boven het oppervlak") een inwaartse diepte-coördinaat zou gebruiken? En hoe zou je de locatie van "het oppervlak" definiëren in het geval van de zon?

3.6 Bronfunctie

De emissiecoëfficiënt j_ν en de extinctiecoëfficiënt α_ν zijn heel verschillende grootheden, kijk maar naar hun dimensies. Toch is het nuttig ze op elkaar te delen. We krijgen dan de *bronfunctie*:

$$S_\nu \equiv j_\nu / \alpha_\nu. \quad (3.12)$$

Dimensie S_ν : $[\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ ster}^{-1}]$.

Engels: *source function*. Duits: *Ergiebigkeit*.

De dimensie van de bronfunctie is die van intensiteit. Dus kunnen bronfunctie en intensiteit bij elkaar worden opgeteld en afgetrokken. Dat blijkt bij herschrijving van de transportvergelijking (3.6) met τ_ν en S_ν :

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu. \quad (3.13)$$

Dit is de transportvergelijking in de gebruikelijke differentiële vorm. Hij geeft een mooie symmetrische beschrijving van de verandering van de intensiteit in een bundel door een medium per eenheid van optische weglengte langs de bundel. De bronfunctie is hierin inderdaad een *bronterm*: $S_\nu - I_\nu$ is de toename van de intensiteit onderweg. Voor $S_\nu = 0$ is er alleen maar exponentiële afname.

We hebben nu de drie grootheden j_ν , α_ν en S_ν om twee zaken mee te beschrijven: de toename en de afname van de monochromatische intensiteit langs een bundel. Vrijwel altijd gebruikt men hiervoor de combinatie α_ν en S_ν , en niet j_ν . Redenen daartoe zijn de symmetrie van bovenstaande vorm van de transportvergelijking (waarin α_ν besloten ligt in $d\tau_\nu$), en het feit dat S_ν en α_ν doorgaans onafhankelijker van elkaar zijn dan j_ν en α_ν . Een bb overgang bijvoorbeeld kan op de specifieke bijbehorende frequentie grote toenames van zowel j_ν als α_ν leveren ten opzichte van de continue coëfficiënten, terwijl die pieken in de breuk $S_\nu = j_\nu / \alpha_\nu$ grotendeels of helemaal wegvallen zodat S_ν een veel gladdere functie van de frequentie is. Ook hangt j_ν directer af van het lokale stralingsveld dan α_ν : bij verstrooiing bijvoorbeeld hangt j_ν direct samen met de hoeveelheid exciterende fotonen die ter beschikking staan, terwijl α_ν in eerste instantie alleen door het medium ter plekke wordt bepaald, en pas in tweede instantie door de invloed van het stralingsveld daarop. We komen hier in hoofdstuk 7 op terug.

Daarmee zijn de extinctiecoëfficiënt en de bronfunctie de basisgrootheden van het stralingstransport. Hoewel dit dictaat "opwekking" van straling heet zullen we het voortaan het meest over *extinctie* van straling hebben. Mits ook de lokale bronfunctie bekend is ligt daarmee ook de opwekking vast.

Vraag 3.22 Hoe moet de bronfunctie gedefinieerd worden met σ_ν of κ_ν als extinctiecoëfficiënt?

Vraag 3.23 Heeft $S_\nu = 1$ speciale betekenis? En $S_\nu / I_\nu = 1$? Kan $S_\nu > I_\nu$ zijn? En kan $S_\nu < 0$?

Vraag 3.24 Hoe luidt de transportvergelijking bij gebruik van optische diepte τ'_ν in plaats van optische weglengte τ_ν ?

Vraag 3.25 Als er voldoende sterke koppeling is tussen het lokale stralingsveld en de thermische deeltjesbewegingen zal de straling in een isotherme laag de wet van Planck volgen: $I_\nu = B_\nu(T)$.

Welke grootheid volgt deze wet dan eveneens:

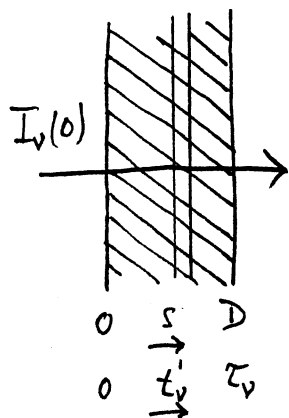
- de emissiecoëfficiënt,
- de extinctiecoëfficiënt,
- de bronfunctie?

Vraag 3.26 Laat zien dat als in een medium geen fotoncreatie of fotonconversie voorkomt maar

uitsluitend verstrooiing optreedt, de bronfunctie gelijk is aan de gemiddelde intensiteit: $S_\nu = J_\nu$.

3.7 Integraaloplossing

Beschouw een laag optische dikte τ_ν die van links met intensiteit $I_\nu(0)$ wordt aangestraald; we gaan de uittreedende intensiteit $I_\nu(\tau_\nu)$ bepalen in het algemene geval, inclusief emissie. De optische weglengte langs de bundel vanaf het linker oppervlak schrijven we als:



$$t_\nu(s) = \int_0^s \alpha_\nu(s') ds'.$$

Ten eerste wordt de van links opvallende intensiteit $I_\nu(0)$ over de totale optische weglengte τ_ν exponentieel verzwakt; er blijft van over:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu}.$$

Ten tweede is er op elke t_ν in de laag een lokale nieuwe bijdrage aan de intensiteit groot:

$$j_\nu(t_\nu) ds = S_\nu(t_\nu) dt_\nu.$$

Die bijdrage wordt vervolgens in het resterende stuk tot $t_\nu = \tau_\nu$ exponentieel afgezwakt; rechts blijft er van over:

$$dI_\nu = S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu.$$

Het eindresultaat volgt door alle bijdragen te sommeren:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu \quad (3.14)$$

Dit is de *formele oplossing* van de transportvergelijking.

Hij geldt overal langs de bundel; hoewel we τ_ν de optische dikte van de laag noemden is het feitelijk de optische weglengte vanaf het linker oppervlak, ofwel de optische dikte van een willekeurige deellaag die daar begint.

Deze integraalvorm van de stralingstransportvergelijking volgt formeel uit de differentiële vorm door vermenigvuldiging links en rechts met de integrerende factor e^{τ_ν}

$$\left(\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} + I_\nu \right) e^{\tau_\nu} = S_\nu e^{\tau_\nu},$$

samennemen

$$\frac{dI_\nu e^{\tau_\nu}}{d\tau_\nu} = S_\nu e^{\tau_\nu},$$

links en rechts integreren

$$I_\nu(\tau_\nu) e^{\tau_\nu} - I_\nu(0) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu e^{t_\nu} dt_\nu$$

en delen door e^{τ_ν} :

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu.$$

Om de intensiteit $I_\nu(\tau_\nu)$ te bepalen is dus nodig:

- kennis van de opvallende intensiteit $I_\nu(0)$;
- kennis van de bronnen onderweg: $S_\nu(s)$;
- kennis van de optische weglengte onderweg: $t_\nu(s)$.

Deze vergelijking heet "formele oplossing", maar een oplossing is het slechts zelden. Als er verstrooiing optreedt zullen j_ν en S_ν afhangen van het stralingsveld, dus van I_ν uit alle richtingen inclusief de richting waarin I_ν gezocht wordt. Om I_ν te vinden moet je I_ν dan weten.

Vraag 3.27 In welke parameters in vergelijking 3.14 zitten de materie-eigenschappen van het medium?

3.7.1 Straling uit een homogene laag

We bekijken nu het onrealistische maar illustratieve geval van een *homogene laag*, waarin j_ν en α_ν niet door het medium variëren. Dan varieert ook S_ν niet, en levert (3.14) voor de bij $s = D$ uitredende intensiteit van een loodrecht door de laag passerende bundel:

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu(D)}). \quad (3.15)$$

Dit resultaat bevat wederom een term $\leq I_\nu(0)$ voor de verzwakking van de opvallende straling, en een term $\leq S_\nu$ voor de eigen bijdrage van de laag.

In het *optisch dikke* geval met $\tau_\nu(D) \gg 1$ volgt hieruit:

$$I_\nu(D) \approx S_\nu,$$

dus de opvallende straling $I(0)$ komt er niet doorheen. *Je ziet alleen maar de bronfunctie in de laag, ongeacht de mate en de aard van de extinctie.* De aard van het medium doet alleen ter zake in de bronfunctie S_ν .

In het *optisch zéér dunne* geval met $\tau_\nu(D) \ll 1$ volgt:

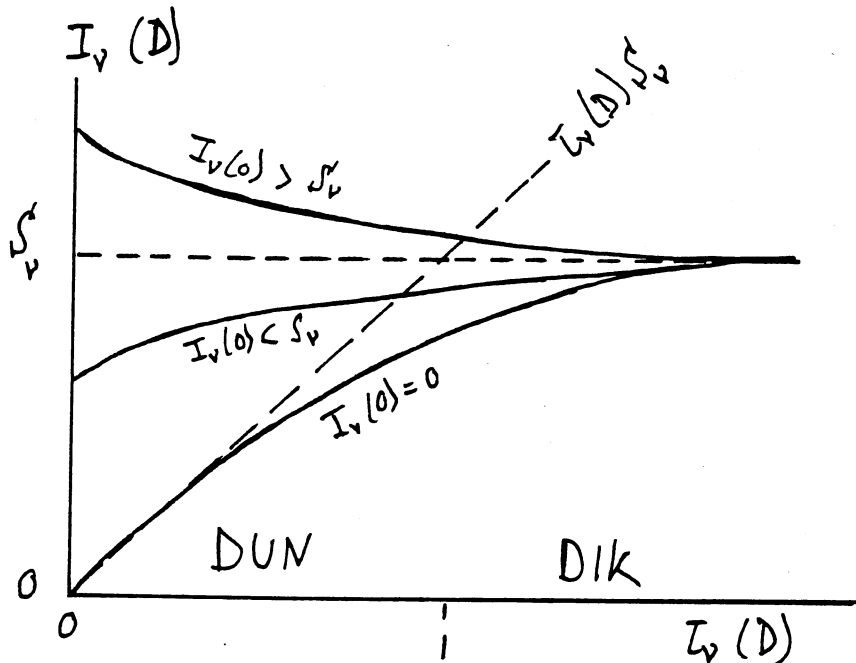
$$I_\nu(D) \approx I_\nu(0),$$

hetgeen voor de hand ligt — je kijkt dwars door de laag heen.

In het minder extreme *optisch dunne* geval met $\tau_\nu(D) < 1$ volgt met $e^{-\tau_\nu} \approx 1 - \tau_\nu$:

$$I_\nu(D) \approx I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)] \tau_\nu(D). \quad (3.16)$$

Merk op dat $I_\nu(D) < I_\nu(0)$ als $S_\nu < I_\nu(0)$, en omgekeerd dat $I_\nu(D) > I_\nu(0)$ als $S_\nu > I_\nu(0)$ (zie Figuur 3.1).

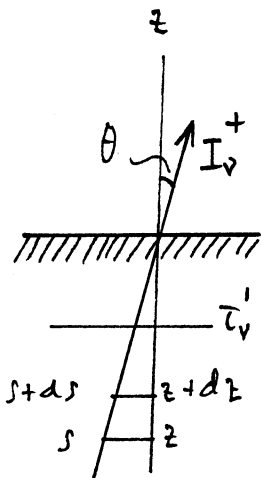


Figuur 3.1: De uitredende intensiteit $I_\nu(D)$ voor een homogene laag ter dikte D . De uitredende intensiteit nadert S_ν van weerszijden, en bereikt S_ν voor voldoende grote optische dikte $\tau_\nu(D)$ van de laag.

Vraag 3.28 Wat is de uitredende intensiteit voor een homogene halfruimte?

- Vraag 3.29 Wat is de intensiteit binnenin een homogeen, oneindig uitgebreid medium?
- Vraag 3.30 Herschrijf vergelijking (3.15) voor een bundel die onder de hoek $\mu = \cos \theta$ uit de laag treedt.
- Vraag 3.31 Hoe wordt vergelijking (3.15) voor een bundel die onder gezichtshoek μ uittreedt bij gebruik van radiële optische diepte τ'_ν in plaats van optische dikte τ_ν ?
- Vraag 3.32 Een radioastronome stelt dat de radio-intensiteit die zij waarneemt van een interstellaire wolk met diameter D wordt gegeven door $I_\nu = \alpha_\nu S_\nu D$. Wat zijn haar veronderstellingen?
- Vraag 3.33 Een optisch dunne homogene laag met dikte D wordt aangestraald met intensiteit $I_\nu(0)$. Stel dat de hoeveelheid monochromatische verstrooiing in de laag met de tijd toeneemt, nemen de optische dikte, de bronfunctie en de uittreedende intensiteit $I_\nu(D)$ dan toe of af?

3.7.2 Straling uit een dikke laag



De veronderstelling van homogeniteit is onrealistisch, vooral voor optisch dikke objecten. Een betere benadering is te veronderstellen dat het object bestaat uit "vlak-parallele lagen", i.e. dat er alleen variaties voorkomen in de z -richting. We doen dat hier voor optisch dikke media. Daarbij is het handig om de radiële optische diepte $\tau'_\nu(z)$ te gebruiken in plaats van de optische weglengte $\tau_\nu(z)$ vanaf de achterkant van het object: we zijn geïnteresseerd in de uittreedende intensiteit die we kunnen waarnemen, en minder in de onzichtbare lagen met optische diepte $\tau'_\nu \gg 1$. Dan volgt voor de inwaarts gerichte straling I_ν^- met $\mu < 0$ uit vergelijkingen (3.11) en (3.14), de definitie $\mu = \cos \theta$ en met gebruik van $t'_\nu = \int_\infty^z \alpha_\nu(z') dz'$ als lopende optische diepte:

$$I_\nu^-(\tau'_\nu, \mu) = - \int_0^{\tau'_\nu} S_\nu(t'_\nu) e^{-(t'_\nu - \tau'_\nu)/\mu} dt'_\nu / \mu$$

en voor de buitenwaarts gerichte straling I_ν^+ met $\mu > 0$:

$$I_\nu^+(\tau'_\nu, \mu) = + \int_{\tau'_\nu}^{\infty} S_\nu(t'_\nu) e^{-(t'_\nu - \tau'_\nu)/\mu} dt'_\nu / \mu$$

waarin respectievelijk als randvoorwaarden zijn gebruikt voor I_ν^- :

$$I_\nu^-(\tau'_\nu = 0, \mu) = 0,$$

i.e. geen van boven opvallende straling, en voor I_ν^+ :

$$S_\nu(t'_\nu) e^{-t'_\nu/\mu} \rightarrow 0 \text{ voor } t'_\nu \rightarrow \infty,$$

i.e. dat de bronfunctie naar binnen niet te snel toeneemt.

Vervolgens bekijken we de aan het oppervlak uittreedende intensiteit:

$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu) = \int_0^{\infty} S_\nu(t'_\nu) e^{-t'_\nu/\mu} dt'_\nu / \mu. \quad (3.17)$$

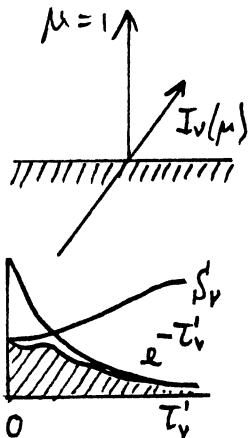
Voor $\mu = 1$, dus loodrecht op het oppervlak kijkend, levert dit:

$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu = 1) = \int_0^{\infty} S_\nu e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu.$$

De integrand $Se^{-\tau'}$ wordt snel afgeknapt door $e^{-\tau'}$ voor $\tau' \geq 1$.

Tenslotte een afschatting van deze integraal. Ontwikkel:

$$S_\nu(\tau'_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tau'^n = a_0 + a_1 \tau'_\nu + a_2 \tau'^2 + \dots,$$



substitueer dit in vergelijking (3.17) en gebruik $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$:

$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu) = a_0 + a_1\mu + 2a_2\mu^2 + \dots + n!a_n\mu^n.$$

Afkappen van deze beide reeksen na de eerste twee termen levert de belangrijke *Eddington-Barbier benadering*:

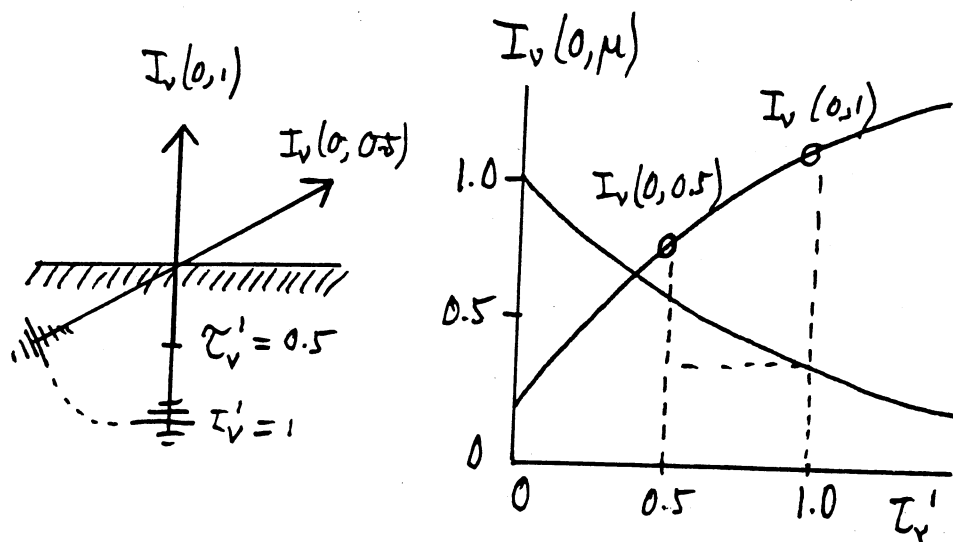
$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu) \approx S_\nu(\tau'_\nu = \mu). \quad (3.18)$$

Ga na dat deze benadering exact geldt als S_ν lineair verloopt met τ'_ν .

Dus: de straling die uittreedt aan het oppervlak wordt gekenmerkt door de omstandigheden op één vrije weglengte van het oppervlak — en wel exact als de bronfunctie lineair met de optische diepte verloopt. De vrije weglengte moet hierbij langs de kijkrichting gemeten worden, ook als we scheef het medium in kijken. De uittredende straling in de gezichtsrichting wordt derhalve gekenschetst door de omstandigheden op radiële optische diepte $\tau'_\nu = \mu$, i.e. op optische diepte $\tau'_\nu = 1$ gemeten langs de kijkrichting, ofwel op de lokatie vanwaar de afgelegde weg langs de bundel tot het oppervlak optische weglengte $\tau_\nu = 1$ levert (Figuur 3.2).

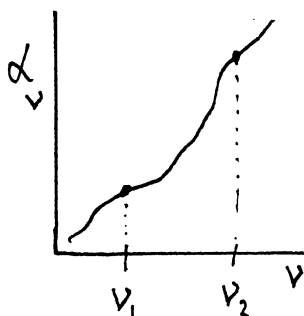
Ga na dat de Eddington-Barbier benadering *niet* betekent dat *alle* waargenomen fotonen op optische diepte $\tau'_\nu = 1$ ontsnappen, ook al wordt dat vaak grofweg gezegd ("de fotonen komen van $\tau = 1$ "). De integrand $S_\nu \exp(-\tau'_\nu)$ strekt zich uit over een breed bereik in τ'_ν , van het oppervlak bij $\tau'_\nu = 0$ tot $\tau'_\nu \approx 10$ waar de factor $\exp(-\tau'_\nu)$ hem afkapt. Uit deze hele laag ontsnappen fotonen; *tezamen* worden ze gekenmerkt door de waarde van de bronfunctie op $\tau'_\nu = 1$.

We concluderen dat kennis van de lokale bronfunctie $S_\nu(\tau'_\nu)$ vereist is om de straling van een object te interpreteren, zowel voor het optisch dikke geval met $I_\nu^+ \approx S_\nu(\tau'_\nu = 1)$ als voor het optisch dunne geval met $I_\nu(D) \approx I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)] \tau_\nu(D)$. De bronfunctie wordt nader gespecificeerd in hoofdstukken 4-7; voornamelijk, in de rest van dit hoofdstuk, beschouwen we de bronfunctie als een gegeven grootheid, zonder fysische interpretatie. De oplettende lezer zal echter op grond van vragen 3.25 en 3.26 terecht vermoeden dat $S_\nu \approx B_\nu(T)$ waar thermische fotoncreatie en fotondestructie overheersen terwijl $S_\nu \approx J_\nu$ als elastische verstrooiingsprocessen de overhand hebben.



Figuur 3.2: De Eddington-Barbier benadering. De waargenomen intensiteit I_ν komt in goede benadering overeen met de waarde van de bronfunctie S_ν op één vrije weglengte van het oppervlak, gemeten langs de bundel. Langs de scheve gezichtslijn met richtingscosinus $\mu = 0.5$ steekt één vrije weglengte minder diep dan voor de loodrecht op het oppervlak uittredende fotonen; de radiële optische diepte van die representatieve diepte is $\tau'_\nu = 0.5$.

Vraag 3.34 Geldt de Eddington-Barbier benadering ook voor een homogene laag? Bereken uit vergelijking (3.17) de gemiddelde ontsnappingsdiepte van fotonen uit een homogene laag.



Vraag 3.35 De intensiteit van de zon neemt in het zichtbare spectraalgebied af van het midden van de zonschijf naar de rand. Wat zegt dat over het verloop van de bronfunctie met de hoogte in de zonnatmosfeer?

Vraag 3.36 Stel dat de continue extinctiecoëfficiënt α_ν op twee frequenties ν_1 en ν_2 een factor 10 verschilt, maar dat de bronfunctie S_ν op beide frequenties gelijk is. Hoe verhouden zich de uittredende intensiteiten op de twee frequenties voor:

- een dunne homogene laag;
- een homogene halfruimte;
- een dikke laag met $S_\nu(\tau'_{\nu_1}) = S_\nu(\tau'_{\nu_2} = 0) + \tau'_{\nu_1}$?

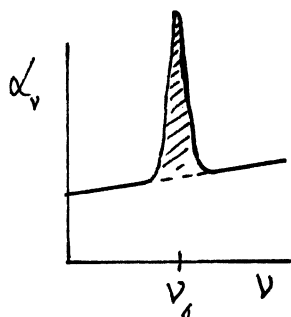
Vraag 3.37 Laat zien dat voor de aan het oppervlak van een dikke laag uittredende flux analoog aan de Eddington-Barbier benadering geldt:

$$\mathcal{F}_\nu^+(\tau'_\nu = 0) = \pi S_\nu(\tau'_\nu = 2/3)$$

mits S_ν lineair is in τ'_ν .

3.8 Spectraallijnen

Als illustratie van bovenstaande resultaten voor de intensiteit uit dunne en dikke lagen bespreken we de vorming van spectraallijnen. Een spectraallijn is altijd het gevolg van een discrete bb overgang, *i.e.* van een *extra* proces naast de continue processen die op de betreffende frequentie opereren.



De aanwezigheid van een bb overgangsmogelijkheid heeft twee gevolgen:

- het bb proces levert een extra mogelijkheid tot *extinctie*, gesuperponeerd op de continue extinctie: *op de frequentie van een spectraallijn is de extinctiecoëfficiënt in het medium groter dan voor de naastliggende frequenties*;
- de *bronfunctie* die bij het bb proces hoort kan verschillen van die voor de continue processen op die frequentie.

Tezamen kunnen deze twee mogelijkheden ervoor zorgen dat een spectraallijn waarneembaar is in de uittredende intensiteit, in emissie of in absorptie ten opzichte van de continue achtergrond.

De aanwezigheid van extra bb processen doet ook de emissiecoëfficiënt j_ν toenemen maar, zoals gezegd, we kiezen voor de combinatie extinctie + bronfunctie in plaats van extinctie + emissie. De bronfuncties voor de bb en de continuum processen worden respectievelijk gegeven door:

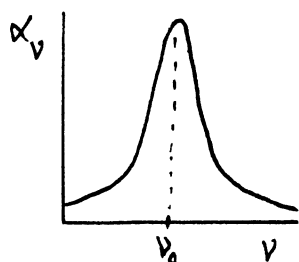
$$S_\nu^l = \frac{j_\nu^{\text{lijn}}}{\alpha_\nu^{\text{lijn}}} \quad \text{en} \quad S_\nu^c = \frac{j_\nu^{\text{cont}}}{\alpha_\nu^{\text{cont}}};$$

de bb extinctiepiek werkt door in de totale optische dikte volgens:

$$\tau_\nu = \int \alpha_\nu ds = \int \alpha_\nu^{\text{cont}} ds + \int \alpha_\nu^{\text{lijn}} ds; \quad (3.19)$$

de totale bronfunctie is:

$$S_\nu^{\text{tot}} = \frac{\sum j_\nu}{\sum \alpha_\nu} = \frac{j_\nu^{\text{cont}} + j_\nu^{\text{lijn}}}{\alpha_\nu^{\text{cont}} + \alpha_\nu^{\text{lijn}}}. \quad (3.20)$$



Hierbij moet een "lijn" niet worden opgevat als een oneindig scherpe δ -functie maar als een smalle kansverdeling in frequentie. De lijnextinctiecoëfficiënt zelf vertoont al zo'n kansverdeling: het "extinctieprofiel", dat door diverse soorten lijnverbreding een beetje in frequentie is uitgesmeerd (zie pagina 5). De vorm van deze extinctiekansverdeling is klokvormig: een Gaussvormige kern met breed uitlopende vleugels.

Vraag 3.38 Mag je extinctiecoëfficiënten *per proces* definiëren en dan optellen? En emissiecoëfficiënten? Optische dieptes? Bronfuncties?

Vraag 3.39 Ga na dat geldt:

$$S_\nu^{\text{tot}} = \frac{S_\nu^c + \eta S_\nu^l}{1 + \eta}$$

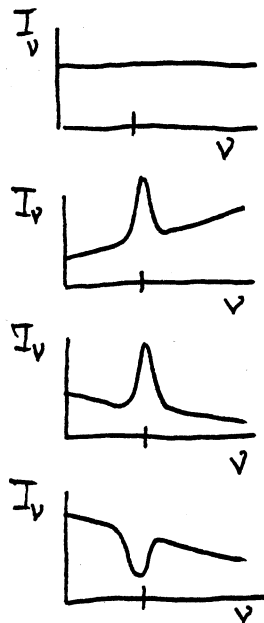
met $\eta \equiv \alpha_\nu^{\text{lijn}} / \alpha_\nu^{\text{cont}}$.

Vraag 3.40 Stel dat toevoeging van een bb proces de totale extinctie op een gegeven plaats en frequentie verdubbelt. Verdubbelt dan ook de lokale emissie? Van welke grootte hangt dat af?

3.8.1 Lijnen uit een homogene laag

We bekijken de vorming van spectraallijnen eerst voor een homogene laag met dikte D . Naast homogeniteit nemen we ook aan dat de continuumbronfunctie gelijk is aan de lijnbronfunctie, dus $S_\nu^c = S_\nu^l = S_\nu^{\text{tot}} = S_\nu$. De diverse gevallen die voortvloeien uit vergelijking (3.15) zijn samengevat in Tabel 3.1.

$I_\nu(0)$	$\tau_\nu(D)$	$I_\nu(D)$
$0 - \infty$	$\gg 1$	S_ν
0	< 1	$(\alpha_\nu^{\text{cont}} + \alpha_\nu^{\text{lijn}}) S_\nu D$
$I_\nu(0) < S_\nu$	< 1	$I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)] (\alpha_\nu^{\text{cont}} + \alpha_\nu^{\text{lijn}}) D$
$I_\nu(0) > S_\nu$	< 1	$I_\nu(0) - [I_\nu(0) - S_\nu] (\alpha_\nu^{\text{cont}} + \alpha_\nu^{\text{lijn}}) D$



Tabel 3.1: Lijnen uit een homogene laag. Vier gevallen: optisch dik, optisch dun zonder aanstraling, aangestraald met $I_\nu(0) < S_\nu$, aangestraald met $I_\nu(0) > S_\nu$.

Vraag 3.41 Interpreteer de twee laboratoriumproeven aangaande de Na I D lijnen van vragen 1.21 en 1.22 volgens het schema van Tabel 3.1.

Vraag 3.42 De lijnextinctiecoëfficiënten van de beide Na I D lijnen schelen een factor 2. Hoeveel schelen de waargenomen lijnsterktes volgens het schema van Tabel 3.1?

Vraag 3.43 In het zonnenspectrum vertonen de Na I D lijnen zich als donkere absorptielijnen (Figuur 1.2). Valt dat met het schema van Tabel 3.1 te begrijpen?

Vraag 3.44 Ga na dat een spectraallijn uit een onverlichte optisch dunne homogene laag *altijd* een emissielijn is. Is dat ook zo voor een inhomogene optisch dunne laag? En als de laag optisch dik is op de lijngolfenlengte maar optisch dun in het continuum? En andersom?

3.8.2 Lijnen uit een dikke laag

In een optisch dik medium waarin de bronfunctie niet overal hetzelfde is vermengen zich de effecten van de extra bb processen op de lijnextinctie en op de bronfunctie, omdat dan een andere vormingsdiepte van de vrijkomende straling een andere waarde van de bronfunctie kan bemonsteren. We bekijken dat voor het speciale geval dat de continue bronfunctie S_ν^c en de lijnbronfunctie S_ν^l overal aan elkaar gelijk zijn, maar tezamen met de diepte in het medium variëren.

Het effect van de extra lijnextinctie is dan dat de lokatie met optische diepte $\tau'_\nu = 1$, die representatief is voor de vrijkomende fotonen, op de lijnfrequentie *meer naar buiten ligt* dan voor het continuum aan weerszijden in het spectrum. Anders gezegd: je blik dringt op de lijnfrequentie minder diep in het medium door omdat er op die frequentie extra bb extinctieprocessen optreden. Het vierluik in Figuur 3.3 geeft dit weer.

Ook als de Eddington-Barbier relatie niet precies opgaat zal het zo zijn dat fotonen op een frequentie waarop de extinctie groter is pas dicht bij het oppervlak ontsnappen: hun vrije weglengte is kleiner. Uit een optisch dik medium waarin $S_\nu^c = S_\nu^l$ krijg je dus *uitsluitend* spectraallijnen te zien als de bronfunctie met de diepte varieert, zodat een andere bemonsteringsdiepte ook een andere intensiteit levert. In het hier getekende vierluik neemt de bronfunctie naar buiten af, zodat de spectraallijnen *altijd* een lagere intensiteit tonen dan het continuum: het zijn absorptielijnen.

Het effect van de lijnextinctie op de ontsnappingsdiepte kan heel groot zijn omdat de bb extinctiecoëfficiënt in het profielcentrum vaak met ordes van grootte de continue extinctiecoëfficiënt overtreft. Een "sterke" spectraallijn kan zo een dikke laag bemonsteren: op elk frequentie uit het waargenomen lijnprofiel ontvangen we (in Eddington-Barbier benadering) een intensiteit gelijk aan de bronfunctie op de diepte waar $\tau'_\nu = 1$, en die diepte wordt bepaald door de waarde van het profiel van de extinctiecoëfficiënt op die frequentie. Dus geeft de vorm van een waargenomen sterke spectraallijn niet direct het verloop van de extinctiecoëfficiënt met de frequentie weer, maar veeleer een afspiegeling van het verloop van de bronfunctie met de diepte zoals dat door de extinctiecoëfficiënt bemonsterd wordt. Door het lijnprofiel heen verloopt de kijkdiepte sterk, en daarmee verandert de waarde van de bronfunctie die we te zien krijgen.

Feitelijk maakt het hier niet uit of we spreken over smalbandige veranderingen van de extinctiecoëfficiënt ten gevolge van bb processen op de lijngolfenlengte of over verschillen in de continue extinctie op uiteenlopende frequenties. Het verhaal gaat net zo goed op voor twee verschillende frequenties in het continuum. Alleen geldt dan doorgaans niet dat de beide bronfuncties aan elkaar gelijk zijn, zoals hier voor het gemak is verondersteld. Dan bemonstert elke extinctiecoëfficiënt zijn eigen bijbehorende bronfunctie.

Vraag 3.45 Teken ook een vierluik voor het geval dat de bronfunctie naar buiten toeneemt. Wat krijg je dan voor spectraallijnen?

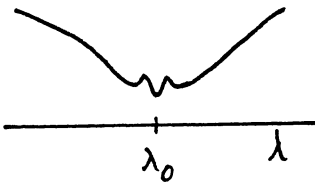
Vraag 3.46 Valt nu te verklaren waarom de zon de Na I D lijnen in absorptie toont (Figuur 1.2)?

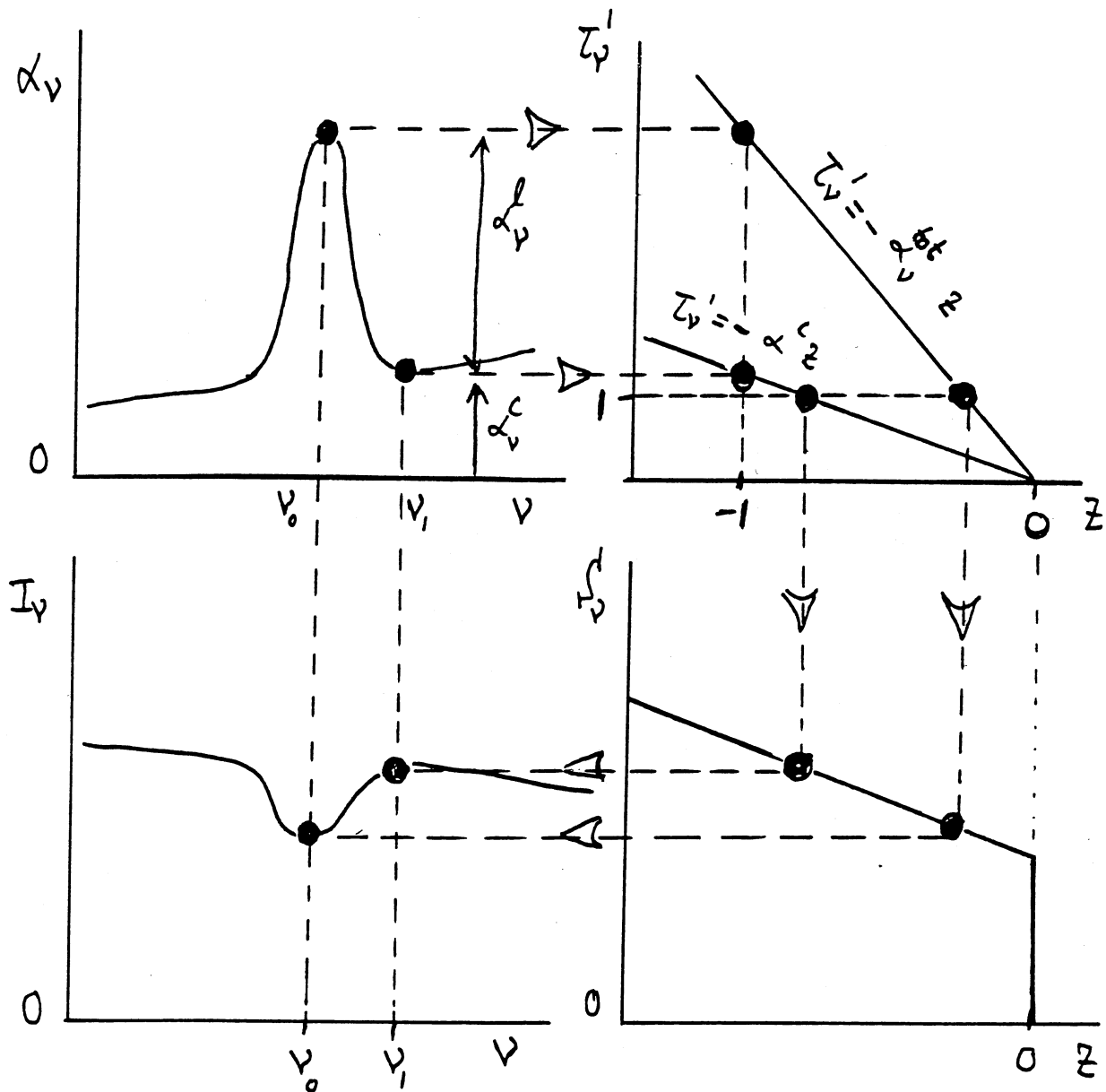
Vraag 3.47 De extinctiecoëfficiënten van de twee Na I D lijnen schelen een factor twee. Schelen hun lijnsterktes in het zonnenspectrum ook een factor twee?

Vraag 3.48 De zogenaamde H & K resonantielijnen van Ca II zijn in het zonnenspectrum nog veel sterker (*i.e.* breder en dieper) dan de Na I D lijnen, zie Figuur 8.6. Stel dat de lijnbronfuncties voor alle vier lijnen hetzelfde zijn, waarin moet dan het verschil gezocht worden?

Vraag 3.49 De Ca II K lijn in het zonnenspectrum vertoont twee minuscule maar veelbesproken bobbeltjes ter weerszijden van z'n centrum. Kun je daar met een vierluik als in Figuur 3.3 een verklaring voor geven? Ga er van uit dat het profiel van hun extinctiecoëfficiënt de standaard klokvorm heeft.

Vraag 3.50 In het vierluik in Figuur 3.3 is verondersteld dat de grootte van de extinctiecoëfficiënt zelf niet door het medium varieert. Hoe zie je dat? Lijkt je dat realistisch? Ook de *vorm* van de lijnextinctiecoëfficiënt hoeft niet behouden te zijn. Hoe en waardoor zou die kunnen veranderen door het medium?





Figuur 3.3: Vierluik voor lijnvorming in optisch dikke media. De extinctiecoëfficiënt α_ν (linksboven) bepaalt op welke hoogte de lokatie $\tau'_\nu = 1$ ligt voor elke frequentie ν (rechtsboven). Die lokatie definieert de waarde van de bronfunctie (rechtsonder) waaraan de waargenomen intensiteit gelijk is (linksonder). Aannames: geen variatie van de extinctiecoëfficiënt door het medium, gelijkheid van de lijnbronfunctie en de continue bronfunctie, lineair verloop van de bronfunctie met de optische diepte zodat de Eddington-Barbier benadering exact geldt.

We hebben nu een belangrijk punt bereikt. De straling die we uit een onverlichte optisch dunne laag ontvangen wordt gegeven door het product:

$$I_\nu = \alpha_\nu S_\nu D$$

en de straling uit een optisch dikke laag wordt gegeven door:

$$I_\nu \approx S_\nu (\tau'_\nu = 1).$$

In beide gevallen moeten we de extinctiecoëfficiënt α_ν en de bronfunctie S_ν in de laag kennen om de uittredende intensiteit I_ν te vinden — in het tweede geval is α_ν vereist om te weten hoe diep $\tau'_\nu = 1$ steekt. Deze beide grootheden te specificeren, zowel voor continua als voor lijnen, is derhalve een taak die ons nog rest. Dat gebeurt in de volgende hoofdstukken.

Hoofdstuk 4

Straling en materie in TE

4.1 Inleiding: thermodynamisch evenwicht

In dit hoofdstuk vervolgen we de vooralsnog macroscopische beschrijving met een discussie van ensemblagemiddelen. Die dienen om de hoeveelheid deeltjes en fotonen van een gegeven type die in een medium aanwezig zijn te specificeren. Middelen over ensembles gaat het eenvoudigst in *evenwichtssituaties*. Daarin zijn diverse gradaties; in dit hoofdstuk beperken we ons tot de veronderstelling van *thermodynamisch evenwicht* (TE).

In TE zijn *alle* processen en toestanden met elkaar in evenwicht. Elk proces is in microscopisch evenwicht met zijn omgekeerde: er is *gedetailleerd evenwicht* ("detailed balancing"). Alle macroscopische equipartitiewetten gelden, en wel met voor alle *dezelfde* temperatuur. Voor de *straling* zijn dat de wetten van Kirchhoff, Planck, Wien en Stefan-Boltzmann; voor de *materie* zijn dat de wetten van Maxwell, Boltzmann en Saha.

TE is de meest strikte vorm van evenwicht, en komt in de natuur niet veel voor. Verderop zullen de hier beschreven TE wetten ook gebruikt worden voor situaties met minder stringente evenwichtsvoorwaarden (zoals voor LTE = Lokaal TE, waarbij de temperatuur langzaam mag variëren door het medium), en om afwijkingen van de wetten te beschrijven.

Straling kan met materie in evenwicht verkeren dank zij het feit dat fotonen massaloos zijn. Anders dan voor fermionen geldt er voor fotonen geen Pauli-uitsluitprincipe zodat ongelimiteerde creatie en destructie van fotonen mogelijk zijn, en daarmee de instelling van een evenwicht.

4.2 TE Stralingswetten

4.2.1 Kirchhoff

TE geldt in een homogeen, isotherm, isotroop medium, bijvoorbeeld in een door isotherme wanden omsloten medium na voldoende verloop van tijd. Dan geldt volgens (3.6) voor *elke* bundel, op *elke* frequentie en op *elk* tijdstip:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu = 0 \quad \rightarrow \quad j_\nu = \alpha_\nu I_\nu \quad (4.1)$$

Dit is een wet van Kirchhoff. Een andere wet van Kirchhoff is dat de intensiteit in een TE-medium isotroop is, en uitsluitend afhangt van de frequentie en de temperatuur:

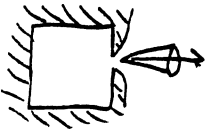
$$I_\nu \equiv B_\nu(T), \quad (4.2)$$

ongeacht de aard van het medium. Hierin is B_ν de Planckfunctie.

Tezamen leveren de twee wetten dat in TE geldt:

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T), \quad (4.3)$$

dus is de bronfunctie $S_\nu \equiv j_\nu/\alpha_\nu$ in TE overal gelijk aan de Planckfunctie B_ν .



Een goede bron van TE straling is een gesloten doosje dat is geplaatst in een oven zodat het medium erin isotherm is. Nadat dat daarin evenwicht is bereikt maken we er een klein gaatje in. Als het gaatje maar klein genoeg is kan de straling die daar uit ontsnapt representatief worden beschouwd voor de straling in het medium binnen in het doosje. Uit zo'n gaatje komt dan de eigen, slechts door de temperatuur bepaalde, evenwichtsstraling van het medium in het doosje.



De tweede wet valt aannemelijk te maken per gedacht experiment. Stel dat de intensiteit wel afhangt van de aard van het medium, dus dat in twee isotherme TE doosjes van dezelfde temperatuur verschillende intensiteiten voorkomen: $I_\nu^1 \neq I_\nu^2$, met I_ν^1 de intensiteit in het ene doosje en I_ν^2 de intensiteit in het andere. Maak een opening tussen de doosjes en plaats daarin een monochromatisch filter dat alleen de frequentieband $(\nu, \nu + d\nu)$ doorlaat. Fotonen met frequentie ν zullen dan migreren uit het doosje met de grootste intensiteit naar het andere, in strijd met de tweede hoofdwet van de thermodynamica. Dus was de veronderstelling fout, en moet gelden dat $I_\nu^1 = I_\nu^2$.

Een derde wet van Kirchhoff is dat (4.1) ook geldt voor de wanden van het doosje, met κ_ν^{opp} de coëfficiënt voor ware absorptie door een oppervlak, niet per eenheid van weglengte gedefinieerd maar dimensieloos:

$$dI_\nu^{\text{abs}} \equiv -\kappa_\nu^{\text{opp}} I_\nu^{\text{opvallend}},$$

en evenzo voor een coëfficiënt voor de eigen emissie $\epsilon_\nu^{\text{opp}}$ van de wand (i.e. zonder de bijdrage door reflectie of verstrooiing aan de wand):

$$dI_\nu^{\text{em}} \equiv \epsilon_\nu^{\text{opp}}.$$

Evenwicht vereist dan:

$$\epsilon_\nu^{\text{opp}} = \kappa_\nu^{\text{opp}} I_\nu^{\text{opvallend}} = \kappa_\nu^{\text{opp}} B_\nu.$$

Ga na dat geldt: $0 \leq \kappa_\nu^{\text{opp}} \leq 1$. Hoe groter de absorptiecoëfficiënt, hoe groter de eigen straling: de absorptie bepaalt de emissie. Een oppervlak met $\kappa_\nu^{\text{opp}} = 1$ absorbeert alle opvallende intensiteit, is "zwart". Een "zwart lichaam" straalt derhalve in alle richtingen een intensiteit $I_\nu = \epsilon_\nu^{\text{opp}} = B_\nu$ uit; het straalt "Plancks".

Een gaatje in een TE-doosje kan dus ook als een goede benadering voor een *zwart oppervlak* beschouwd worden: alle fotonen die er doorheen het doosje in gaan komen er niet meer uit als het gaatje maar klein genoeg is — het gaatje is zwart want z'n absorptiecoëfficiënt is $\kappa_\nu^{\text{opp}} \approx 1$. De fotonen die er wel uitkomen (andere dus) laten het gaatje Plancks stralen.

Een uitgebreidere discussie hierover vind je in Chandrasekhar (1939), Chapter V (pagina 199 in de Dover editie).

Vraag 4.1 Verschilt de straling die je waarneemt uit twee TE-doosjes van dezelfde temperatuur als het ene doosje van spiegelend materiaal is gemaakt en het andere van zwart materiaal?

Vraag 4.2 Is een TE-doosje met een voldoende klein gaatje een optisch dikke of een optisch dunne bron? Geldt de Eddington-Barbier relatie voor zo'n gaatje?

Vraag 4.3 Geef een beschrijving van de straling van een TE-wand met gebruikmaking van een *extinctiecoëfficiënt*, i.e. met inbegrip van reflectie en verstrooiing aan de wand.

Vraag 4.4 Hoe zou je de bronfunctie van een oppervlak definiëren? Hoe groot is die voor een TE oppervlak? Maakt het verschil of dat oppervlak wel of niet "zwart" is?

4.2.2 Planck

Voor de intensiteit en de bronfunctie in een medium dat in TE verkeert geldt $I_\nu = S_\nu = B_\nu$, met B_ν gegeven door de *formule van Planck*.

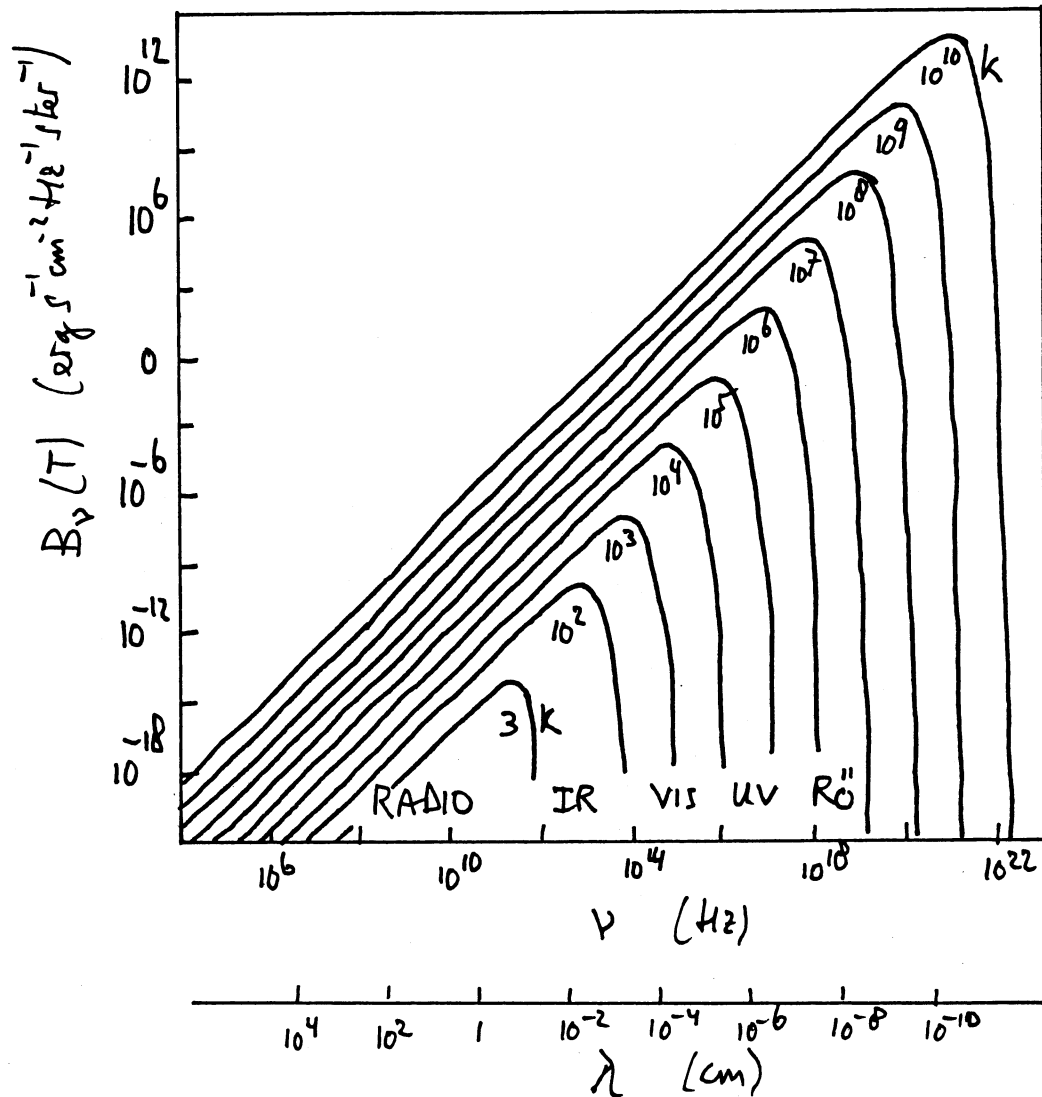
Deze is per frequentie-eenheid:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (4.4)$$

met dimensie B_ν : [$\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{ster}^{-1}$], en h de constante van Boltzmann, en per golflengte-eenheid:

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (4.5)$$

met dimensie B_λ : [$\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1} \text{ster}^{-1}$].
Representatieve Planck-krommes zijn afgebeeld in Figuur 4.1.



Figuur 4.1: De Planckfunctie voor diverse temperaturen.

Soms wordt B_ν een factor 4π groter gedefinieerd: geïntegreerd over alle richtingen in plaats van per steradiaal.

De Planckkrommes in Figuur 4.1 snijden elkaar nergens: $B_\nu(T)$ stijgt voor alle frequenties monotoon met de temperatuur.

Vraag 4.5 Waarom staat er respectievelijk ν^3 en λ^{-5} in de twee voorfactoren?

Vraag 4.6 Ga na dat $B_\nu \downarrow 0$ voor $T \downarrow 0$, en dat $B_\nu \uparrow \infty$ voor $T \uparrow \infty$.

4.2.3 Afgeleide stralingswetten

4.2.3.1 Wien benadering

Voor voldoende grote ν/T is $\exp(h\nu/kT) \gg 1$ en vereenvoudigt de Planckformule tot de *Wien benadering*:

$$h\nu/kT \gg 1 \rightarrow B_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}. \quad (4.6)$$

Dit zijn de steile gedeeltes aan de rechterkant van Figuur 4.1.

4.2.3.2 Rayleigh-Jeans benadering

Voor voldoende kleine ν/T geldt $\exp(h\nu/kT) - 1 \approx h\nu/kT$ en vereenvoudigt de Planckformule tot de *Rayleigh-Jeans benadering*:

$$h\nu/kT \ll 1 \rightarrow B_\nu \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2}. \quad (4.7)$$

Dit zijn de lineaire gedeeltes aan de linkerkant van Figuur 4.1.

Vraag 4.7 Geef de Wien- en Rayleigh-Jeans benaderingen voor B_λ .

Vraag 4.8 In het boek "Astrophysics of the Sun" van Zirin (1988) staat op pag. 59-60:

... and the Planck function is

$$B_\nu d\nu = \frac{2h\nu^2}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

in the frequency scale, while in the wavelength scale

$$B_\lambda d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1} d\lambda.$$

We must be careful of the differential factor $d\nu = -(c/\lambda^2) d\lambda$ which must be used as we transfer from the frequency scale Hz^{-1} to the wavelength scale cm^{-1} . The Planck function has two important asymptotic forms. At long wavelengths ($h\nu \ll kT$) the denominator in the equation for $B_\lambda d\lambda$ becomes $h\nu$ and we have:

$$B_\nu = \frac{2kT}{\lambda^2}$$

which is the Rayleigh-Jeans law. It tells us that when energy is not a factor, the radiation is proportional to the possible density of photons. For ($h\nu \gg kT$), the exponential in the denominator dominates, and

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{kT} e^{-h\nu/kT},$$

which is the Boltzmann law from the fact that the distribution of higher-energy photons depends on the Boltzmann formula.

Commentaar?

4.2.3.3 Verschuivingswet van Wien

De lokatie van het maximum van de Planck-krommes volgt de *verschuivingswet van Wien*, die volgt uit $dB_\nu/d\nu = 0$, respectievelijk $dB_\lambda/d\lambda = 0$.

De piek van B_ν ligt bij:

$$h\nu_{\max} = 2.82 kT \rightarrow \frac{\nu_{\max}}{T} = 5.88 \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}. \quad (4.8)$$

De piek van B_λ ligt bij:

$$\lambda_{\max} T = 0.290 \text{ cm K}. \quad (4.9)$$

Vraag 4.9 Ga na dat de maxima van de krommes B_λ en van B_ν niet op dezelfde plaats in het spectrum liggen.

4.2.3.4 Stefan-Boltzmann

Integratie over het hele spectrum levert de *wet van Stefan-Boltzmann*:

$$B \equiv \int_0^\infty B_\nu \, d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (4.10)$$

met:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

De gebruikelijke uitdrukking $B = \sigma T^4$ geldt niet voor intensiteit maar voor de uitwaartse flux $\mathcal{F}^+ = \pi I$ van een isotroop stralend zwart oppervlak.

4.2.4 Stralingstemperaturen

Omdat het verloop van de Planckfunctie met de frequentie uitsluitend door de temperatuur wordt bepaald kan de van een object waargenomen intensiteit vaak het beste als een temperatuur beschreven worden.

4.2.4.1 Helderheidstemperatuur

De *helderheidstemperatuur* T_b is die temperatuur waarvoor de Planckfunctie de waargenomen intensiteit reproduceert:

$$B_\nu(T_b) = I_\nu^{\text{obs}}. \quad (4.11)$$

De index b staat voor *brightness*. Deze maat is vooral handig in het radiogebied. Daar geldt Rayleigh-Jeans:

$$T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu^{\text{obs}}, \quad (4.12)$$

dus daar is T_b dus een lineaire maat voor de helderheid.

Vraag 4.10 Hoe luidt de definitie van helderheidstemperatuur als de intensiteit wordt waargenomen per eenheid van golflengte-bandbreedte?

Vraag 4.11 Hangt de helderheidstemperatuur van een radiobron af van zijn afstand?

Vraag 4.12 Kun je de helderheidstemperatuur meten van een puntvormig (*i.e.* niet-opgelost) object zoals een ster? En van een uitgebreide bron zoals een nevel als die niet in TE verkeert?

Vraag 4.13 Wanneer is T_b een lineaire maat voor de temperatuur van een optisch dikke radiobron? En wanneer voor een optisch dunne radiobron?

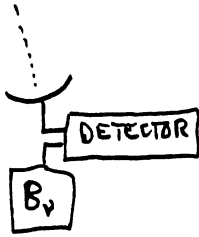
Vraag 4.14 Stel dat een homogene radiobron thermisch straalt, *i.e.* $I_\nu = B_\nu$. Wat is de frequentieafhankelijkheid van de ontvangen straling? En van de helderheidstemperatuur daarvan? Doet de optische dikte van de bron er toe?

4.2.4.2 Antennetemperatuur

Radioastronomen kenschetsen de van een bron ontvangen straling vaak met de *antennetemperatuur* T_A :

$$T_A \equiv \eta_A T_b, \quad (4.13)$$

met η_A de efficiëntiefactor van de antenne.



T_A is de waarde van T_b zoals de antenne de bron ziet, i.e. de temperatuur van een "vervangende ruisbron": een bron van zwarte straling die je in plaats van de antenne voor de detector schakelt. Voorwaarde is dat het object de hele antennebundel vult want anders wordt er geen intensiteit gemeten.

Vraag 4.15 Hoe groot is de antennetemperatuur van een radiobron ter grootte Ω_{bron} in hoekmaat als die kleiner is dan het scheidend vermogen Ω_{antenne} van de telescoop?

4.2.4.3 Kleurtemperatuur

De *kleurtemperatuur* T_c is de temperatuur waarvoor de Planckfunctie de helling van het waargenomen spectrum op de waarnemingsfrequentie reproduceert:

$$\left. \frac{dI_\nu^{\text{obs}}}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_0} = \left. \frac{dB_\nu(T_c)}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_0} \quad (4.14)$$

Bijvoorbeeld twee-kleuren fotometrie:

$$\frac{I_1}{I_2} \equiv \frac{B_{\lambda_1}(T_c)}{B_{\lambda_2}(T_c)}$$

de verhouding van twee waargenomen intensiteiten bepaalt een temperatuur. Voordeel hierbij is de relatieve meting: de absolute waarde van I_ν hoeft niet bekend te zijn.

Schrijfwijze: $(B-V) \equiv 2.5 \log(I_V/I_B)$.

Vraag 4.16 Twee-kleuren fotometrie wordt veel toegepast voor sterren. Hoe is dat te rijmen met het feit dat sterren onopgeloste bronnen zijn?

Vraag 4.17 Aan welke voorwaarden moet voldaan zijn opdat twee-kleuren fotometrie van een ster zijn temperatuur levert? Van welke laag in de ster is dat dan de temperatuur?

Vraag 4.18 Ga na dat T_c , evenals T_b en T_A , een functie van de frequentie is. Bij drie-kleuren fotometrie vindt men twee kleurtemperaturen. Geef drie redenen waarom de beide kleurtemperaturen die uit drie-kleuren fotometrie van een ster volgen van elkaar kunnen verschillen.

4.2.4.4 Effectieve temperatuur

De *effectieve temperatuur* T_{eff} van een stralingsbron is de temperatuur waarvoor een zwart oppervlak dezelfde totale flux uitstraalt:

$$\sigma T_{\text{eff}}^4 = \mathcal{F}_{\text{bron}}^+ \quad (4.15)$$

dus de temperatuur waarvoor een isotroop stralend zwart oppervlak per cm^2 dezelfde totale uitwaartse flux $\mathcal{F}^+ = \pi B = \pi \int_0^\infty B_\nu d\nu$ uitstraalt als een cm^2 van het object.

Vraag 4.19 Druk T_{eff} uit in de uittredende intensiteit van een bolsymmetrische bron.

4.3 TE Materiewetten

4.3.1 Maxwell

Bij equipartitie van kinetische energie, hetgeen in TE het geval is, geldt de *snelheidsverdeling van Maxwell* per soort deeltje met massa m . Per *snelheidscomponent*:

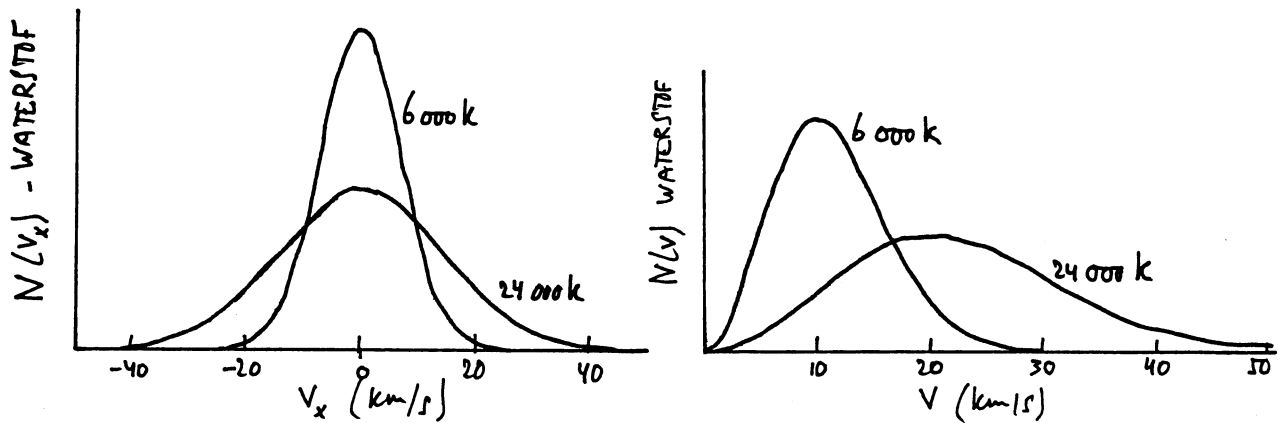
$$\frac{n(v_x)}{N} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-(1/2)mv_x^2/kT} dv_x \quad (4.16)$$

en voor de *snelheids grootte*:

$$\frac{n(v)}{N} dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-(1/2)mv^2/kT} dv \quad (4.17)$$

met N het totaal aantal deeltjes van deze soort per volume-eenheid en m de massa per deeltje.

De eerste verdelingsfunctie is een Gaussverdeling. De tweede vertoont een "staart" ten gevolge van de v^2 term, zie Figuur 4.2.



Figuur 4.2: De snelheidsverdeling van Maxwell, resp. voor een snelheidscomponent en voor de snelheids grootte.

Vraag 4.20 Leidt de tweede verdeling af uit de eerste.

Vraag 4.21 Laat zien dat beide verdelingen genormeerd zijn.

Vraag 4.22 Ga door differentiëren van vergelijking 4.17) naar v na dat de meest waarschijnlijke snelheid wordt gegeven door:

$$v = \sqrt{2kT/m}.$$

Hoe groot is de meest waarschijnlijke snelheidscomponent? De gemiddelde deeltjes-energie? De middelbare Dopplersnelheid in de gezichtsrichting?

4.3.2 Boltzmann

In TE wordt de verdeling van de deeltjesbezettingen van een specifieke soort atoom (of ion of molecuul) over de mogelijke discrete excitatietoestanden (gebonden energieniveaus) gegeven door de bezettingswet van Boltzmann:

$$\left[\frac{n_{r,s}}{n_{r,t}} \right]^{\text{TE}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,t}} e^{-(\chi_{r,s} - \chi_{r,t})/kT}. \quad (4.18)$$

Hierin is:

$n_{r,s}$ = aantal atomen per cm^3 in niveau s van ionisatietoestand r ;

$g_{r,s}$ = statistisch gewicht van niveau s van ionisatietoestand r ;

$\chi_{r,s}$ = excitatie-energie van niveau s van ionisatietoestand r , gemeten vanaf de grondtoestand $(r, 0)$. Dus $\chi_{r,s} \equiv E_{r,s} - E_{r,0}$, en $\chi_{r,s} - \chi_{r,t} = h\nu$ voor een stralingsovergang tussen toestanden (r, s) en (r, t) , met het niveau s "hoger" (meer inwendige energie) dan niveau t .

Een andere vorm is:

$$\left[\frac{n_{r,s}}{N_r} \right]^{\text{TE}} = \frac{g_{r,s}}{U_r} e^{-\chi_{r,s}/kT} \quad (4.19)$$

met $N_r = \sum_s n_{r,s}$ de som van de bezettingen van alle niveaus van ionisatietoestand r per

cm^3 , en de *partitiefunctie* of *toestandssom* U_r van ionisatietoestand r gegeven door:

$$U_r \equiv \sum_s g_{r,s} e^{-\chi_{r,s}/kT}. \quad (4.20)$$

De Maxwell- en Boltzmannverdelingen zijn beide van de vorm

$$N^{\text{TE}} = \frac{1}{\sum} e^{-E/kT}$$

met \sum de geïntegreerde verdeling, respectievelijk continu en discreet.

Bij Boltzmann treedt *degeneratie* van niveaus op omdat magnetische splitsing pas optreedt bij aanwezigheid van een uitwendig magnetisch veld; het samenvallen van niveaus daarbuiten wordt beschreven met de statistische gewichten $g_{r,s}$.

De excitatie-energie $\chi_{r,s}$ is het "potentiaalverschil" tussen het grondniveau ($r, 0$) en het aangeslagen niveau (r, s). Het is gebruikelijk om energieverschillen tussen niveaus niet te meten in erg maar in eV of in cm^{-1} . De met 1 eV overeenkomende energie bedraagt 1.6021×10^{-12} erg (Allen 1976); golfgetallen zijn gedefinieerd als $\sigma = c_{\text{vac}} \nu$ (vergelijking 1.1). In beide gevallen moet ook een nulpunt worden afgesproken; het is gebruikelijk om excitatie-energie te meten vanaf het grondniveau omhoog, binnen elke ionisatietrap, zoals hierboven en in Appendix A; de ionisatie-energie wordt eveneens per ionisatietrap vanaf het grondniveau gemeten. Een enkele keer worden excitatie-energieën echter andersom gegeven, vanaf de ionisatiegrens omlaag toenemend; dat is in overeenstemming met het feit dat energie vrijkomt bij deëxcitatie, niet bij excitatie.

Een grote collectie termdigrammen is te vinden in de delen van Bashkin and Stoner 1975.

Vraag 4.23 Hoeveel eV bedraagt het potentiaalverschil tussen twee niveaus als de bijbehorende spectraallijn een golflengte van 500 nm heeft?

Vraag 4.24 Vaak wordt de Boltzmannverhouding tussen twee niveaus geschreven als:

$$\log(n_2/n_1)^{\text{TE}} = \log(g_2/g_1) - \chi_{12}\theta,$$

met χ_{12} in eV. Wat is θ ?

4.3.3 Saha

In TE wordt de deeltjesverdeling over de ionisatietoestanden van een element gegeven door de *bezettingswet van Saha*. Ook hier twee versies. Per grondniveau:

$$\left[\frac{n_{r+1,0}}{n_{r,0}} \right]^{\text{TE}} N_e = \frac{2g_{r+1,0}}{g_{r,0}} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r/kT} \quad (4.21)$$

met N_e de electronendichtheid en m_e de electronmassa, $n_{r+1,0}$ en $n_{r,0}$ de bezettingen van de grondtoestanden van twee opeenvolgende ionisatietrappen, $g_{r+1,0}$ en $g_{r,0}$ hun statistische gewichten, en χ_r de ionisatie-energie van trap r , *i.e.* de minimale energie nodig om een electron vrij te maken uit een atoom in toestand ($r, 0$). De factor 2 voor het statistisch gewicht $g_{r+1,0}$ is het statistisch gewicht van het vrijgemaakte electron; dat heeft $g_e = 2$ wegens de beide mogelijke oriëntaties van zijn spin.

Per ionisatietrap:

$$\left[\frac{N_{r+1}}{N_r} \right]^{\text{TE}} N_e = \frac{2U_{r+1}}{U_r} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r/kT}. \quad (4.22)$$

Of, met de electronendruk $P_e = N_e kT$:

$$\left[\frac{N_{r+1}}{N_r} \right]^{\text{TE}} P_e = \frac{2U_{r+1}}{U_r} \left(\frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} e^{-\chi_r/kT}.$$

Zie pag. 260 van Rybicki en Lightman voor een afleiding.

De Sahaformule is een specifieke vorm (met $U_e = g_e = 2$ en $m_A = m_e \ll m_B = m_{\text{element}}$) van de algemene formule voor de evenwichtsconstante in de evenwichtsreactie $A + B \rightleftharpoons AB$:

$$K_{AB} \equiv \frac{n_A \cdot n_B}{n_{AB}} = \left(\frac{2\pi kT}{h^2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \right)^{3/2} \frac{U_A U_B}{U_{AB}} e^{-E_{AB}/kT}$$

die bijvoorbeeld ook geldt voor het dissociatie-evenwicht van moleculen.

4.3.4 Voorbeeld: Boltzmann en Saha samen

Boltzmann en Saha samen leveren de bezettingsverhoudingen binnen één element. Om de deeltjesdichtheid in een specifieke toestand (aantal per cm^3) te vinden voor een willekeurig gasmengsel in TE benodigen we naast deze twee wetten:

- elementbehoud: $\sum_r N_r = N_{\text{element}}$;
- ladingsbehoud: $\sum_{\text{element}} \sum_r Z_r N_r = N_e$.

Deze vergelijkingen kunnen door numerieke iteratie worden opgelost. Meestal zijn er maar twee ionisatietrappen van een element tegelijkertijd van belang. Wel moeten de sporenelementen met kleine χ_r meegenomen worden, omdat deze rijkelijk kunnen bijdragen aan de electronendichtheid N_e (zie de tabel met ionisatie-energieën en abundanties in Appendix A).

Om vertrouwd te raken met Saha en Boltzmann volgt hier een numeriek voorbeeld, ontleend aan een vroeger dictaat van A. Schadee.

Neem een hypothetisch (maar ijzer-achtig) element E met:

- ionisatie-energieën $\chi_0 = 7$ eV, $\chi_1 = 16$ eV, $\chi_2 = 31$ eV, $\chi_3 = 51$ eV;
- excitatie-energieën: steeds met 1 eV omhoog, $\chi_{r,s} = s$ eV;
- statistische gewichten: $g_{r,s} = 1$ voor alle niveau's (r, s);
- drie karakteristieke steratmosferen: $P_e = 10^3$ dyne/cm² (voor alle drie) en $T_1 = 5\ 000$ K, $T_2 = 10\ 000$ K en $T_3 = 20\ 000$ K.

Een berekening (waarvan het leerzaam is die ook zelf uit te voeren) levert dan, met $N = \sum N_r$ de totale deeltjesdichtheid van dit element en met de notatie (-i) voor de orde van grootte $\approx 10^{-i}$, de onderstaande tabellen.

Partitiefuncties

U_r	5 000 K	10 000 K	20 000 K
U_0	1.11	1.46	2.25
$U_1 = U_2 = U_3$	1.11	1.46	2.27

De partitiefuncties blijken nauwelijks temperatuurgevoelig te zijn. U_0 is een som over slechts 7 niveau's; de hogere niveau's aanwezig in de trappen $r = 1$ etc. tellen blijkbaar pas boven $T = 10\ 000$ K een beetje mee (een procent verschil in de laatste kolom). De laagste niveau's zijn het belangrijkste, ten gevolge van de snel afnemende Boltzmannfactor $e^{-\chi/kT}$.

Saha

N_r^{TE}/N	5 000 K	10 000 K	20 000 K
$r = 0$	0.91	(-4)	(-10)
1	0.09	0.95	(-4)
2	(-11)	0.05	0.63
3	(-36)	(-11)	0.37
4	(-81)	(-30)	(-5)

In elke kolom zijn er steeds maar twee ionisatietrappen van belang. Voor $T = 5\ 000$ K is dit element hoofdzakelijk neutraal (E I), voor $T = 10\ 000$ K is het éénmaal geïoniseerd (E II), en pas bij hogere temperatuur verschijnen ook de tweede en derde ionisatietrappen (E III en E IV).

Boltzmann

$[n_{r,s}/N_r]^{\text{TE}}$	5 000 K	10 000 K	20 000 K
$s = 0$	0.90	0.69	0.44
1	0.09	0.22	0.25
2	0.01	0.07	0.14
3	(-3)	0.02	0.08
4	(-4)	0.01	0.04
5	(-5)	(-3)	0.02
6	(-6)	(-3)	0.01
10	(-10)	(-5)	(-3)
15	(-15)	(-8)	(-4)

Hier is een steile afval te zien met $\chi_{r,s}$, maar minder steil voor hogere temperatuur.

Bezettingen

De populaties van de niveau's worden gegeven door het product van de twee tabellen hierboven:

$$\frac{n_{r,s}^{\text{TE}}}{N} = \left[\frac{n_{r,s}}{N_r} \right]^{\text{TE}} \frac{N_r^{\text{TE}}}{N}$$

$\frac{n_{r,s}}{N}$	r = 0, E I			r = 1, E II			r = 2, E III		
	5 000	10 000	20 000	5 000	10 000	20 000	5 000	10 000	20 000
$s = 0$	0.82	(-4)	(-10)	0.08	0.66	(-4)	(-11)	0.02	0.27
1	0.08	(-4)	(-10)	0.01	0.21	(-5)	(-12)	0.01	0.16
2	0.01	(-5)	(-11)	(-3)	0.07	(-5)	(-13)	(-3)	0.09
3	(-3)	(-6)	(-11)	(-4)	0.02	(-5)	(-14)	(-3)	0.05
4	(-4)	(-6)	(-12)	(-5)	0.01	(-6)	(-15)	(-3)	0.03
5	(-5)	(-7)	(-12)	(-6)	(-3)	(-6)	(-16)	(-4)	0.01
6	(-6)	(-7)	(-12)	(-7)	(-3)	(-6)	(-17)	(-4)	0.01
10	(-10)	(-9)	(-13)	(-11)	(-5)	(-7)	(-21)	(-5)	(-3)
15	(-15)	(-12)	(-14)	(-16)	(-8)	(-8)	(-25)	(-9)	(-4)

Niveau $s = 1$ haalt een hogere maximale bezetting voor $r = 1$ (bij 10 000 K) dan voor $r = 0$ (bij 5 000 K) omdat de Boltzmannfactor met de temperatuur toeneemt. In het algemeen neemt de bezetting van een aangeslagen ($s > 0$) niveau bij toenemende temperatuur eerst toe, tot de Sahafactor N_r^{TE}/N de bezetting weer terug dringt. Daarom zijn vooral de aangeslagen nivo's van de neutrale trap weinig bezet. Een aangeslagen niveau bereikt zijn maximale bezetting bij een hogere temperatuur dan het grondniveau.

Vraag 4.25 Voor $T = 5\,000\text{ K}$ en $T = 10\,000\text{ K}$ is de som van de populaties 1, maar voor $T = 20\,000\text{ K}$ niet. Waarom?

Vraag 4.26 Verklaar dat in het spectrum van de zon de Ca II K lijn veel sterker is dan de H α lijn, terwijl de abundantieverhouding van calcium en waterstof in de zon $N_{\text{Ca}}/N_{\text{H}} = 1.7 \times 10^{-6}$ bedraagt.

Vraag 4.27 Een hete ster bestaat voor 90% uit waterstof en voor 10% uit titanium. In de fotosfeer is waterstof voor 50% geïoniseerd. Schat grof de verdeling van titanium over de verschillende ionisatietrappen en schat daarmee de electronendichtheid N_e als fractie van de totale deeltjesdichtheid N .

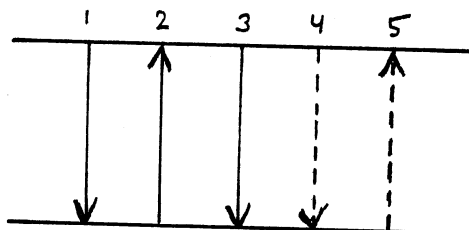
Hoofdstuk 5

Discrete processen

5.1 Inleiding: bb overgangen

We gaan nu over van de tot dusver macroscopische beschrijving op microscopische specificatie van de emissie- en extinctieprocessen per deeltje. Tussen twee energieniveau's zijn vijf verschillende processen mogelijk:

1. spontane stralingsdeëxcitatie;
2. stralingsexcitatie;
3. geïnduceerde stralingsdeëxcitatie;
4. botsingsdeëxcitatie;
5. botsingsexcitatie.



Deze treden op zowel bij bb overgangen als bij bf en ff overgangen, en meer in het algemeen bij elk systeem waarin uitwisseling mogelijk is tussen inwendige energie en straling, dus waarin *energietoestanden* definieerbaar zijn, hetzij discreet dan wel continu in energie verdeeld.

In dit hoofdstuk bekijken we deze vijf processen voor de bb overgangen tussen *discrete niveau's*. Diverse soorten discrete energietoestanden zijn:

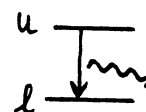
- niveau's in de electronenconfiguraties van atomen en ionen;
- niveau's in de gedeelde electronenconfiguraties van moleculen;
- niveau's in de rotatie van atomen in moleculen rond elkaar;
- niveau's in de vibratie van atomen in moleculen ten opzichte van elkaar;
- niveau's in de vibratietoestanden van een kristalrooster;
- niveau's in de hadronenconfiguraties van atoomkernen.

De aard van de configuraties en de selectieregels (die volgen uit het uitsluitprincipe van Pauli voor fermionen) worden hier niet behandeld. Zie daarvoor bijvoorbeeld Hoofdstukken 9 en 11 van Rybicki en Lightman.

5.2 De vijf processen

5.2.1 Spontane deëxcitatie

Een deeltje in een aangeslagen toestand u (= *upper*) valt spontaan terug naar een lagere energietoestand l (= *lower*), onder uitzending van een foton. De kans dat dat gebeurt wordt gedefinieerd als de *Einsteincoëfficiënt* A_{ul} :



$$A_{ul} \equiv \text{overgangswaarschijnlijkheid voor spontane deëxcitatie per seconde per deeltje in toestand } u. \quad (5.1)$$

Deze overgangswaarschijnlijkheid is een atomaire (of moleculaire *etc.*) parameter welke niet afhangt van externe toestandsgrootheden als druk, temperatuur of stralingsveld. Hij verschilt van overgang tot overgang. Er is verschil tussen *toegestane overgangen*, met typische waarden $A_{ul} \approx 10^4 - 10^8 \text{ s}^{-1}$, en *verboden overgangen* met $A_{ul} \approx 1 - 10^2 \text{ s}^{-1}$. De verschillen hangen samen met de selectieregels die de deeltjesconfiguratie bepalen. De waarden zijn in principe quantummechanisch te berekenen, maar in de praktijk moeten ze voor niet-waterstofachtige overgangen experimenteel worden bepaald.

Het aantal deëxcitatie per seconde per cm^3 wordt gegeven door:

$$R_{ul} = n_u A_{ul},$$

met n_u de dichtheid van de deeltjes in toestand u (de *populatie*). R_{ul} is de *processnelheid* of *rate* voor spontane deëxcitatie.

De vermindering van de populatie ten gevolge van spontane deëxcitatie is:

$$dn_u = -n_u A_{ul} dt$$

dus de populatie vervalt volgens:

$$n_u(t) = n_u(0)e^{-A_{ul}t}.$$

Als er deëxcitatie mogelijk zijn naar meerdere lagere niveau's tellen de overgangswaarschijnelijkheden op:

$$\Gamma_u \equiv \sum_l A_{ul};$$

de gemiddelde verblijfsduur van een deeltje in toestand u is dan Γ_u^{-1} seconden. Heisenberg's onzekerheidsrelatie levert:

$$\Delta E = \hbar/\Delta t \approx \hbar\Gamma_u$$

zodat de met de verblijfsduur samenhangende spreiding in de energie van een niveau gegeven wordt door $\Delta\omega \approx \Gamma_u$. Dit is de *natuurlijke lijnbreedte* of *stralingsdamping*, met Γ_u de *dempingsconstante*. De bijbehorende frequentieverdelingsfunctie $\psi(\nu - \nu_0)$ rond de lijnfrequentie ν_0 wordt gegeven door het *Lorentzprofiel*:

$$\psi(\nu - \nu_0) = \frac{\Gamma_u/4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_u/4\pi)^2}. \quad (5.2)$$

Dit is de profiel functie voor spontane emissie. Hij is oppervlakte-genormeerd volgens $\int_0^\infty \psi(\nu - \nu_0) d\nu = 1$. Vergeleken met de exponentiële afval van een Gausskromme vallen de vleugels veel langzamer af, slechts kwadratisch volgens $\psi \sim 1/(\nu - \nu_0)^2$.

Dit Lorentzprofiel beschrijft de levensduurbeperving van de aangeslagen toestand door spontane deëxcitatie. In het algemeen is er ook *botsingsdamping* ten gevolge van storingen door nabije deeltjes die ook meetellen in de dempingsconstante Γ_u . Daarnaast is er macroscopische verbreding van het emissieprofiel doordat de deeltjes door elkaar bewegen en dus fotonen ten opzichte van de waarnemer Dopplerverschoven emitteren. Een Maxwellverdeling levert zo een Gaussfunctie; de resulterende profiel functie is de convolutie van Gaussprofiel en Lorentzprofiel en heet *Voigtfunctie*.

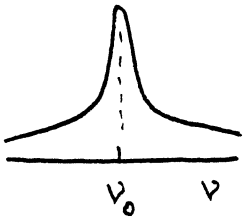
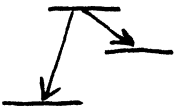
Vraag 5.1 Laat zien dat de gemiddelde verblijfsduur in niveau u wordt gegeven door Γ_u^{-1} seconden.

Vraag 5.2 Laat zien dat $\psi(\nu - \nu_0)$ genormeerd is. Wat is de dimensie van $\psi(\nu - \nu_0)$?

Vraag 5.3 Hoe groot is de halfwaardebreedte van $\psi(\nu - \nu_0)$? En van $\psi(\lambda - \lambda_0)$?

5.2.2 Stralingsexcitatie

Een foton $h\nu$ uit het ter plekke aanwezige stralingsveld kan worden gebruikt voor excitatie $l \rightarrow u$. De kans op zo'n proces bestaat uit een product, van een overgangswaarschijnlijkheid



die weer alleen van de aard van de overgang afhangt en de kans op aanwezigheid van een geschikt foton. Omdat zo'n foton uit elke richting mag komen beschrijven we de tweede kans met de hoekgemiddelde intensiteit J_ν . Ten gevolge van de onscherpte van de niveau's is er ook enige spreiding in de benodigde energie. Daarom voeren we een *extinctieprofielfunctie* $\varphi(\nu - \nu_0)$ in, weer genormeerd volgens $\int_0^\infty \varphi(\nu - \nu_0) d\nu = 1$ en met dimensie $[\text{Hz}^{-1}]$. Het hoekgemiddelde stralingsveld dat voor excitatie kan zorgen wordt daarmee gewogen volgens:

$$\bar{J}_{\nu_0} \equiv \frac{\int_0^\infty J_\nu \varphi(\nu - \nu_0) d\nu}{\int_0^\infty \varphi(\nu - \nu_0) d\nu} = \int_0^\infty J_\nu \varphi(\nu - \nu_0) d\nu, \quad (5.3)$$

dus \bar{J}_{ν_0} is de frequentiegemiddelde hoekgemiddelde intensiteit. De dimensie van \bar{J}_{ν_0} is $[\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{ster}^{-1}]$, net zoals voor J_ν en I_ν . (De index ν_0 impliceert dat gewogen wordt met de profielfunctie van de bb extinctiecoëfficiënt met centrale frequentie ν_0 ; deze index specificceert dus over welke spectraallijn het gaat.)

De eerste kans definiëren we middels de *Einsteincoëfficiënt voor extinctie* B_{lu} zo dat:

$$B_{lu} \bar{J}_{\nu_0} \equiv \text{aantal stralingsexcitaties per seconde per deeltje in toestand } l. \quad (5.4)$$

De *excitatie rate (snelheid)* wordt gegeven door $R_{lu} = n_l B_{lu} \bar{J}_{\nu_0}$ excitaties per seconde per cm^3 .

Deze definitie zegt dat als er vanuit allerlei richtingen straling op een deeltje valt met gemiddelde intensiteit \bar{J}_{ν_0} , de kans op stralingsexcitatie gegeven wordt door het product $B_{lu} \bar{J}_{\nu_0}$. Net als A_{ul} is B_{lu} dus gedefinieerd voor de volle 4π steradianen. De definities kunnen ook gegeven worden voor een gegeven bundel met openingshoek $d\Omega$ en frequentiegemiddelde intensiteit \bar{I}_{ν_0} ; dan is $B_{lu} \bar{I}_{\nu_0} (d\Omega/4\pi)$ het aantal excitaties per deeltje met fotonen uit deze bundel. In dat geval heeft B_{lu} dezelfde numerieke waarde.

Soms worden A en B een factor 4π kleiner gedefinieerd, met het aantal excitaties per seconde per deeltje gegeven door $B_{lu} \int \bar{I}_{\nu_0} d\Omega$, bijvoorbeeld in Chandrasekhar (1939), pagina 191. Ook worden de Einsteincoëfficiënten vaak gedefinieerd op basis van de energiedichtheid in plaats van de intensiteit. Dan schelen ze een factor $c/4\pi$.

Vraag 5.4 Waarom geldt \bar{J}_{ν_0} per Hz terwijl deze grootte over de frequentie is geïntegreerd?

Vraag 5.5 Wat is de dimensie van B_{lu} ?

5.2.3 Geïnduceerde deëxcitatie

Om de stralingsformule van Planck af te leiden introduceerde Einstein een derde straling-sproces en een derde coëfficiënt:

$$B_{ul} \bar{J}_{\nu_0} \equiv \text{aantal geïnduceerde deëxcitaties per seconde per deeltje in toestand } u \quad (5.5)$$

Deze definitie is analoog aan die van B_{lu} , maar met

$$\bar{J}_{\nu_0} \equiv \int_0^\infty J_\nu \chi(\nu - \nu_0) d\nu$$

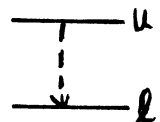
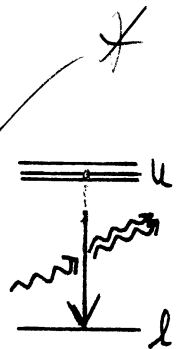
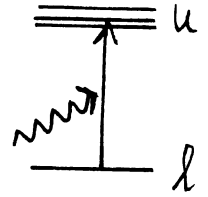
waarin $\chi(\nu - \nu_0)$ de genormeerde profielfunctie is voor geïnduceerde emissie.

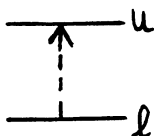
De geïnduceerde emissie levert straling in dezelfde richting als de triggerende straling. Een definitie per opvallende bundel is dus ook hier mogelijk: dan is $B_{ul} \bar{I}_{\nu_0} (d\Omega/4\pi)$ het aantal door een bundel met openingshoek $d\Omega$ geïnduceerde deëxcitaties, bijdragend aan dezelfde bundel.

5.2.4 Botsingsexcitatie en botsingsdeëxcitatie

Voor de bb *botsingsprocessen* worden overeenkomstige overgangswaarschijnlijkheden gedefinieerd met:

$$C_{ul} \equiv \text{aantal botsingsdeëxcitaties per seconde per deeltje in toestand } u \quad (5.6)$$





en

$$C_{lu} \equiv \text{aantal botsingsexcitaties per seconde per deeltje in toestand } l. \quad (5.7)$$

De *botsingsrates* zijn: $n_u C_{ul}$ en $n_l C_{lu}$ per seconde per cm^3 .

Deze coëfficiënten hangen af van de dichtheid en de deeltjessnelheden, en van de aard van de interactie.

Bijvoorbeeld geldt voor overgangen van toestand i naar toestand j door botsingen met elektronen:

$$n_i C_{ij} = n_i N_e \int_{v_0}^{\infty} \sigma_{ij}(v) f(v) v dv$$

met v_0 de drempelsnelheid welke de minimaal benodigde kinetische energie $(1/2)mv_0^2 = h\nu_0$ levert, N_e de electronendichtheid per cm^3 , σ de botsingsdoorsnede en $f(v)$ de snelheidsverdeling (veelal de Maxwellverdeling).

Hierbij gaat het doorgaans om Coulomb-interactie. Voor een geïoniseerd gas waarin de Maxwellverdeling geldt is de fractie deeltjes boven de drempelenergie voor elk soort deeltje gelijk, maar de deeltjessnelheden en daarmee de botsingsfrequenties zijn dat niet. Uit $\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$ volgt:

$$\frac{\text{aantal elektronenbotsingen}}{\text{aantal ionenbotsingen}} \sim \frac{N_e \langle v_e \rangle}{N_{\text{ion}} \langle v_{\text{ion}} \rangle} = \frac{N_e}{N_{\text{ion}}} \left(\frac{m_{\text{H}} A}{m_e} \right)^{1/2}$$

met A het atoomgewicht op de C=12 schaal en N_{ion} de ionendichtheid per cm^3 . Voor waterstof is deze verhouding al $\sqrt{m_p/m_e} = 43$, en bij meervoudige ionisatie van zwaardere atomen winnen de elektronen helemaal omdat dan $N_e > N_{\text{ion}}$.

In een gedeeltelijk *neutraal* gas kan het zijn dat waterstof grotendeels neutraal is en dat vrije elektronen slechts geleverd worden door elementen met lagere ionisatie-energie zoals Fe, Mg en de alkali's (zie Appendix A). Dan overwegen vaak de botsingen met neutrale waterstofatomen, wegens de grote abundantie van waterstof en de grote polariseerbaarheid van het waterstofatoom (asymmetrische ladingsverdeling).

De botsingsdoorsnedes σ zijn doorgaans maar slecht bekend voor elektronenbotsingen, en voor botsingen met neutrale atomen helemaal niet.

5.3 Einsteinrelaties

Vervolgens drukken we de hierboven gedefinieerde Einsteincoëfficiënten A_{ul} , B_{lu} en B_{ul} in elkander uit, onder de veronderstelling van thermodynamisch evenwicht. In TE is er voor elk proces *gedetailleerd* evenwicht, dus gaan er evenveel omhoog als omlaag, en dat geldt ook per detailproces (evenveel *stralend* omhoog als *stralend* omlaag):

$$\begin{aligned} n_l B_{lu} \bar{J}_{\nu_0} &= n_u A_{ul} + n_u B_{ul} \bar{J}_{\nu_0} \\ \bar{J}_{\nu_0} &= \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} \\ &= \frac{A_{ul}/B_{ul}}{\frac{n_l B_{lu}}{n_u B_{ul}} - 1} \\ &= \frac{A_{ul}/B_{ul}}{\frac{g_l B_{lu}}{g_u B_{ul}} e^{h\nu/kT} - 1}, \end{aligned}$$

waarin gebruik is gemaakt van de bezettingswet van Boltzmann die in TE geldt. Verder geldt in TE dat $J_\nu = B_\nu$. Omdat B_ν slechts langzaam met de frequentie varieert over de smalle breedte van het extinctieprofiel $\varphi(\nu - \nu_0)$ geldt doorgaans ook $\bar{J}_{\nu_0} = B_{\nu_0}$, en daarmee:

$$B_{\nu_0} = \frac{A_{ul}/B_{ul}}{\frac{g_l B_{lu}}{g_u B_{ul}} e^{h\nu_0/kT} - 1}.$$

Deze formule geldt voor willekeurige temperatuur, net zoals de formule van Planck. Gelijking daaraan levert:

$$\frac{B_{lu}}{B_{ul}} = \frac{g_u}{g_l} \quad \text{en} \quad \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}. \quad (5.8)$$

Dit zijn de *Einsteinrelaties*. Het zijn twee vergelijkingen met drie onbekenden, dus je hoeft er maar één te weten.

Nu komt de truc, een typisch Einsteinese redenering. Deze relaties verbinden A_{ul} , B_{ul} en B_{lu} zonder dat de temperatuur er toe doet. Bovendien zijn deze coëfficiënten als atoomparameters gedefinieerd die niet van uitwendige omstandigheden afhangen. Als relaties ertussen ergens gelden, gelden ze meteen overal. Dus gelden de Einsteinrelaties *algemeen*, ook in media waar de aanname van TE niet opgaat of als $\bar{J}_{\nu_0} \neq B_{\nu}$. Het zijn "detailed balance" relaties die ervoor zorgen dat in de juiste omstandigheden evenwicht überhaupt *kan* optreden. Ze vormen een veralgemening van de wet van Kirchhoff ($j_{\nu} = \alpha_{\nu} B_{\nu}$ in TE).

Voor de botsingsrates volgt op soortgelijke wijze voor TE:

$$n_l C_{lu} = n_u C_{ul}$$

dus

$$\frac{C_{ul}}{C_{lu}} = \frac{g_l}{g_u} e^{E_{lu}/kT}, \quad (5.9)$$

weer met toepassing van Boltzmann. Ook deze betrekking geldt algemeen, ook buiten TE. Kennis van één botsingsovergangswaarschijnlijkheid is dus genoeg.

Vraag 5.6 Kloppen de dimensies links en rechts in vergelijking (5.8)?

5.4 Emissiecoëfficiënt en extinctiecoëfficiënt

Spontane deëxcitatie levert fotonen in allerlei richtingen. We schrijven de opbrengst om naar uitgestraalde energie per Hz en per steradiaal:

A_{ul} = aantal spontane deëxcitaties per seconde per deeltje in toestand u ,

$n_u A_{ul} = R_{ul}$ = aantal deëxcitaties per seconde per cm^3 ,

$h\nu_0 n_u A_{ul}$ = energie uitgestraald per seconde per cm^3 ,

$h\nu_0 n_u A_{ul} \psi(\nu - \nu_0)$ = energie uitgestraald per seconde per cm^3 per Hz,

$h\nu_0 n_u A_{ul} \psi(\nu - \nu_0)/4\pi$ = energie uitgestraald per seconde per cm^3 per Hz per steradiaal.

Dus is de bijbehorende emissiecoëfficiënt:

$$j_{\nu}^{\text{spont}} = h\nu_0 n_u A_{ul} \psi(\nu - \nu_0)/4\pi. \quad (5.10)$$

Nu de stralingsexcitatie. De totale energie die in een volume dV gedurende dt wordt geëxtingeerd door stralingsexcitatie is:

$$\begin{aligned} dE^{\text{tot}} &= h\nu_0 n_l B_{lu} \bar{J}_{\nu_0} dV dt \\ &= h\nu_0 n_l B_{lu} dV dt \int J_{\nu} \varphi(\nu - \nu_0) d\nu \\ &= \frac{h\nu_0}{4\pi} n_l B_{lu} dV dt \iint I_{\nu} \varphi(\nu - \nu_0) d\Omega d\nu, \end{aligned}$$

dus de energie dE^{bundel} die uit een gegeven bundel met intensiteit I_{ν} , spreidingshoek $d\Omega$ en bandbreedte $d\nu$ wordt geëxtingeerd gedurende dt in dV is:

$$dE^{\text{bundel}} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_l B_{lu} I_{\nu} \varphi(\nu - \nu_0) dV dt d\Omega d\nu,$$

en met $dV = dO ds$ en de definities van intensiteit en extinctiecoëfficiënt volgt:

$$\alpha_{\nu}^{\text{excitatie}} = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0).$$

Nu de geïnduceerde emissie. Het ligt voor de hand om hiervoor een extra emissiecoëfficiënt in te voeren en deze dan op te tellen bij de coëfficiënt voor spontane emissie. Geïnduceerde deëxcitatie lijkt echter veel meer op stralingsexcitatie dan op spontane deëxcitatie; evenals de laatste is hij evenredig met \bar{J}_{ν_0} . In feite treden deze processen altijd samen op. Daarom wordt de geïnduceerde emissie meestal niet bij de emissiecoëfficiënt opgeteld maar als "negatieve extinctie" behandeld, *i.e.* als een correctie op de extinctie. Daarmee wordt de *lijnextinctiecoëfficiënt* α_ν^l :

$$\alpha_\nu^l = \frac{h\nu_0}{4\pi} [n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0) - n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)] \quad (5.11)$$

en de *lijnemissiecoëfficiënt* j_ν^l blijft:

$$j_\nu^l = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_u A_{ul} \psi(\nu - \nu_0).$$

De excitatiecoëfficiënt $\alpha_\nu^{\text{excitatie}}$ is een fundamenteelere grootheid dan de deëxcitatiecoëfficiënt j_ν^{spont} omdat de laatste sterker afhangt van het lokale stralingsveld. Dit komt omdat j_ν met de term n_u de recente voorgeschiedenis van het geëxciteerde deeltje bevat. Een atoom of molecuul kan bijvoorbeeld voorafgaand aan de spontane deëxcitatie geëxciteerd zijn naar niveau u door stralingsexcitatie in dezelfde spectraallijn (*fotonverstrooiing*), door stralingsexcitatie in een andere spectraallijn of door stralingsdeëxcitatie vanuit een hoger niveau (*fotonconversie*), of door een botsingsexcitatie of botsingsdeëxcitatie (*fotoncreatie*). Elk van deze mechanismen telt mee, en dus hangt de emissiecoëfficiënt direct af van het medium én van het stralingsveld. Het geëxciteerd zijn is een vorm van inwendige energie die bij veel verstrooiing en conversie vooral bepaald kan zijn door *niet-lokale* omstandigheden waarvan de kennis door het stralingsveld is getransporteerd.

Bij de excitatiecoëfficiënt $\alpha_\nu^{\text{excitatie}}$ daarentegen is het exciterende stralingsveld zelf niet in de coëfficiënt begrepen, ook niet in de vorm van zojuist opgeslagen inwendige energie. Deze coëfficiënt is dus alleen gevoelig voor het medium. Wel kan de toestand daarvan, en dus de populatie van het onderniveau, sterk afhankelijk zijn van een eventueel aanwezig stralingsveld, maar de koppeling is veel minder direct dan voor een zojuist aangeslagen niveau.

De introductie van een correctieterm voor de geïnduceerde emissie in de lijnextinctiecoëfficiënt verwatert deze scheiding. De lijnextinctiecoëfficiënt α_ν^l is daarmee:

$$\alpha_\nu^l = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0) \left[1 - \frac{n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)}{n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0)} \right]$$

dus de correctiefactor is:

$$1 - \frac{n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)}{n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0)} = 1 - \frac{n_u g_l \chi(\nu - \nu_0)}{n_l g_u \varphi(\nu - \nu_0)}.$$

De correctie is groot (grote vermindering) als het aangeslagen niveau een relatief grote populatie heeft. In dat geval is ook de extinctiecoëfficiënt direct gevoelig voor het stralingsveld.

Einstein voerde het geïnduceerde emissieproces in omdat hij anders alleen de Wien benadering kon afleiden, niet de Planckfunctie zelf. De Wien benadering kon wel worden afgeleid omdat daarvoor $h\nu \gg kT$ zodat volgens de Boltzmannverdeling de populatie n_u van het aangeslagen niveau klein is en de bijdrage door geïnduceerde deëxcitatie verwaarloosbaar.

We hebben nu met α_ν^l , B_{lu} , B_{ul} en A_{ul} vier parameters die aangeven hoe makkelijk een bb overgang lukt: de bb overgangswaarschijnlijkheid. Je hoeft er maar één te kennen (te berekenen of te meten). Meestal gebruikt men echter geen van deze vier maar een *vijfde* parameter: de *oscillatorsterkte* f . De term volgt uit de klassieke beschrijving van een spectraallijn als een harmonische oscillator, volgens welke de extinctiecoëfficiënt per deeltje $\sigma(\nu)$ wordt gegeven door (Hoofdstuk 6):

$$\sigma(\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{\Gamma/4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma/4\pi)^2} = \frac{\pi e^2}{m_e c} \varphi(\nu - \nu_0)$$

met

$$\sigma \equiv \int_0^\infty \sigma(\nu) d\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} = 0.02654 \text{ cm}^2 \text{ Hz}.$$

De oscillatorsterkte f_{lu} wordt ingevoerd als correctiefactor op deze klassieke waarde, met verwaarlozing van de correctie voor geïnduceerde emissie:

$$\sigma^l = \int_0^\infty \frac{\alpha_\nu^l}{n_l} d\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} B_{lu} \equiv \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu}.$$

Voor resonantielijnen, bijvoorbeeld Ly α , is de klassieke oscillator een goede benadering zodat $f_{lu} \approx 1$, dus heeft de oscillatorsterkte een plezierige getalgrootte. Andere toegestane overgangen hebben $10^{-4} \leq f_{lu} \leq 10^{-1}$; verboden overgangen hebben $f_{lu} \leq 10^{-6}$.

De correctie voor geïnduceerde emissie bedraagt in TE, met gebruik van de Einsteinrelaties, de wet van Boltzmann en de gelijkheid $\varphi = \chi$ die voor TE geldt:

$$1 - \frac{n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)}{n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0)} = 1 - e^{-h\nu_0/kT}.$$

Deze factor wordt vaak als "de" correctie voor geïnduceerde emissie gegeven maar geldt strikt genomen alleen in TE. Hiermee wordt de lijnextinctiecoëfficiënt tenslotte:

$$\alpha_\nu^l = \frac{\pi e^2}{m_e c} n_l f_{lu} \varphi(\nu - \nu_0) [1 - e^{-h\nu_0/kT}].$$

Tenslotte nog een zesde grootte: het product $g_l f_{lu}$ dat doorgaans met "gf-value" wordt aangeduid. Dit is de grootte die men in de literatuur het vaakst aantreft als "overgangswaarschijnlijkheid".

Vraag 5.7 Wat zijn de dimensies van α_ν^l , j_ν^l , f_{lu} en $g_l f_{lu}$?

Vraag 5.8 Druk de foto-excitatiesnelheid R_{lu} uit in $\alpha_\nu^{\text{excitatie}}$ en I_ν .

5.5 Bronfunctie

De lijnbronfunctie S_ν^l wordt tenslotte gegeven door:

$$S_\nu^l \equiv j_\nu^l / \alpha_\nu^l = \frac{n_u A_{ul} \psi(\nu - \nu_0)}{n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0) - n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)}.$$

Omdat de Einsteinrelaties ook buiten TE gelden volgt heel algemeen voor de lijnbronfunctie, en in feite voor de bronfunctie van een willekeurige stralingsovergang:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{\frac{A_{ul} \psi}{B_{ul} \varphi}}{\frac{n_l B_{lu}}{n_u B_{ul}} - \frac{\chi}{\varphi}} \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\psi/\varphi}{\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - \frac{\chi}{\varphi}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Vaak wordt de aanname van *complete redistributie* gemaakt. Deze houdt in dat atomen in het geval van elastische bv verstrooiing geen "geheugen" hebben: dat bij de deëxcitatie er geen correlatie is met het foton dat de excitatie verzorgde. Dan zijn de drie frequentieverdelingen gelijk omdat bij elk proces opnieuw uit de kansverdeling wordt getrokken: $\phi(\nu - \nu_0) = \psi(\nu - \nu_0) = \chi(\nu - \nu_0)$. In dat geval vereenvoudigt de algemene lijnbronfunctie tot:

$$S_\nu^l = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - 1}. \quad (5.13)$$

In TE geldt de gelijkheid $\varphi = \chi = \psi$ zeker omdat dan gedetailleerd evenwicht ook op elke aparte frequentie moet gelden. Dat levert met de wet van Boltzmann die in TE ook geldt:

$$S_\nu^l = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = B_\nu.$$

Zo vinden we de TE wetten van Kirchhoff terug.

Tenslotte bedraagt de verhouding tussen de aantallen spontane en geïnduceerde deëxcitatie in TE:

$$\frac{n_u A_{ul}}{n_u B_{ul} \bar{J}_{\nu_0}} = \frac{2h\nu^3}{c^2 \bar{J}_{\nu_0}} = e^{h\nu/kT} - 1,$$

dus waar $h\nu/kT \gg 1$ (Wien benadering) treedt vooral spontane deëxcitatie op, en waar $h\nu/kT \ll 1$ (Rayleigh-Jeans benadering) treedt vooral geïnduceerde deëxcitatie op — mits de populaties en het stralingsveld van de orde zijn van wat ze in TE zouden zijn.

Hoofdstuk 6

Continue processen

6.1 Inleiding: soorten processen

In dit hoofdstuk behandelen we de processen die aanleiding geven tot *continue* extinctie en emissie. Voor hoog-energetische condities zijn hierbij de relativistische varianten van belang; omdat volledige behandeling daarvan kennis van Maxwell- en relativiteitstheorie vereist volgt hier slechts een vereenvoudigde samenvatting van Hoofdstukken 3–8 uit Rybicki en Lightman. Zie ook Hoofdstuk 6 van Harwitt (1988).

Globaal zijn er vier soorten continue stralingsprocessen van belang:

- extinctie en emissie ten gevolge van de versnelling van een geladen deeltje in een elektrisch veld (waaronder het elektrisch veld van een EM-golf zelf);
- extinctie en emissie ten gevolge van de versnelling van een geladen deeltje in een magnetisch veld;
- effecten ten gevolge van collectieve elektrische velden;
- extinctie en emissie ten gevolge van kernreacties.

6.2 Straling van een versnelde lading

Uit Maxwell theorie volgt dat een deeltje met elektrische lading dat een versnelling ondergaat EM straling emitteert. Als de versnelling wordt veroorzaakt door opvallende electromagnetische straling kan een geladen deeltje ook absorberen of verstrooien. Voor *niet-relativistische* snelheden $v \ll c$ volgt uit de Maxwellvergelijkingen dat in vacuum op afstand r van een lading q die een versnelling $\vec{v} = d\vec{v}/dt$ ondergaat het daardoor opgewekte EM-veld wordt gegeven door

$$\vec{E}_{\text{rad}}(r, t) = \left[\frac{q}{rc^2} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v}) \right] \quad (6.1)$$

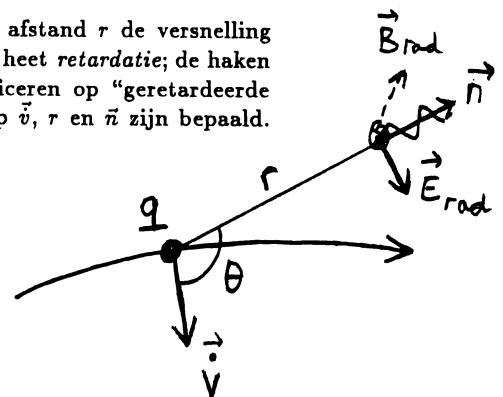
$$\vec{B}_{\text{rad}}(r, t) = \left[\vec{n} \times \vec{E}_{\text{rad}} \right], \quad (6.2)$$

met c de lichtsnelheid en \vec{n} een eenheidsvector in de stralingsrichting. \vec{E}_{rad} ligt in het vlak van \vec{v} en \vec{n} ; \vec{B}_{rad} staat daar loodrecht op.

De vierkante haken om de de rechterleden slaan op het feit dat op afstand r de versnelling van de lading q pas na r/c seconden wordt bemerkt. Deze vertraging heet *retardatie*; de haken geven aan dat de rechterleden de waarden van \vec{E}_{rad} en \vec{B}_{rad} specificeren op “geretardeerde tijdstippen”: het tijdstip t valt r/c seconden na het moment waarop \vec{v} , r en \vec{n} zijn bepaald. Zie §§ 2.5 en 3.1–3.2 van Rybicki en Lightman.

Voor de amplitudes geldt:

$$|\vec{E}_{\text{rad}}| = |\vec{B}_{\text{rad}}| = \frac{q\dot{v}}{rc^2} \sin \theta$$



met θ de hoek tussen \vec{v} en \vec{n} . De energiestroom in de richting \vec{n} in $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ (eventueel voor monochromatische meting per Hz) wordt gegeven door de *Poynting vector*

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{rad}} \times \vec{B}_{\text{rad}}$$

met amplitude:

$$S = \frac{c}{4\pi} E_{\text{rad}}^2 = \frac{c}{4\pi} \frac{q^2 \dot{v}^2}{r^2 c^4} \sin^2 \theta. \quad (6.3)$$

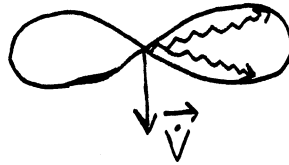
Door een oppervlakje dO gaat gedurende dt een energiestroom:

$$dE = |\vec{S}| dt dO = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \frac{dt dO}{r^2}.$$

Met $d\Omega = dO/r^2$ is het hoekafhankelijk vermogen dat het deeltje in de richting \vec{n} uitstraalt (r/c seconden eerder):

$$\frac{dP}{d\Omega} \equiv \frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta. \quad (6.4)$$

De factor $\sin^2 \theta$ levert een *dipoolpatroon*: er wordt geen straling uitgezonden evenwijdig aan \vec{v} , maximaal loodrecht op \vec{v} .



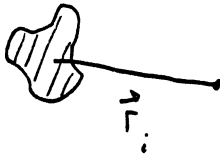
Figuur 6.1: Dipoolstraling van een versnelde lading.

Integratie van $dP/d\Omega$ over alle richtingen levert de *formule van Larmor* voor het totale uitgestraalde vermogen:

$$P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{2q^2 \dot{v}^2}{3c^3} \quad (6.5)$$

met gebruik van $\int \sin^2 \theta d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 2\pi \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2) d\mu = 8\pi/3$ met $\mu = \cos \theta$.

Deze vergelijkingen gelden vaak (in de *dipoolbenadering*) voor systemen van meerdere niet-relativistische deeltjes:



$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\dot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \\ P &= \frac{2\dot{d}^2}{3c^3}, \end{aligned}$$

met het *dipoolmoment* $\vec{d} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i$ en θ de hoek tussen \vec{d} en de stralingsrichting \vec{n} .

6.3 Electron + \vec{E} -veld

6.3.1 Vrij-vrij overgangen

We bespreken eerst de stralingsprocessen die optreden bij de Coulombversnelling van een vrij geladen deeltje dat zich beweegt in het elektrisch veld van een ander deeltje: *remstraling* = *Bremsstrahlung* (in het Engels!). Alleen botsingen tussen ongelijksoortige deeltjes zijn hierbij interessant want bij gelijksoortige botsingen (proton-proton, electron-electron etc.) is $\vec{d} = \sum q_i \vec{r}_i \sim \sum m_i \vec{r}_i$. Dit is het zwaartepunt en een behouden grootheid, dus is $P = 0$ volgens de laatste vergelijking in de vorige paragraaf voor dipoolstraling. (Hogere-orde straling

Deze vergelijkingen zijn klassiek, niet QM: overal rondom versnelde lading is EM veld, toch wordt er maar 1 foton uitgelonden (of geabsorbeerd). In QM beschrijving is de kans op een tweede foton verwaarloosbaar klein }

zoals quadrupoolstraling laten we buiten beschouwing.) Dus gaat het hierbij doorgaans om electron-ion botsingen, i.e. om ff processen.

We nemen een klassieke (niet-quantummechanische) benadering. Neem het ion in de oorsprong zodat $\vec{d} = -e\vec{r}$ met $-e$ de electronlading en beschouw het wegens zijn veel grotere massa als stationair. De wet van Larmor geeft dan

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2$$

waarin \dot{v} de Coulombversnelling is tussen electron en ion. Dit is het instantaan uitgestraalde vermogen; de totale ff emissie per electron-ion botsing schatten we af met

$$E(b, v) = \int P dt \approx \frac{2e^2}{3c^3} (\Delta v)^2 \approx \frac{2e^2}{3c^3} (\Delta v_{\perp})^2,$$

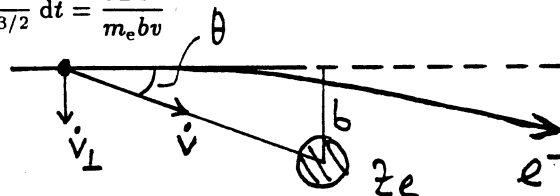
aannemend dat de afbuiging van het electron verwaarloosbaar klein is zodat alleen de component van de Coulombversnelling loodrecht op de invalrichting telt; deze bedraagt $\dot{v}_{\perp} = \dot{v} \cos(\pi/2 - \theta) = \dot{v} b/r$ met θ de hoek tussen invalrichting en Coulombversnelling en met de kortste naderingsafstand gegeven door de *impact parameter* b . Met de Coulombkracht $m\dot{v} = Ze^2/r^2$ voor een ionlading ter grootte Ze volgt middels Pythagoras

$$\Delta v_{\perp} = \int \dot{v}_{\perp} dt = \frac{Ze^2}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{r^3} dt = \frac{Ze^2}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{2Ze^2}{m_e b v}$$

zodat

$$E(b, v) \approx \frac{8Z^2 e^6}{3c^3 m_e^2 b^2 v^2}$$

per electron-ion botsing met parameters Z , b en v .



Energiebehoud vereist dat deze uitgestraalde energie ten koste gaat van de kinetische energie; het ion als stilstaand beschouwend levert dat $m_e v_1^2/2 = m_e v_2^2/2 + h\nu$ bij ff emissie en $m_e v_1^2/2 + h\nu = m_e v_2^2/2$ bij ff absorptie, met v_1 de snelheid van het electron vóór de botsing en v_2 de snelheid erna. De *versnelling* loodrecht op de baan levert derhalve *vertraging* langs de baan, vandaan de naam "remstraling"; de laatste vertraging is in de afleiding hierboven verwaarloosd. Bij ff absorptie is dit andersom: de energie van een ingevangen foton compenseert de Coulombversnelling en levert toename van kinetische energie.

Om de totale macroscopische energieoverdracht te krijgen moet $E(b, v)$ worden geïntegreerd over $2\pi b db$ rond het ion en vermenigvuldigd met de ionendichtheid N_{ion} , de flux $N_e v$ van electronen met snelheid v en de snelheidsverdeling $f(v) dv$. De integratiegrenzen b_{min} en b_{max} vereisen nadere analyse die we hier overslaan. Het uiteindelijk resultaat voor de emissiecoëfficiënt is:

$$j_{\nu}^{\text{ff}} = 5.4 \times 10^{-39} Z^2 N_e N_{\text{ion}} T^{-1/2} e^{-h\nu/kT} \bar{g}_{\text{ff}}$$

met N_e de electronendichtheid, $N_{\text{ion}} = \sum_{\text{element}} \sum_s n_{r,s}$ de ionendichtheid (van alle ionen met lading Z , bijvoorbeeld H^+ en He^+ samen) en \bar{g}_{ff} de snelheidsgemiddelde *Gaunt-factor*. Deze geeft de quantummechanische correctie op de klassiek afgeleide rest van de formule; hij is dimensieloos, van grootteorde 1 en wordt bepaald door de waarden van b_{min} en b_{max} . (De golf- en quantummechanica ontstonden omdat het feit verklaard moest worden dat de electronen in een atoom stabiele Bohrbanen beschrijven, in plaats van al stralend naar binnen te spiraleren zoals deze klassieke beschrijving voorspelt. De aanpak hierboven faalt derhalve voor kleine impact parameter b omdat quantumeffecten verwaarloosd zijn; de Gaunt-factor meet deze fout.)

De factor $T^{-1/2}$ komt in j_{ν}^{ff} omdat de emissie omgekeerd evenredig is met de snelheid v (v^{-2} per botsing maal v uit de electronenflux) en voor de gemiddelde snelheid geldt $\langle v \rangle \sim T^{1/2}$. De factor $\exp(-h\nu/kT)$ is een gevolg van de ondergrens in de integratie over de Maxwellverdeling: er moet voldoende kinetische energie voorhanden zijn om een foton van deze frequentie te maken.

In het geval van TE wordt de ff bronfunctie gegeven door de Planckfunctie $B_\nu(T)$. Ook buiten TE is dat zo mits de deeltjesbewegingen Maxwell-verdeeld zijn, omdat ff processen *altijd* kinetische energie en stralingsenergie uitwisselen. In elk ff emissieproces komt een foton vrij uit de "thermal pool"; er is geen ingebouwd geheugen zoals bij de bb processen waarin het vrijkomende foton gelijk kan zijn (behalve in richting) aan het eerder ingevangen foton. Bij zulke elastische verstrooiing is er géén uitwisseling tussen stralingsenergie en kinetische energie; bij inelastische verstrooiing, hetgeen het geval is voor de ff processen, wordt het geheugen per botsing gewist, met een nieuwe greep uit de Maxwellverdeling. Daarmee is de extinctiecoëfficiënt, ook buiten TE,

$$\alpha_\nu^{\text{ff}} = j_\nu^{\text{ff}}/B_\nu(T) = 3.7 \times 10^8 Z^2 N_e N_{\text{ion}} T^{-1/2} \nu^{-3} (1 - e^{-h\nu/kT}) \bar{g}_{\text{ff}}.$$

Hierin is T de kinetische temperatuur, *i.e.* de temperatuur in de Maxwellverdeling; meestal wordt hiervoor de *electronentemperatuur* T_e genomen. "Buiten TE" houdt hier in dat Saha en Boltzmann niet *a priori* gelden voor alle toestanden, en dat $I_\nu = B_\nu$ niet *a priori* geldt voor alle richtingen en frequenties. De conclusie dat $S_\nu^{\text{ff}} = B_\nu^{\text{ff}}$ impliceert dat de *deel*bronfunctie voor de vrij-vrij processen in omstandigheden waarin tenminste de Maxwellverdeling geldt *altijd* gelijk is aan de Planckfunctie ter plaatse, ook als dat voor andere processen niet het geval is. Als zulke andere processen bijdragen aan de deeltjespopulaties kunnen deze afwijken van de Saha en Boltzmannverdelingen.

De factor $1 - \exp(-h\nu/kT)$ volgt uit de -1 in de wet van Planck en beschrijft de bijdrage van geïnduceerde emissie. Deze was niet begrepen in de emissiecoëfficiënt hierboven en komt daarom weer tevoorschijn als vermindering van de extinctiecoëfficiënt. Als de Wien benadering geldt ($h\nu \gg kT$) is deze correctie verwaarloosbaar:

$$\alpha_\nu^{\text{ff}} \approx 3.7 \times 10^8 Z^2 N_e N_{\text{ion}} T^{-1/2} \nu^{-3} \bar{g}_{\text{ff}},$$

met frequentieafhankelijkheid $\alpha_\nu^{\text{ff}} \sim \nu^{-3}$. Fysisch gezien is de correctie voor grote $h\nu/kT$ verwaarloosbaar omdat het verschil tussen de lagere en de hogere energietoestand dan veel groter is dan met thermische energie overbrugd kan worden, dus de populatie van de hogere toestand is verwaarloosbaar en het vrij-vrij analogon van geïnduceerde deëxcitatie doet nauwelijks mee.

In het Rayleigh-Jeans gebied ($h\nu \ll kT$) volgt:

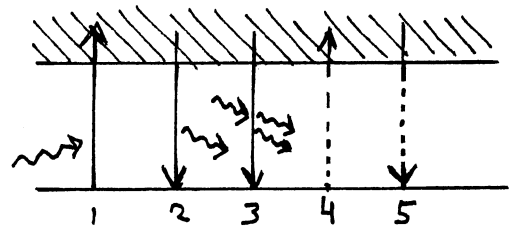
$$\alpha_\nu^{\text{ff}} \approx 0.018 Z^2 N_e N_{\text{ion}} \nu^{-2} T^{-3/2} \bar{g}_{\text{ff}},$$

dus daar is de frequentieafhankelijkheid $\alpha_\nu^{\text{ff}} \sim \nu^{-2}$.

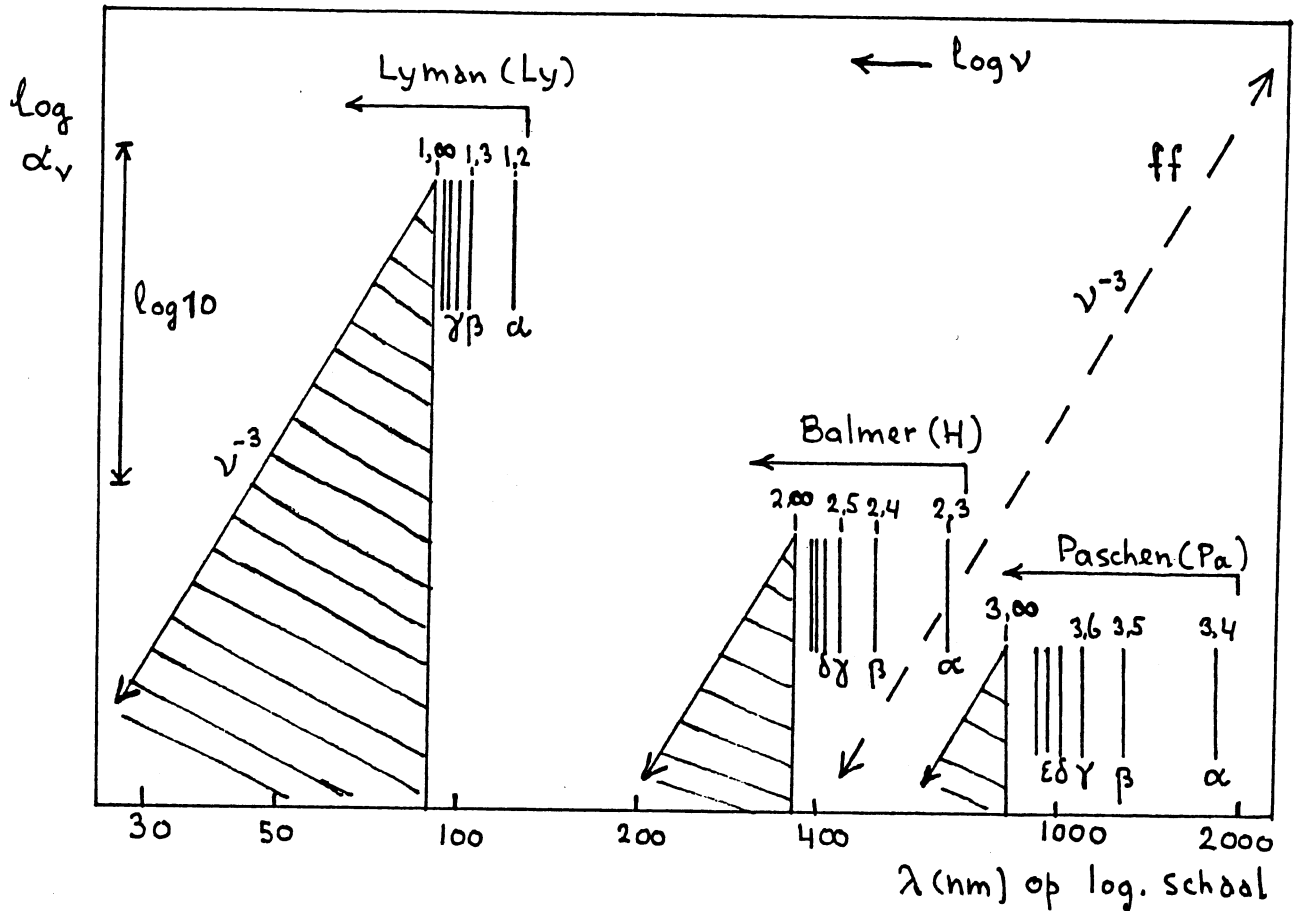
6.3.2 Gebonden-vrij overgangen

Er zijn weer vijf mogelijke bf processen:

1. *foto-ionisatie*.
Foton van de juiste frequentie nodig;
2. *spontane foto-recombinatie*.
Langskomend invangbaar electron nodig;
3. *geïnduceerde foto-recombinatie*.
Zowel een invangbaar electron als een foton van de juiste frequentie nodig;
4. *botsings-ionisatie*.
Langskomende botser met voldoende energie nodig;
5. *botsings-recombinatie*.
Langskomende botser en invangbaar electron nodig.



Het laatste proces is een 3-deeltjesbotsing en is daarom doorgaans zeldzaam. De processen 1 en 4 vereisen een energie (uit foton of botsing) $E > E_\infty - E_n$. De extinctiecoëfficiënt heeft dus per onderniveau i een grenswaarde in ν ; de extinctie en emissie zetten plotseling in op de *seriegrens* $\nu = \nu_0$ van de lijnenreeks met dat onderniveau (Fig. 6.2).



Figuur 6.2: De extinctiecoëfficiënt van neutraal waterstof. De HI ff extinctiecoëfficiënt (gearceerd) is aangegeven voor de Lyman, Balmer en Paschen seriegrenscontinua. De gestreepte lijn geeft de HI ff extinctiecoëfficiënt. Sommige lijnen uit de bb lijnreeksen zijn aangegeven, met hun naam en de hoofdquantumgetallen n van hun onder- en bovenniveau. Elke lijnreeks verdicht zich tot de seriegrens. Het ionisatiecontinuum voorbij die grens valt af $\sim \nu^{-3}$, evenals de HI ff coëfficiënt. Schets van C. Zwaan, voor $T \approx 25\,000$ K.

Voor *waterstofachtige* spectra (H I, He II, Li III, *etc.*) is de extinctiecoëfficiënt per deeltje voor stralingsionisatie (zonder correctie voor geïnduceerde recombinitie) uit een niveau met hoofdquantumgetal n voor $\nu \geq \nu_0$ bij benadering:

$$\sigma_{\text{bf}}^{\text{H}} = \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{\pi^4 m e^{10}}{c h^6} \frac{Z^4}{n^5} g_{\text{bf}} \nu^{-3} = 2.815 \times 10^{29} g_{\text{bf}} Z^4 n^{-5} \nu^{-3}$$

in cm^2 ; deze formule is afkomstig van Kramers, afgezien van de later door Gaunt toegevoegde quantummechanische correctiefactor g_{bf} . De extinctie valt weer af volgens $\sigma \sim \nu^{-3}$ voor $\nu > \nu_0$. Voor ingewikkelder spectra met meerdere valentie-electronen (bijvoorbeeld Fe I waarin een halfgevulde schil een veelvoud aan valentie-electronen en valentie-gaten levert) wordt deze gladde afval verstoord door resonanties die allerlei pieken leveren in $\sigma_{\text{bf}}(\nu)$ en experimenteel bepaald moeten worden.

Deze vijf processen zijn volkomen analoog aan de discrete bb processen. Er gelden *detailed balance* relaties afkomstig van Milne die overeenkomen met de Einsteinrelaties voor bb overgangen (zie Rybicki en Lightman pag. 284). In plaats van de profiel functies ψ *etc.* dient nu te worden geïntegreerd over het *seriegrenscontinuum* (*ionisatiekant*): het bf continuum boven de seriegrens $\nu = \nu_0$. De foto-ionisatie rate per seconde per cm^3 vanuit een gebonden niveau i naar het continuum k wordt bijvoorbeeld gegeven door:

$$R_{ik} = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{n_i \sigma_{ik}(\nu)}{h\nu} J_{\nu} d\nu$$

met ν_0 de seriegrensfrequentie (vergelijk met vraag 5.8).

Net als de bb processen en in tegenstelling tot de ff processen hebben de bf processen een ingebouwd "geheugen": namelijk het inwendige deel van de energiesprong, gegeven door $E_k - E_i$. Het kinetische gedeelte daarboven wordt voortdurend thermisch gewist, net zoals bij de ff processen; het vaste interne gedeelte levert echter een mogelijkheid tot gedeeltelijk elastische verstrooiing analoog aan de elastische verstrooiing bij bb procesparen. Ionisatie uit laagliggende niveau's, met een grote fractie inwendige energie, lijkt daarbij meer op bb overgangen terwijl ionisatie uit niveau's dicht bij het continuum meer lijkt op ff overgangen. De bronfunctie van bf overgangen wordt daarom niet eenvoudigweg gegeven door $S_{\nu}^{\text{bf}} = B_{\nu}$; hij kan afhangen van het stralingsveld J_{ν} in de ionisatiekant.

Vraag 6.1 Het onderschrift van Figuur 6.2 impliceert dat α_{ν}^{bf} van de temperatuur afhangt. Hoe? Hangen de verhoudingen van de waarden van α_{ν}^{bf} op de verschillende grensgolflengten ook van de temperatuur af? En van de dichtheid?

Vraag 6.2 Geldt de algemene uitdrukking voor S_{ν} in vergelijking (5.12) ook voor bf overgangen? Hoe komt daarin de eventuele afhankelijkheid van J_{ν} tot uiting? Wat is het bf analogon voor de profiel functies ψ , χ en φ ?

6.3.3 H^- extinctie

Een bijzondere bron van bf en ff extinctie wordt geleverd door het H^- ion. Een neutraal H atoom kan door zijn grote polariseerbaarheid een tweede electron binden. Er is maar één gebonden toestand bekend, met bindingsenergie $E_{\infty} - E_1 = 0.75 \text{ eV}$ en $\lambda_{\text{grens}} = 1650 \text{ nm}$. Er zijn dus géén lijnen, en er is maar één bf continuum dat geen scherpe ionisatiekant vertoont maar een brede piek bij veel hogere frequentie, met $\lambda_{\text{max}} = 850 \text{ nm}$ (Figuur 6.3).

Pas op met de terminologie:

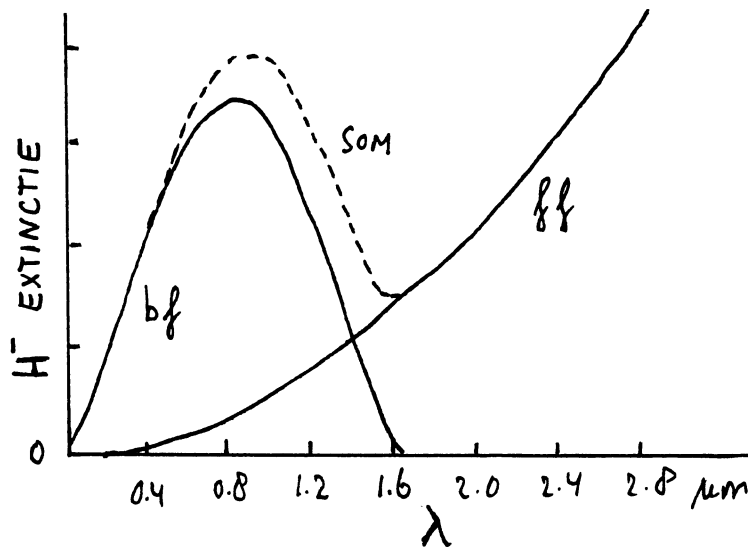
H_{ff} = proton + vrij electron;

H_{ff}^- = neutraal H atoom + vrij electron;

H_{bf} = ionisatie van H atoom tot proton, of recombinitie proton met electron tot H atoom;

H_{bf}^- = ionisatie van H^- ion tot H-atoom, of recombinitie H-atoom met electron tot H^- ion.

Deze H^- bf en ff processen vormen de voornaamste bron van visuele en infrarode extinctie in de fotosferen van koele sterren. Daarin is waterstof neutraal; de extra electronen komen van elementen zoals Na, Mg, Si en Fe die een relatief grote abundantie ($N/N_{\text{H}} \approx 10^{-6}$; zie



Figuur 6.3: Extinctiecoëfficiënt van het H^- ion. De bf extinctie vertoont een maximum bij 800 nm. De ff extinctie loopt op met λ^2 . De som vertoont een minimum bij 1.6 μm .

Appendix A) paren aan lagere ionisatie-energie dan waterstof. De identificatie van deze extinctiebron door Pannekoek en Wildt was een belangrijke doorbraak; voorheen vormde de aard van de continue extinctie in koele sterren een groot probleem (In Eddington's boek "The Internal Constitution of the Stars" uit 1926 figureerden de onbekende continue extinctie met de eveneens onbekende interne energiebron van sterren als de enige resterende problemen van de natuurkunde van sterren; deze twee zijn inmiddels opgelost maar niettemin is er nog wel werk aan de winkel.)

Vraag 6.3 De ff extinctiecoëfficiënt in Figuur 6.3 heeft $\alpha_{\lambda}^{\text{ff}} \sim \lambda^2$ terwijl ⁱⁿ Figuur 6.2 $\alpha_{\nu}^{\text{ff}} \sim \nu^{-3}$. Vanwaar dit verschil?

Vraag 6.4 Voor deze H^- extinctieprocessen is $S_{\nu} = B_{\nu}$ een goede aanname, niet alleen voor de ff maar ook voor de bf overgangen. Waarom?

Vraag 6.5 De bf piek in Figuur 6.3 gedraagt zich allesbehalve waterstofachtig terwijl het juist waterstof betreft. Hoe zit dat?

6.4 Electron + foton

6.4.1 Elastische verstrooiing

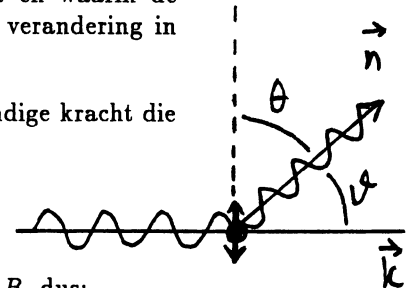
Een lading kan ook versneld worden door een passerende electromagnetische golf: dan treedt *verstrooiing* op omdat de tengevolge van deze versnelling uitgezonden straling een andere richting kan hebben dan de opvallende straling. We behandelen deze verstrooiing eerst voor niet-relativistische omstandigheden waarin de dipoolbenadering geldt en waarin de verstrooiing elastisch is, met gelijkblijvende frequentie en energie en alleen verandering in richting.

Een deeltje met lading q trilt mee met de langskomende EM-golf. De uitwendige kracht die het geladen deeltje ondervindt is:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}),$$

maar de Lorentzkracht $(q/c) \vec{v} \times \vec{B}$ is verwaarloosbaar omdat $v \ll c$ en $E = B$, dus:

$$\vec{F} = qE_0 \vec{e} \sin \omega t \quad (6.6)$$



met E_0 de amplitude van de golf waar het deeltje mee meetrilt, \vec{e} een eenheidsvector met richting \vec{E} loodrecht op de langskomende bundel en ω de cirkelfrequentie, gedefinieerd als $\omega = 2\pi\nu$ met ν de frequentie van de opvallende straling.

We beschrijven de resulterende uitwijking x in de richting van \vec{E} als die van een gedreven gedempte harmonische oscillator:

$$m\ddot{x} + m\Gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = qE_0 e^{i\omega t}$$

met m de massa van het deeltje en ω_0 de resonantiefrequentie van de oscillator. De dempingsterm $m\Gamma\dot{x}$ beschrijft het energieverlies dat eventueel optreedt door het uitzenden van de straling. De golf is hier complex genoteerd omdat dit de oplossing vereenvoudigt; we gebruiken hieronder alleen het reële deel \Re . Substitutie van $x = x_0 \exp(i\omega t)$ levert

$$x = \Re \left[\frac{q(E_0/m) e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \right]$$

en met $|\ddot{x}|^2 = \ddot{x} \cdot \ddot{x}^*$ en $\ddot{x} = -x_0\omega^2 e^{i\omega t}$ volgt:

$$|\ddot{x}|^2 = \frac{q^2 E_0^2}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}.$$

Substitutie in de formule van Larmor (vergelijking 6.5) geeft het uitgestraalde vermogen:

$$P = \frac{2q^2 |\ddot{x}|^2}{3c^3} = \frac{q^4 E_0^2}{3m^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}.$$

Wat is de extinctiecoëfficiënt? In vergelijking (3.3) is de extinctiecoëfficiënt per deeltje gedefinieerd met $dI_\nu = -I_\nu \sigma_\nu n ds$; voor één deeltje is $n ds = 1 \text{ cm}^{-2}$. De afname $-dP$ van de opvallende energie P_0 is gelijk aan de totale in alle richtingen uitgestraalde (verstrooide) energie P , dus

$$\sigma = \frac{-dI}{I} = \frac{-dP}{P_0} = \frac{P}{P_0}$$

waarin de opvallende energie P_0 (in $\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) wordt gegeven door het tijdsgemiddelde van de Poynting flux:

$$P_0 = \langle S \rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

met gebruik van $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$ ($= \langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle [\Re \exp(i\omega t)]^2 \rangle$). Daarmee is de extinctiecoëfficiënt:

$$\sigma(\omega) = 8\pi \frac{q^4}{3m^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}.$$

We vereenvoudigen dit door invoering van de *klassieke deeltjesstraal* r_0 , gedefinieerd als

$$r_0 \equiv \frac{q^2}{mc^2}; \quad (6.7)$$

dit is de grootte van het geladen deeltje als zijn rustenergie mc^2 gelijk is aan de eigen Coulombenergie q^2/r_0 , *i.e.* als het magneetveld \vec{B} en relativistische- en quantumeffecten verwaarloosbaar zijn. Daarmee:

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (6.8)$$

Deze extinctiecoëfficiënt is voor protonen een factor $(m_p/m_e)^2 \approx 10^6$ kleiner dan voor electronen en hij is nog kleiner voor zwaardere ionen; dus zal verstrooiing aan electronen doorgaans het belangrijkste zijn. Met de klassieke electronstraal

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

en de *Thomsondoorsnede* definiërend als

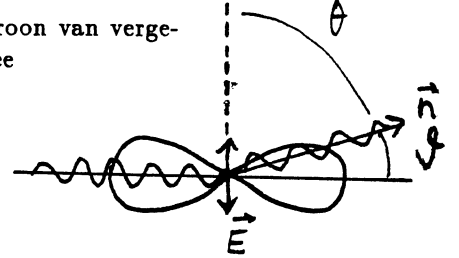
$$\sigma_T \equiv \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (6.9)$$

volgt voor de extinctiecoëfficiënt voor elastische verstrooiing aan harmonisch gebonden electronen:

$$\sigma_e(\omega) = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (6.10)$$

De verstrooiing is niet isotroop; de verstrooide straling volgt het dipoolpatroon van vergelijking (6.4). De *differentiële doorsnede* voor verstrooiing naar $d\Omega$ is daarmee

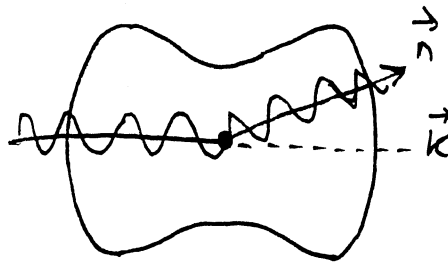
$$\begin{aligned} \left[\frac{d\sigma(\theta, \omega)}{d\Omega} \right]_{\text{pol}} &= \frac{q^4}{m^2 c^4} (\sin \theta)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \\ &= r_0^2 (\sin \theta)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \end{aligned}$$



De hoek θ is die tussen de elektrische trillingsrichting \vec{E} en de stralingsrichting \vec{n} . De verstrooiing is het grootst in voorwaartse en achterwaartse richting, gemeten langs de opvallende straling, omdat de versnelling loodrecht op de oorspronkelijke voortplantingsrichting is gericht en de dipoolverdeling van vergelijking (6.4) en Figuur 6.1 weer loodrecht op de versnelling staat. De index *pol* geeft aan dat het hierbij om een lineair gepolariseerde golf gaat, in overeenstemming met de vaste trillingsrichting van \vec{E} die in vergelijking (6.6) is verondersteld. Een *ongepolariseerde* golf valt te beschrijven als de superpositie van twee gepolariseerde golven loodrecht op elkaar:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{onpol}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} + \frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega} \right] \\ &= \frac{r_0^2}{2} (\sin^2 \theta + 1) \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \\ &= \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Hierin is \vec{E}_1 gekozen in het (\vec{k}, \vec{n}) vlak met \vec{k} de voortplantingsrichting van de opvallende straling en \vec{n} de voortplantingsrichting van de verstrooide straling, is \vec{E}_2 loodrecht op het (\vec{k}, \vec{n}) vlak gekozen en is ϑ de hoek (\vec{k}, \vec{n}) met $\vartheta = \pi/2 - \theta$.



Figuur 6.4: De *dipoolfasefunctie* voor elastische verstrooiing van ongepolariseerde straling.

De verdeling van de verstrooide straling over de hoek ϑ tussen opvallende en verstrooide straling in vergelijking (6.11) is dus $[d\sigma/d\Omega]_{\text{onpol}} \sim 1 + \cos^2 \vartheta$; dit is de *dipoolfasefunctie*, zie Figuur 6.4. Hij verschilt niet sterk van isotropie: loodrecht opzij gaat de helft van wat voor- en achterwaarts verstrooid wordt. Tenslotte bedraagt de totale extinctiecoëfficiënt voor de verstrooiing van ongepolariseerde straling door electronen:

$$[\sigma_e(\omega)]_{\text{onpol}} = \int \left[\frac{d\sigma_e}{d\Omega} \right]_{\text{onpol}} d\Omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\tau_0^2}{2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\phi \\
&= \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2},
\end{aligned}$$

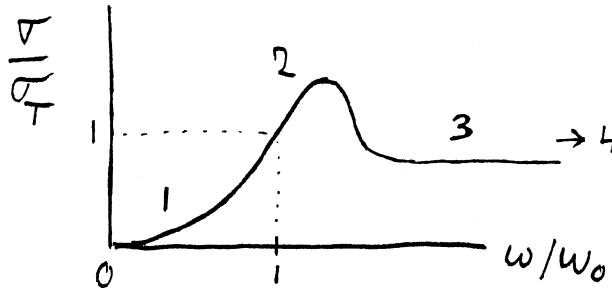
gelijk de in vergelijking (6.10) gegeven doorsnede voor gepolariseerde straling. Ze zijn hetzelfde omdat een electron in ruste geen voorkeursrichting kent.

6.4.1.1 Rayleighverstrooiing

De extinctiecoëfficiënt σ_e in vergelijking (6.10) hangt af van het verschil tussen de stralingsfrequentie ω en de resonantiefrequentie ω_0 . De laatste wordt gegeven door de eigenfrequentie van het harmonisch gebonden electron, *i.e.* een in een atoom of molecuul gebonden electron dat harmonisch mag meetrillen. De kans op zo'n trilling wordt voor werkelijke overgangen gegeven door de *oscillatorsterkte* f_{lu} die gezien kan worden als quantummechanische correctiefactor op de klassieke harmonische oscillator. Deze heeft grootteorde $f_{lu} \approx 1$ voor resonantielijnen, *i.e.* voor toegestane bb overgangen van het valentie-electron vanuit de grondtoestand van een atoom of ion; voor waterstof bijvoorbeeld de Lymanreeks. Voor andere overgangen is f_{lu} veel kleiner. Daarmee is de extinctiecoëfficiënt voor elastische verstrooiing aan atomen of moleculen per deeltje in de grondtoestand l en per resonantieovergang lu :

$$\sigma_e(\omega) = f_{lu} \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}, \quad (6.12)$$

met $\omega_0 = 2\pi\nu_{lu}$ de cirkelfrequentie van de bb overgang.



Figuur 6.5: *Extinctie ten gevolge van verstrooiing aan electronen, uitgedrukt in de Thomsondoorsnede $\sigma_T = (8\pi/3)\tau_e^2$. 1 = Rayleighverstrooiing, 2 = resonantieverstrooiing, 3 = Thomsonverstrooiing, 4 = Comptonverstrooiing.*

Figuur 6.5 toont het verloop van σ_e/σ_T met ω/ω_0 . Er zijn vier verschillende domeinen. Het eerste domein is dat van de *Rayleighverstrooiing* met $\omega \ll \omega_0$. Daarvoor geldt:

$$\overset{R}{\sigma_e(\omega)} \approx f_{lu} \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4. \quad (6.13)$$

De langskomende golf trilt zo traag vergeleken met de resonantiefrequentie ω_0 dat het valentie-electron zonder traagheid meetrilt: voor $\omega \ll \omega_0$ worden de fluctuaties van het externe elektrisch veld als quasistatisch ervaren. Damping is verwaarloosbaar en hogere frequenties worden veel sterker verstrooid dan lagere.

6.4.1.2 Resonantieverstrooiing

Het tweede domein in Figuur 6.5 heeft $\omega \approx \omega_0$ zodat:

$$\sigma_e(\omega) \approx f_{lu} \sigma_T \frac{\omega_0^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2}$$

Nadere specificatie van de stralingsdempingsterm Γ levert (Rybicki en Lightman §§ 3.5–3.6):

$$\Gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3m_e c^3}$$

zodat

$$\sigma_T \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2}{m_e c} \Gamma$$

en

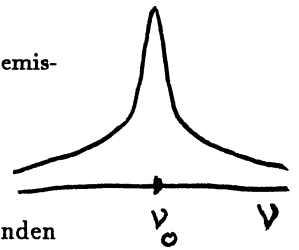
$$\sigma_e^l(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m_e c} f_{lu} \frac{\Gamma/2\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

Dit is de extinctiecoëfficiënt per deeltje voor een spectraallijn met frequentie $\omega = \omega_0$, zoals vermeld in § 5.4.

Zonder de correctiefactor f_{lu} is dit de eigentrilling van een niet-gedreven gebonden oscillator die hier tevoorschijn komt omdat zo'n vrije trilling kan worden aangeslagen door een puls langskomende straling van de juiste frequentie. Hij is ook direct af te leiden uit $\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, vormt de klassieke beschrijving van een spectraallijn als een resonante trilling en is daarmee de reden dat de meest waarschijnlijke bb sprongen "resonantie-overgangen" heten en de bijbehorende spectraallijnen "resonantielijnen". De vormfunctie

$$\psi(\omega - \omega_0) = \frac{\Gamma/2\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

is het in vergelijking (5.2) al gegeven *Lorentzprofiel* dat de verbreeding van het spontane emissieprofiel door stralingsdemping beschrijft.



6.4.1.3 Thomsonverstrooiing

Het derde domein in Figuur 6.5 heeft $\omega \gg \omega_0$ zodat $\sigma_e(\omega) \approx f_{lu} \sigma_T$. Voor gebonden electronen geldt deze benadering als de energie van de opvallende straling zo groot is dat de bindingsenergie verwaarloosbaar wordt, *i.e.* als het electron zich als een *vrij* deeltje gedraagt. Dan geldt de klassieke harmonische oscillator exact, dus $f_{lu} = 1$.

Dit doet vermoeden dat de Thomsondoorsnede σ_T de extinctiecoëfficiënt is voor elastische verstrooiing aan vrije electronen, *Thomsonverstrooiing* genaamd. Dat klopt; dit kan direct worden afgeleid uit de bewegingsvergelijking $m_e \ddot{x} = eE_0 \sin \omega t$ van een vrij electron dat ongedempt meetrilt met de langskomende golf en volgt hier derhalve uit vergelijking (6.10) door daarin de resonantiefrequentie ω_0 en de dempingsparameter Γ nul te stellen. Dus geldt voor Thomsonverstrooiing aan vrije electronen:

$$\sigma_e^T(\omega) = \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2, \quad (6.14)$$

onafhankelijk van de frequentie van de opvallende straling. De differentiële extinctiecoëfficiënt voor Thomsonverstrooiing van onpolariseerde straling is (vergelijking 6.1):

$$\left[\frac{d\sigma_e^T}{d\Omega} \right]_{\text{onpol}} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \quad (6.15)$$

met ϑ de hoek tussen opvallende en verstrooide straling.

Vraag 6.6 Verklaar de blauwe kleur van de hemel. Bevat het licht van de blauwe hemel spectraallijnen?

Vraag 6.7 Ga na dat de extinctiecoëfficiënt voor Thomsonverstrooiing aan vrije electronen veel groter is dan voor Rayleighverstrooiing aan gebonden electronen in het hele frequentiebereik waar Rayleighverstrooiing optreedt. In welke omstandigheden zal Rayleighverstrooiing niettemin belangrijk zijn?

Vraag 6.8 Wat is de extinctiecoëfficiënt α_T voor Thomsonverstrooiing en wat is de frequentieafhankelijkheid ervan?

Vraag 6.9 Wat is de bronfunctie voor Thomsonverstrooiing?

6.4.2 Inelastische verstrooiing

6.4.2.1 Comptonverstrooiing

Ook hier gaat het net als bij Thomsonverstrooiing om botsingen tussen fotonen en vrije ladingen (electronen), maar nu, in het vierde domein van Figuur 6.5, voor fotonen van hoge energie waarvoor de benadering dat alleen de Coulombenergie van het deeltje telt niet meer opgaat omdat ook de energie $h\nu$ van het foton moet worden meegenomen. De verstrooiing is dan *inelastisch*: de EM-golf verliest energie aan het electron. De grootte van het energieverlies volgt uit combinatie voor een aanvankelijk stilstaand electron van energiebehoud

$$h\nu_1 + m_e c^2 = h\nu_2 + m c^2$$

en impulsbehoud

$$\frac{h\nu_1}{c} = \frac{h\nu_2}{c} \cos \vartheta + m v \cos \varphi \quad \text{en} \quad 0 = \frac{h\nu_2}{c} \sin \vartheta - m v \sin \varphi,$$

met $m_e c^2$ de rustmassa-energie en de massa m gegeven door:

$$m = \frac{m_e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_e \gamma$$

met $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Een rekenpartij ter eliminatie van φ en $m v$ levert:

$$h\nu_2 = \frac{h\nu_1}{1 + (h\nu_1/m_e c^2)(1 - \cos \vartheta)}$$

en derhalve

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c (1 - \cos \vartheta) \tag{6.16}$$

met $\lambda_2 > \lambda_1$ en λ_c de *Comptongolflengte*, gedefinieerd als

$$\lambda_c \equiv \frac{h}{m_e c} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ nm} \tag{6.17}$$

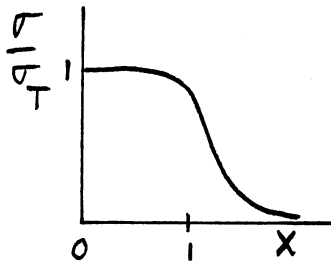
Het energieverlies van het foton is verwaarloosbaar voor $h\nu \ll m_e c^2 = 0.5 \text{ MeV}$ of $\lambda \gg \lambda_c$; dit is de *Thomsonvoorwaarde* voor het elastisch zijn van electronenverstrooiing. De relatieve afname $\Delta\nu/\nu = -\Delta\lambda/\lambda = -(\lambda_c/\lambda)(1 - \cos \vartheta)$ is groot voor γ -straling en verwaarloosbaar in het optische spectraalgebied.

De botsingsdoorsnede wordt gegeven door de Klein-Nishina formule, hier niet afgeleid. Hij neemt af met de fotonenergie. In het extreem-relativistisch domein geldt voor

$$x \equiv \frac{h\nu}{m_e c^2} \gg 1$$

$$\sigma = \frac{3}{8} \sigma_T \frac{\ln 2x + 1/2}{x}$$

dat

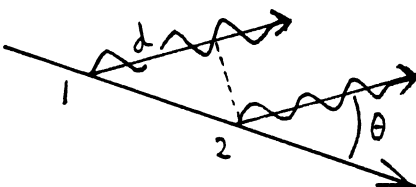


6.4.2.2 Inverse Comptonverstrooiing

In plaats van energieoverdracht van energierijke fotonen aan "stilstaande" ladingen nu andersom: energieoverdracht van energierijke deeltjes (meestal relativistische electronen) aan fotonen. Nu wordt het belangrijk om relativistisch onderscheid te maken tussen het LRS = *laboratorium referentiestelsel* = "waarnemersstelsel" enerzijds en het DRS = *deeltje referentiestelsel* = "meebewegend stelsel" = "ruststelsel" anderzijds.

Eerst het Dopplereffect. Een bron beweegt tijdens uitstraling van één periode over een afstand $v\Delta t$ van punt 1 naar punt 2 onder een hoek θ met de gezichtsrichting. Het op de gezichtslijn geprojecteerde weglengteverschil is $d = v\Delta t \cos \theta$. Dan is het verschil tussen de aankomsttijdstippen van de straling uitgezonden in punt 1 en in punt 2 ter plekke van de waarnemer:

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t - \frac{d}{c} = \Delta t [1 - (v/c) \cos \theta].$$



Dit tijdsverschil beslaat één periode van de straling, dus de waargenomen frequentie $\nu_{\text{obs}} = 1/\Delta t_{\text{obs}}$ wordt gegeven door

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{\nu}{1 - (v/c) \cos \theta}.$$

Dit is het klassieke Dopplereffect. Dezelfde formule geldt voor het relativistische Dopplereffect, maar dan met een extra factor $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ten gevolge van tijddilatatie:

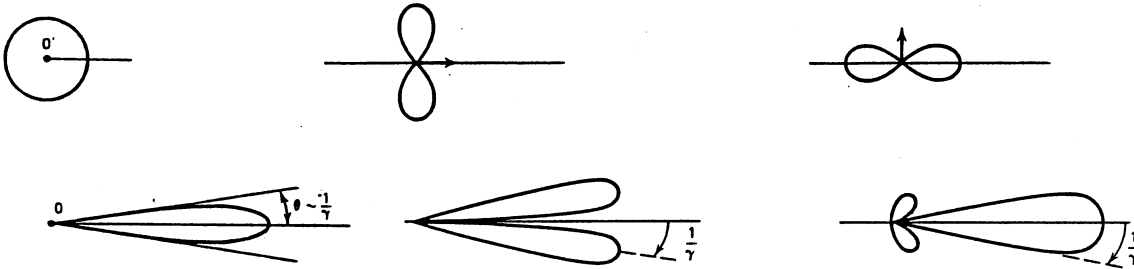
$$\nu' = \nu\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \quad \text{en} \quad \nu = \nu'\gamma\left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'\right),$$

met grootheden die gemeten worden in het DRS genoteerd met accenten.

De hoek θ gemeten in het LRS tussen de golfvector en de bronnsnelheid \vec{v} transformeert naar θ' in het DRS volgens:

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma(1 + (v/c) \cos \theta')} \quad \text{en} \quad \sin \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(1 - (v/c) \cos \theta)}.$$

Bekijk een stralend object dat met relativistische snelheid ($\gamma \gg 1$) op ons af beweegt. Straling die in het object (DRS) loodrecht op de gezichtslijn wordt uitgezonden ($\theta' = 90^\circ$) heeft $\sin \theta \approx \theta \approx 1/\gamma \ll 1$, dus isotroop in het DRS uitgezonden straling wordt sterk voorwaarts gepiekt waargenomen in het LRS. Dit is het *relativistisch bundeleffect* (Figuur 6.6). (linker formule)



Figuur 6.6: Het relativistisch bundel-effect. Isotropie uitgezonden straling wordt sterk voorwaarts gepiekt waargenomen. *De waarnemer bevindt zich rechts.*

Bekijk nu een relativistisch electron dat straling verstrooit. In een isotroop stralingsveld (isotropie in het LRS, dus in θ) "ziet" dat electron een sterk naar zich toe gepiekt stralingsveld op zich afkomen, met navenant hogere frequentie:

$$\nu'_1 = \nu_1\gamma\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

waarop de index 1 slaat op de situatie vóór de verstrooiing. Voor $\theta = 90^\circ$ is de frequentietoename $\nu'_1/\nu_1 = \gamma$. De Thomsonvoorwaarde voor elastische verstrooiing in het DRS is $h\nu'_1 = h\nu_1\gamma \ll m_e c^2 = 0.5 \text{ MeV}$; als hieraan is voldaan is de verstrooiing in het DRS elastisch en geldt $\nu'_2 = \nu'_1$. In het LRS geldt dan voor de verstrooide straling:

$$\nu_2 = \nu'_2\gamma\left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'\right) = \nu_1\gamma^2\left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta'\right)\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right).$$

De verstrooiingshoek zal de dipoolfasefunctie volgen, dus ruwweg isotroop verdeeld zijn; daarmee geldt:

$$\nu_2 \approx \frac{4}{3}\gamma^2\nu_1. \quad (6.18)$$

Bij grote γ is er dus een aanzienlijke energietoename ("verharding") van de fotonen, ongeveer gelijk aan γ^2 . Zo maak je Röntgenfotonen uit een zachter stralingsveld. Na de eerste factor γ (van LRS naar DRS) moet om enigermate aan de Thomsonlimiet $h\nu_1\gamma \ll 0.5 \text{ MeV}$ te voldoen gelden dat $h\nu'_1 < 0.5 \text{ MeV}$, bijvoorbeeld $h\nu'_1 = 100 \text{ keV}$. Met $\gamma = 10$ krijg je dan toch nog 1 MeV fotonen uit 10 keV fotonen. Aan de Thomsonlimiet wordt echter al gauw niet voldaan; voor $\gamma = 100$ (in AGN's wellicht het geval) eist deze dat $h\nu_1 < 5 \text{ keV}$.

Relativistische electronen in een intens stralingsveld zullen herhaaldelijke inverse Compton-verstrooiingen ondergaan. De straling verhardt en de deeltjes worden afgeremd; er is dus uitwisseling van energie tussen de deeltjes en het stralingsveld.

6.5 Electron + \vec{B} -veld

6.5.1 Cyclotronstraling

We behandelen nu de versnelling van een geladen deeltje (electron) in een magnetenveld door de Lorentzkracht. Vooreerst voor niet-relativistische snelheden met $\gamma = 1$. Een electron spiraleert om de magnetische veldlijnen; we splitsen deze beweging in een eenparige beweging langs het veld en een cirkelbeweging loodrecht erop. Ontbinding van de electronsnelheid \vec{v} in componenten $v_{\parallel} \parallel \vec{B}$ en $v_{\perp} \perp \vec{B}$ en gelijkstelling van de Lorentzkracht en middelpuntvliedende kracht levert:

$$\frac{m_e v_{\perp}^2}{R_B} = \frac{e v_{\perp} B}{c},$$

dus

$$R_B = \frac{m_e v_{\perp} c}{e B} \quad (\text{cgs}) = \frac{m_e v_{\perp}}{e B} \quad (\text{mksA}). \quad (6.19)$$

R_B is de *Larmorstraal* of *gyrostraal*. De versnelling is gericht langs R_B . De frequentie van de bijbehorende straling is:

$$\nu_B = \frac{v_{\perp}}{2\pi R_B} = \frac{e B}{2\pi m_e c} \quad (\text{cgs}) = \frac{e B}{2\pi m_e} \quad (\text{mksA}). \quad (6.20)$$

Dit is de *Larmorfrequentie* of *cyclotronfrequentie*.

Het uitgestraalde vermogen volgt uit de Larmorformule (vergelijking 6.5):

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}_{\perp}^2.$$

De grootte van de versnelling langs R_B wordt gegeven door de grootte van de Lorentzkracht: $\dot{v}_{\perp} = (eB/m_e c) v_{\perp}$, en daarmee

$$P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{e B}{m_e c} \right)^2 v_{\perp}^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{B^2}{c} v_{\perp}^2 = \frac{2}{3} \frac{r_e^2}{c} B^2 v_{\perp}^2$$

met $r_e = e^2/(m_e c^2)$ weer de klassieke electronstraal. Voor een isotrope snelheidsverdeling van de electronen geldt:

$$\langle v_{\perp}^2 \rangle = \frac{v^2}{4\pi} \int \sin^2 \alpha \, d\Omega = \frac{2}{3} v^2$$

met α de *spoedhoek* (\vec{B}, \vec{v}) en gebruik van $\int \sin^2 \alpha \, d\Omega = 8\pi/3$. Daarmee:

$$\langle P \rangle = \frac{4}{9} r_e^2 \frac{v^2}{c} B^2 = \frac{4}{3} \sigma_T \frac{v^2}{c} \frac{B^2}{8\pi}$$

met de Thomsondoorsnede $\sigma_T = (8\pi/3) r_e^2$.

Bij een homogeen magnetenveld is er monochromatische emissie op deze frequentie: één enkele spectraallijn. Zulke *cyclotronlijnen* zijn waargenomen in Röntgenspectra van pulsars.

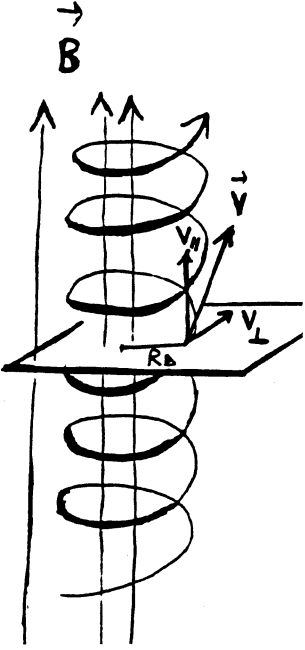
6.5.2 Synchrotronstraling

Zonder bewijs melden we dat voor relativistische snelheden soortgelijke formules gelden als bij cyclotronstraling, met een extra correctiefactor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. De *gyrofrequentie* die bij de cirkelbeweging van een electron hoort is dan in cgs-eenheden:

$$\nu_g = \frac{\nu_B}{\gamma} = \frac{e B}{2\pi \gamma m_e c} \quad (6.21)$$

en het uitgestraalde vermogen wordt:

$$P = \frac{4}{3} \sigma_T \frac{v^2}{c} \gamma^2 \frac{B^2}{8\pi},$$



voor een homogeen veld en isotrope snelheidsverdeling. Ten opzichte van cyclotronstraling gaat de frequentie omlaag en het vermogen omhoog. Verder treedt er ook hier weer relativistische bundeling op: de emissie is sterk voorwaarts gepiekt langs \vec{v} , met halve tophoek $1/\gamma$. Dit rondzweepende stralingskegeltje trekt snel aan de waarnemer voorbij, dus die ziet slechts een korte flits. De flitsduur is slechts γ^{-3} van de omlooptijd: één γ^{-1} uit de tophoek, en weer γ^{-2} uit de tijddilatatie naar en van het DRS uit het LRS. Deze repeterende flitsen leveren een karakteristieke frequentie:

$$\nu_c = \frac{3}{2}\gamma^2\nu_B \sin \alpha = \frac{3}{2}\gamma^3\nu_g \sin \alpha \quad (6.22)$$

waarin α weer de spoedhoek (\vec{B}, \vec{v}) is. Dit is de *synchrotonfrequentie*. Voor $\gamma \gg 1$ geldt $\nu_c \gg \nu_B$.

In Fouriertermen: cyclotronstraling is een nette continue EM sinusgolf waarvan het spectrum, i.e. de Fouriergetransformeerde, een scherpe spectraallijn is. Synchrotronstraling bestaat daarentegen uit scherpe pulsen. Ze volgen elkaar met de cyclotronfrequentie op maar hun puls-breedte is γ^3 maal kleiner. Het spectrum, i.e. de Fouriergetransformeerde daarvan, is een breed stelsel van hogere harmonischen van de cyclotronfrequentie dat zich uitstrekt tot op de Nykvist-frequentie $2\nu_c$. Anders gezegd: de korte flitsduur bemonstert de hogere harmonischen van de Larmorbeweging tot op $2\nu_c$. Door de sterk voorwaartse gepiektheid zijn er veel van deze hogere harmonischen van ν_B aanwezig: de waargenomen amplitude is geen sinusoïde meer. Synchrotronstraling heeft daarom een breed spectrum bestaande uit hogere harmonischen van ν_B dat zich tot ongeveer ν_c uitstrekt. Bij versmering, bijvoorbeeld door het optreden van een verdeling in deeltjessnelheden (dus in γ , dus in flitsduur) of in spreiding in richting en sterkte van het magnetisch veld binnen een bron, levert dit een continuum.

Als de relativistische deeltjes een energieverdeling hebben volgens een machtwet:

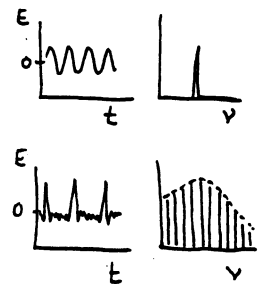
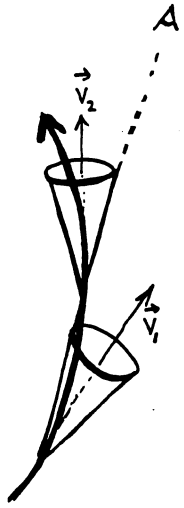
$$N(E) dE \sim E^{-p} dE \quad \text{of} \quad N(\gamma) d\gamma \sim \gamma^{-p} d\gamma$$

dan geldt voor het totaal uitgezonden vermogen:

$$\begin{aligned} P_{\text{tot}}(\nu) &\sim \int P(\nu)\gamma^{-p} d\gamma \\ &\sim \nu^{-(p-1)/2}, \end{aligned}$$

dus de *spectrale index* s in $P \sim \nu^{-s}$ is $s = (p-1)/2$ voor synchrotronstraling.

Er is directe analogie met de ff processen voor geladen deeltjes die worden versneld in een Coulomb veld. Zo kan ook synchrotron-absorptie optreden: excitatie van een electron in een "hogere" Larmorbaan. Evenzo is er geïnduceerde synchrotron-emissie: synchrotron-deëxcitatie met het aanwezige stralingsveld méé. Tenslotte: synchrotronstraling is gepolariseerd omdat het magnetisch veld een voorkeursrichting verschaft.



6.6 Collectieve verschijnselen

In dit dictaat wordt overal verondersteld dat de brekingsindex $n = 1$. Hier volgt een korte samenvatting van verschijnselen waarvoor de brekingsindex van belang is; uitgebreidere behandeling wordt gegeven in de colleges plasma-astrofysica.

6.6.1 Stof en druppeltjes

Met de langskomende straling meetrillende valentie-electronen in atomen en moleculen leveren Rayleighverstrooiing. Bij grotere deeltjes is er een overgang, van Rayleighverstrooiing aan diëlectrische bolletjes tot buigingsverschijnselen om blokkerende deeltjes met werkzame doorsnede $\sigma = \pi r^2$. Zie Tabel 6.1. Bij al deze processen treedt gedeeltelijke polarisatie op.

steeds meer voorwaarts gepiekt.

naam	diameter	λ -afhankelijkheid	fasefunctie
Rayleigh	$d \ll \lambda$	$\sim \lambda^{-4}$	
Mie	$d \approx \lambda$	\Downarrow	
buiging	$d \gg \lambda$	$\sim \lambda^0$	

Tabel 6.1: *Elastische verstrooiing aan grotere deeltjes.*

6.6.2 Čerenkov straling

Dit is de straling van een geladen deeltje dat beweegt met een snelheid $v > c/n$ in een medium met brekingsindex $n > 1$. Dan is c/n de fasesnelheid van EM straling in het medium, en het deeltje gaat harder. Net als bij de "sonic boom" van een supersonische straaljager treedt er een schok op, met bijbehorend energieverlies. Dit is een efficiënt mechanisme voor de afremming van kosmische stralingsdeeltjes in de aardatmosfeer.

6.6.3 Plasma cutoff

De ionen en de electronen in een plasma kunnen worden uiteengedreven door de Coulombkracht van een passerende EM golf omdat de electronen veel bewegelijker zijn dan de ionen. Voor voldoende langzame frequenties levert deze scheiding een teruggrijvende kracht die verdere voortplanting van de golf tegenwerkt. Dit gebeurt helemaal voor frequenties kleiner dan:

$$\nu_p = 9 \times 10^3 \sqrt{N_e} \text{ Hz} \quad (6.23)$$

met ν_p de *plasmafrequentie* waaronder EM golven zich *niet* kunnen voortplanten. Voor $\nu > \nu_p$ is de brekingsindex:

$$n_p = \sqrt{1 - \nu_p^2/\nu^2}.$$

6.6.4 Faraday rotatie

De voortplanting van een EM golf in een plasma kan worden verstoord door een magneetveld. Heuristisch: een lineair gepolariseerde golf (\vec{E} in voorkeursrichting) kan worden gedacht als superpositie van een linksom en een rechtsom circulair gepolariseerde golf. Bij voortplanting evenwijdig aan het magneetveld past de ene schroefzin wel en de andere niet. Gevolg: het polarisatievlak wordt verdraaid.

6.6.5 Razin cutoff

In een plasma met $n_p < 1$ kan geen Čerenkov straling voorkomen. Wel verandert de tophoek van het relativistische bundeleffect volgens:

$$\theta_{\text{bundel}} \approx \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \rightarrow \theta_{\text{bundel}} \approx \sqrt{1 - n_p^2 v^2/c^2}.$$

Voor $n_p < 1$ wordt het bundeleffect dus onderdrukt. Aangezien het deze bundeling is die door pulsing synchrotronstraling levert is er een door n_p , dus ν_p , bepaalde *afsnijdfrequentie* waaronder geen synchrotronstraling kan voorkomen:

$$\nu_{\text{Razin}} = \gamma \nu_p$$

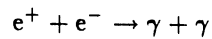
6.7 Kernreacties

Tenslotte voor de volledigheid nog vermelding van kernreacties als stralingsprocessen.

6.7.1 Fusie- en splitsingsreacties

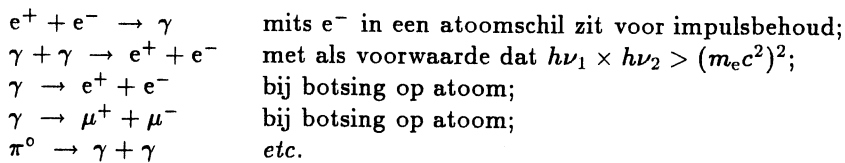
Bijvoorbeeld $4p \rightarrow \alpha + 2\nu + 2\gamma$ als resultaat van de diverse proton-proton cycli in waterstofverbrandende sterren. Voor de twee neutrino's is de hele ster optisch dun. De twee γ fotonen zijn de bron van de sterreschijn.

6.7.2 Paarannihilatie en paarcreatie



Een hoogenergetisch positron botst bijvoorbeeld op een stilstaand electron en produceert één γ -foton met grote $h\nu$ en één γ -foton met $h\nu = m_e c^2$. Deze 0.511 MeV lijn is in het spectrum van zonnevlammen waargenomen. Een ander voorbeeld is de annihilatiebijdrage aan de 3 K achtergrondstraling.

Verder:



Hoofdstuk 7

Stralingstransport

7.1 Inleiding: soorten evenwicht

Hoofdstuk 3 ging over stralingstransport in homogene lagen en de uittredende intensiteit voor lagen met gegeven bronfunctie S_ν . In dit hoofdstuk behandelen we de straling uit inhomogene lagen en de bronfunctie zelf. Dat doen we voor diverse soorten evenwichtssituatie.

7.1.1 TE

In *thermodynamisch evenwicht* (TE) geldt $S_\nu = B_\nu$ voor elk deelproces en ook voor de totale bronfunctie; specificatie van de deelprocessen is daarvoor niet nodig. In TE geldt verder dat de profiel functies gelijk zijn ($\chi = \varphi = \psi$) en geldt identiteit van alle stralingsgrootheden: $I_\nu = J_\nu = S_\nu = B_\nu(T)$. De populaties worden gegeven door de Boltzmann-Saha verdeling en de kinetische energieverdeling volgt de wet van Maxwell, met dezelfde temperatuur in alle verdelingswetten. Er is “detailed balancing” tussen elk proces en zijn omgekeerde, op elke frequentie en voor elke bundel. Er is geen netto transport van energie: $\mathcal{F}_\nu = 0$, en er zijn geen spectraallijnen. Dit is makkelijk om uit te rekenen maar je hebt er weinig aan als het gaat om evaluatie van energiefluxen en diagnostische interpretatie van spectraallijnen.

7.1.2 LTE

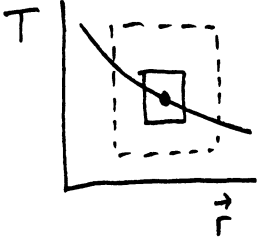
Met *lokaal thermodynamisch evenwicht* (LTE) wordt aangenomen dat de *materie* in evenwicht is met de *plaatselijke* kinetische temperatuur. De straling mag echter van die temperatuur afwijken en de temperatuur mag (langzaam) door het medium variëren. De materiauwetten Maxwell, Boltzmann en Saha gelden, met voor T de plaatselijke temperatuur die wordt bepaald door de thermische deeltjesbewegingen (*electronentemperatuur*). Ook wordt aangenomen dat volledige redistributie geldt zodat $\chi = \varphi = \psi$. Daarmee zijn de populaties gelijk aan de Saha-Boltzmann TE-verdeling en zijn de extinctiecoëfficiënten bepaald. Voor de bronfunctie volgt uit de algemene uitdrukking (vergelijking 5.12)

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\psi/\varphi}{\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - \chi/\varphi} \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{g_u n_l}{g_l n_u}\right)^{\text{TE}} - 1} \\ &= \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = B_\nu(T). \end{aligned}$$

De essentie van LTE is dat de door botsingen onderhouden energieverdeling van materie *lokaler* wordt bepaald dan die van straling, zodat de materie niet maar de straling enigszins

kan afwijken van de lokale condities:

$$S'_\nu(\vec{r}) = B_\nu [T(\vec{r})] \quad I_\nu(\vec{r}) \neq B_\nu [T(\vec{r})] \quad J_\nu(\vec{r}) \neq B_\nu [T(\vec{r})] \quad \mathcal{F}_\nu(\vec{r}) \neq 0. \quad (7.1)$$



Volgens de LTE veronderstelling zit de materie in een voldoende klein effectief TE-doosje dat het anders zijn van de temperatuur elders niet wordt gemerkt in de populaties. De straling ter plekke heeft echter wel wat kennis van verder weg liggende regimes. De vrije weglengte voor deeltjes wordt dus wat kleiner verondersteld dan voor fotonen, maar de laatste brengen nu ook weer niet zoveel kennis van andere omstandigheden aan dat de populaties erdoor uit evenwicht worden gebracht.

LTE is dus een heel plezierige veronderstelling die het gemak van TE paart aan de noodzaak tenminste enige variatie door het medium toe te staan. Het is een veel gemaakte veronderstelling die soms, met name voor sterfotوسفeren, goed opgaat. Zowel de extinctiecoëfficiënt als de bronfunctie worden ermee op eenvoudige wijze vastgelegd. Evaluatie van de extinctiecoëfficiënt α_ν vereist slechts kennis van de extinctiecoëfficiënt per deeltje σ_ν (of de daaraan equivalente overgangswaarschijnlijkheid A_{ul} , oscillatorsterkte f_{ul} , gf -value), de chemische samenstelling van het gasmengsel en de toestandsgrootheden druk en temperatuur. Met Saha en Boltzmann volgen dan alle bezettingen $n_{r,s}^{\text{TE}}$ en ligt $\alpha_\nu = n_{r,s} \sigma_\nu$ vast voor alle overgangen van belang; hun bronfunctie volgt direct uit de temperatuur middels de Planckfunctie. Zo kun je één enkele spectraallijn analyseren zonder je druk te maken over andere overgangen en golflengtegebieden. Dit alles gaat voor continue processen net zo als bij spectraallijnen; een continue overgang kan immers ook gedacht worden als een sprong tussen twee niveau's.

Vraag 7.1 Welke rol speelt de verhouding tussen botsingsexcitatie, botsingsdeëxcitatie, botsingsionisatie, botsingsrecombinatie *etc.* enerzijds en stralingsexcitatie, stralingsdeëxcitatie, stralingsionisatie, stralingsrecombinatie *etc.* anderzijds in de toepasselijkheid van LTE?

Vraag 7.2 Geef voorbeelden van situaties waarin LTE vast wel geldt en van situaties waarin LTE zeker niet geldt.

7.1.3 SE

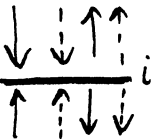
De aanname van *statistisch evenwicht* (SE) impliceert een stationaire situatie: tijdsafhankelijkheid van de stralingsvelden en niveaubezettingen. Voor de laatste gelden dan de *statistisch evenwichtsvergelijkingen*:

$$\frac{dn_i(\vec{r})}{dt} = \sum_{j \neq i}^N n_j(\vec{r}) P_{ji}(\vec{r}) - n_i(\vec{r}) \sum_{j \neq i}^N P_{ij}(\vec{r}) = 0 \quad (7.2)$$

met n_i de populatie van het niveau i waarin we geïnteresseerd zijn, N het totaal aantal niveau's dat op deze bezetting middels een of ander proces invloed heeft, en P_{ij} de totale overgangswaarschijnlijkheid per seconde voor een overgang uit niveau i naar niveau j :

$$P_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_{\nu_0} + C_{ij},$$

met A_{ij} , B_{ij} en C_{ij} de Einsteincoëfficiënten voor bb overgangen uit Hoofdstuk 5 of daaraan analoge overgangswaarschijnlijkheden voor andere processen zoals bf en ff overgangen; \bar{J}_{ν_0} is het frequentiegemiddelde hoekgemiddelde stralingsveld, voor bf processen bijvoorbeeld gemiddeld over het seriegrenscontinuum. De eerste som in vergelijking (7.2) geeft de toename van de populatie van niveau i door overgangen uit alle andere niveau's j naar i ; de tweede som geeft de afname van de populatie van i door overgangen uit i naar alle andere niveau's j . Deze vergelijkingen komen neer op: per tijdseenheid per niveau evenveel er in als er uit, maar geen microscopisch evenwicht per deelproces. Het tekort van het ene proces wordt aangevuld door een teveel van een ander.



Deze populatievergelijkingen voor statistisch evenwicht zijn gekoppeld met de vergelijkingen voor stralingstransport

$$\frac{dI_\nu(\vec{r})}{d\tau_\nu(\vec{r})} = S_\nu(\vec{r}) - I_\nu(\vec{r})$$

op alle frequenties ν en langs alle bundels die van belang zijn voor enigerlei populatie. De overgangswaarschijnlijkheden P_{ij} in de statistisch evenwichtsvergelijkingen hangen immers van \bar{J}_ν af en dus van I_ν in alle richtingen, terwijl de optische dikte τ_ν en de bronfunctie S_ν in de transportvergelijkingen beide weer via α_ν van de populaties afhangen. Het verband tussen I_ν en S_ν is bovendien doorgaans niet lineair. Er resulteert een stelsel niet-lineaire gekoppelde vergelijkingen, vaak heel groot, dat simultaan (*i.e.* onderling consistent) moet worden opgelost voor elke plaats in het medium, voor alle frequenties en langs alle bundels die in de populatieprocessen meedoen.

Als je LTE mag aannemen kan aan deze gedetailleerde specificatie van P_{ij} en aan deze ingewikkelde oplossing van een groot stelsel niet-lineaire vergelijkingen worden voorbijgegaan. Vandaar dat de aanname van LTE zeer vaak wordt gemaakt zonder bewijsvoering. Vaak is dat incorrect; dan zit er niets anders op slechts SE te veronderstellen. Als ook SE niet geldt moet het oplossen tijdsafhankelijk worden gedaan. Als dan ook nog de Maxwellverdeling niet geldt en er geen axiale symmetrie kan worden aangenomen is een supercomputer al vlug noodzakelijk.

7.1.4 NLTE

Het acronym NLTE of non-LTE betekent dat de veronderstelling van LTE niet opgaat. Het zegt niets over wat er dan wel opgaat. Meestal bedoelt men er echter mee dat SE wordt aangenomen, dat de Maxwellverdeling geldt en dat complete redistributie (CRD) optreedt. De populaties kunnen dan verschillen van de plaatselijke Saha-Boltzmann waarden. Dat impliceert dat de extinctiecoëfficiënt kan verschillen van zijn lokale LTE waarde en dat de bronfunctie kan verschillen van de lokale Planckfunctie.

Een stap algemener is het om naast Saha-Boltzmann ook de gelijkheid van de profiel functies te laten varen: $\psi \neq \varphi$. Geen complete maar "partiële" redistributie (NLTE-PRD). De lijnbronfunctie is dan frequentie-afhankelijk: binnen een spectraallijn varieert de bronfunctie met de frequentie, afhankelijk van verschillen in de vormfuncties. Zulke verschillen kunnen optreden in sterke lijnen met veel verstrooiingsprocessen als de stralingsvelden door de lijn heen variëren. Dat is goed mogelijk omdat de vrije weglengte van een foton in de verre vleugel van een sterke lijn veel groter is dan in de lijnkern zodat de lijnvleugels meer weet hebben van verder weggelegen stralingsbronnen en stralingsverliezen dan de kern. In dat geval moeten de statistisch evenwichtsvergelijkingen monochromatisch worden opgelost, met een *redistributiefunctie* die aangeeft hoeveel "crosstalk" er is met andere delen van het lijnprofiel.

Vraag 7.3 Vaak worden *NLTE-afwijkingcoëfficiënten* b_i gedefinieerd met:

$$b_l = n_l/n_l^{\text{LTE}} \quad b_u = n_u/n_u^{\text{LTE}}$$

die de afwijking specificeren van de werkelijke populatie ten opzichte van de uit Saha en Boltzmann volgende TE populatie voor de lokale temperatuur T . Hoe verschijnen ze in de lijnbronfunctie S_ν^l en in de lijnextinctiecoëfficiënt α_ν^l ?

Laat zien dat in de Wien benadering de lijnbronfunctie lineair schaalst met b_u/b_l en de lijnextinctiecoëfficiënt met b_l .

Vraag 7.4 Vaak wordt gedacht dat NLTE voor de vorming van een spectraallijn altijd $S_\nu^l \neq B_\nu$ betekent, maar het is ook mogelijk dat $S_\nu^l = B_\nu$ zonder dat de lijn aan LTE voldoet. Hoe?

7.2 Stralingstransport bij LTE

Als LTE geldt is de bronfunctie eenvoudig vastgelegd door de plaatselijke temperatuur, en de extinctiecoëfficiënt middels Saha-Boltzmann ook. Stralingstransport voor een gegeven bronfunctie is reeds behandeld in Hoofdstuk 3. Alle resultaten daar zijn dus hier van toepassing met de eenvoudige substitutie:

$$S_\nu(\vec{r}) = B_\nu [T(\vec{r})].$$

De transportvergelijking (vergelijking 3.13) wordt daarmee

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = B_\nu(T) - I_\nu$$

voor optische dikte en

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau'_\nu} = I_\nu - B_\nu(T)$$

voor radiële optische diepte en axiale symmetrie. De integraalvorm (vergelijking 3.14) wordt

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} B_\nu[T(t_\nu)] e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu;$$

voor een homogene laag levert dit (vergelijking 3.15)

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)} + B_\nu(T) (1 - e^{-\tau_\nu(D)})$$

en de Eddington-Barbier benadering voor de intensiteit uit een optisch dikke laag (vergelijking 3.18) wordt

$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu) \approx B_\nu [T(\tau'_\nu = \mu)].$$

7.2.1 Straling uit een dunne LTE laag

Voor een optisch dunne homogene laag in LTE ter dikte s is de uittredende intensiteit

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) + [B_\nu(T) - I_\nu(0)] \tau_\nu(s)$$

met de opvallende intensiteit in de stralingsrichting gelijk aan $I_\nu(0)$. In de Rayleigh-Jeans benadering is dit:

$$T_b = T_b(0) + [T - T_b(0)] \tau_\nu(s); \quad (7.3)$$

deze uitdrukking wordt veelvuldig toegepast in de radio-astronomie. Voor een optisch dikke homogene LTE laag geldt daarin eenvoudigweg $T_b = T$, of $T_A = \eta_A T$ met T_A de antenntemperatuur.

7.2.2 Straling in een dikke LTE laag: de Rosselandbenadering

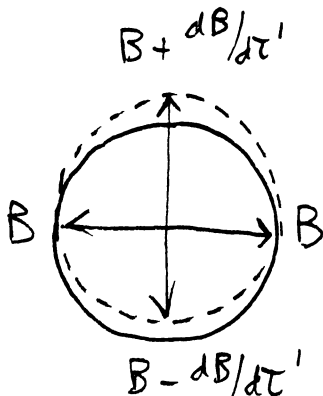
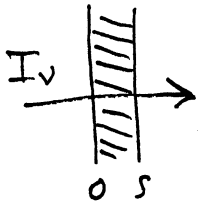
In TE geldt $S_\nu = B_\nu$ en $I_\nu = B_\nu$. Dit is een nulde benadering voor het inwendige van optisch zeer dikke voorwerpen zoals sterren, waarin de vrij weglengte van de fotonen klein is ten opzichte van schalen waarop de temperatuur en dichtheid veranderen: een kubieke centimeter sterinwendige is in goede benadering een TE doosje. Toch is deze nulde benadering onvoldoende want dan is er geen enkel energietransport door straling: de netto flux $\mathcal{F}_\nu = 0$ als $I_\nu = B_\nu$ in alle richtingen. In sterinwendigen is de netto flux weliswaar heel klein ten opzichte van de hoekgemiddelde intensiteit, maar het is die netto flux die ons interesseert: het gaat om wat er uit komt, zowel voor ons als waarnemer in de vorm van diagnostiek als voor de ster zelf in de vorm van structuur- en levensduurbepalend energielek. Dus moet de anisotropie van het stralingsveld, hoe gering ook, expliciet worden meegenomen.

De transportvergelijking is voor axiale symmetrie en met gebruik van radiële optische diepte:

$$I_\nu(z, \mu) = S_\nu + \mu \frac{dI_\nu}{d\tau'_\nu}.$$

Substitutie van de nulde benadering $I_\nu(z) \approx S_\nu(z) \approx B_\nu(z)$ levert

$$I_\nu(z, \mu) = B_\nu(z) + \mu \frac{dB_\nu(z)}{d\tau'_\nu},$$



waarin de intensiteit slechts in eerste orde van de Planckfunctie verschilt. Deze benadering is goed mits LTE geldt en de correctie $dB_\nu/d\tau'_\nu$ klein is ten opzichte van het isotrope deel B_ν . De flux wordt dan bepaald door het kleine anisotrope bestanddeel $\mu dB_\nu/d\tau'_\nu$:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu = B_\nu(z)$$

en

$$\mathcal{F}_\nu(z) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu I_\nu d\mu = \frac{4\pi}{3} \frac{dB_\nu(z)}{d\tau'_\nu}.$$

Deze monochromatische flux is in het niet-waarneembare sterinwendige echter niet interessant; wel de totale energiestroom:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z) &= \int_0^\infty \mathcal{F}_\nu(z) d\nu \\ &= -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dz} d\nu \\ &= -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dz} d\nu. \end{aligned}$$

Gebruik

$$\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu = \frac{dB}{dT} \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{dB}{dT} = \frac{4\sigma}{\pi} T^3$$

en de *Rosseland-gemiddelde extinctiecoëfficiënt* α_R , gedefinieerd als

$$1/\alpha_R \equiv \left(\int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \right) / \left(\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \right), \quad (7.4)$$

dan volgt:

$$\mathcal{F}(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\alpha_R} \frac{dT}{dz}. \quad (7.5)$$

Dit is de *Rosselandbenadering* voor de stralingsflux. Het is een diffusieachtige vergelijking met effectieve geleidingscoëfficiënt $16\sigma T^3/3\alpha_R$; deze benadering wordt dan ook vaak de *diffusiebenadering* genoemd. Hij toont dat in LTE een netto uitwaartse stralingsflux gepaard gaat met inwaarts toenemende temperatuur.

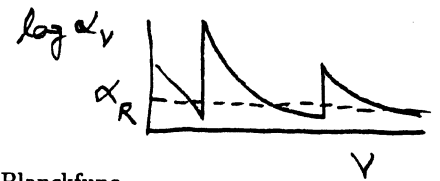
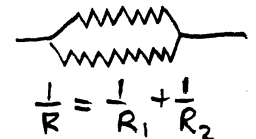
Het Rosselandgemiddelde α_R van de extinctiecoëfficiënt α_ν , gedraagt zich analoog aan een vervangende parallelweerstand: de frequentiebanden met de kleinste extinctie dragen het meeste bij — de stralingsflux “kiest” de meest doorzichtige spectrale vensters. De gewichtsfunctie

$$G_\nu(T) = \frac{dB_\nu/dT}{dB/dT} = \frac{\pi}{4\sigma T^3} \frac{dB_\nu}{dT}$$

in

$$1/\alpha_R \equiv \int_0^\infty (G_\nu/\alpha_\nu) d\nu$$

weegt deze keus van doorzichtige vensters met de temperatuurgevoeligheid van de Planckfunctie. G_ν lijkt op de Planckfunctie maar piekt bij $h\nu/kT \approx 3.8$ in plaats van 2.8, dus bij wat kortere golflengtes. Voorbeelden in Novotny, Fig. 3-12.

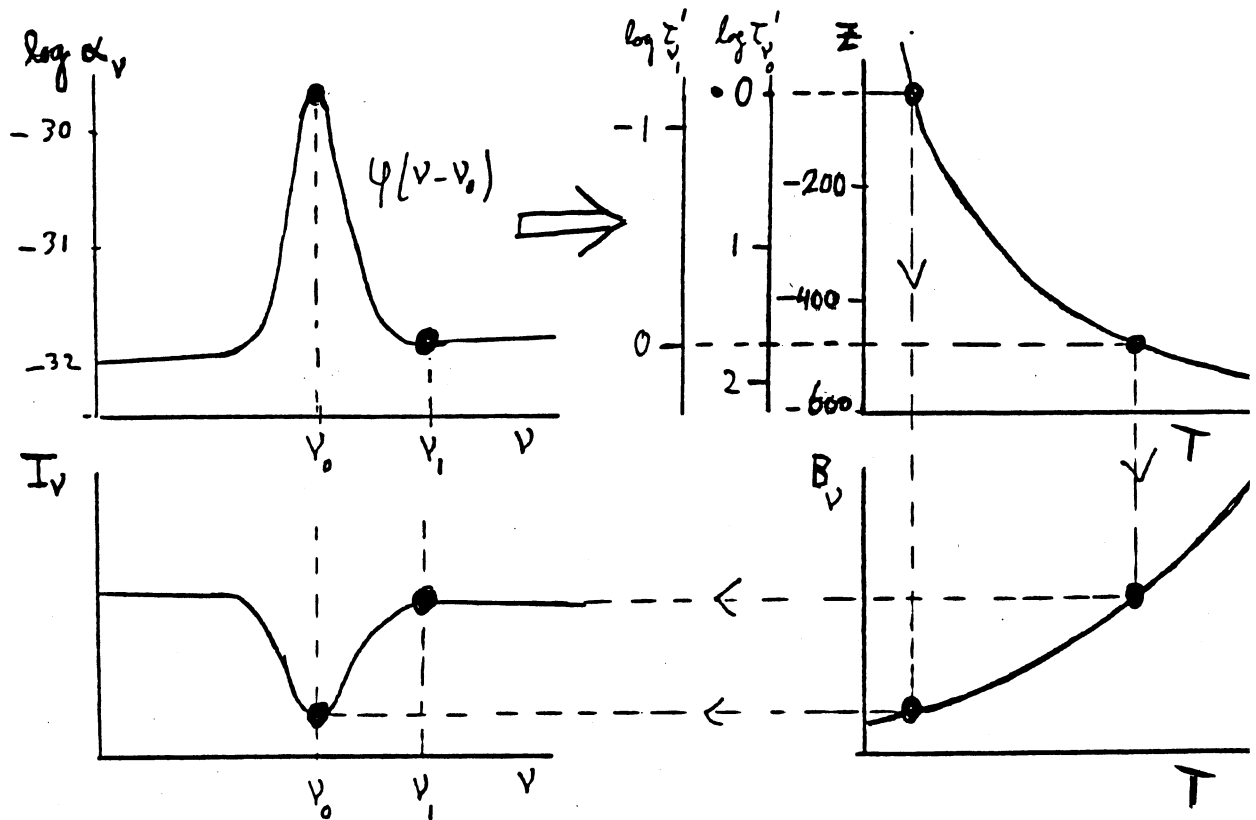


7.2.3 Straling uit een dikke LTE laag

Voor een optisch dikke laag in LTE geldt in Eddington-Barbier benadering:

$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu) \approx B_\nu [T(\tau'_\nu = \mu)].$$

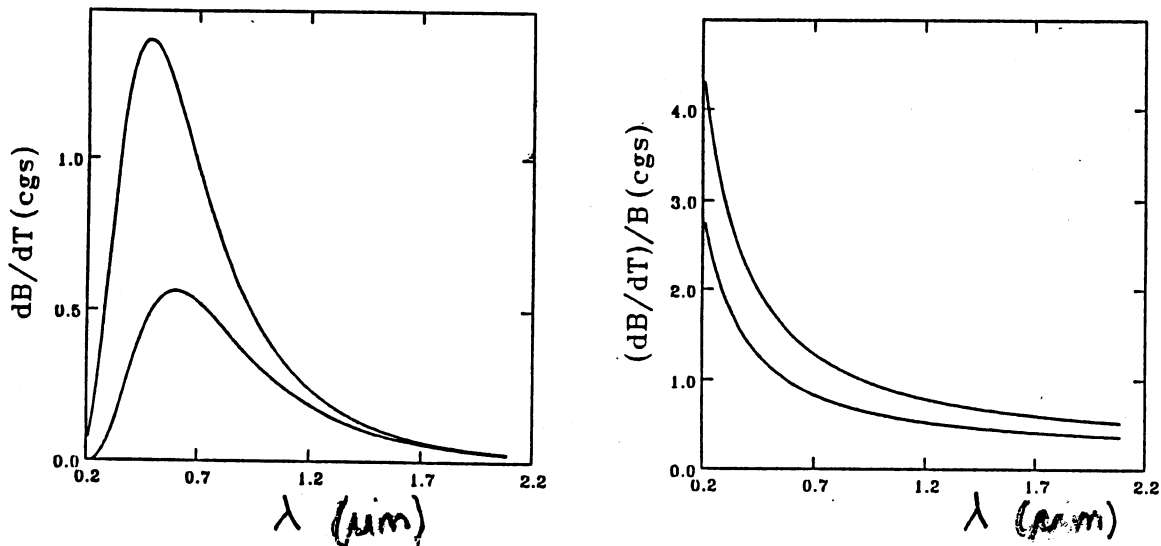
Figuur 7.1 toont een aanpassing van het vierluik in Figuur 3.3 voor LTE lijnvorming in zo'n laag. Het waargenomen lijnprofiel (linksonder) wordt bepaald door:



Figuur 7.1: Vierluik voor LTE lijnvorming in optisch dikke media. De plaatsafhankelijke extinctiecoëfficiënt (linksboven) bepaalt de optische diepte schaling (rechtsboven). Het verloop van de temperatuur met de monofrequente optische diepte bepaalt, gevouwen door de temperatuursafhankelijkheid van de Planckfunctie (rechtsonder), de uittredende intensiteit op elke frequentie (linksonder). Hoe groter de extinctie α_ν , hoe meer naar buiten ligt de Edington-Barbier representatieve vormingshoogte $\tau'_\nu(z) = 1$. Bij een naar buiten afvallende temperatuur resulteren absorptielijnen.

- het verloop van de extinctiecoëfficiënt $\alpha_\nu = \alpha_\nu^l + \alpha_\nu^c$ met de frequentie (linksboven getekend voor een specifieke locatie z). Een bb overgang kan vele ordes van grootte aan de continue extinctie toevoegen;
- het verloop van de extinctiecoëfficiënt met de plaats (niet getekend). Hier is axiale symmetrie (vlakke parallelle lagen) aangenomen, dus hier betreft dit het verloop van $\alpha_\nu(z)$ met de hoogte z . Aangezien de dichtheid in een optisch dikke gaswolk (die waarschijnlijk door de eigen massa gravitationeel gebonden is) ruwweg exponentieel naar buiten afvalt zal α_ν meestal steil met z afvallen;
- het verloop van de monochromatische optische diepte $\tau_\nu(z)$ met de geometrische diepte $-z$ (rechtsboven langs de y -as geschetst voor twee frequenties). Dit verloop volgt uit de twee hierboven en is sterk frequentie-afhankelijk. Bij exponentiële afval van de dichtheid geldt ruwweg $\log \tau_\nu \sim -z$, met vervormingen afhankelijk van $\alpha_\nu(z)$; de schalen voor verschillende frequenties verschillen en zijn ten opzichte van elkaar verschoven;
- het verloop van de temperatuur met z (rechtsboven);
- het verloop van de Planckfunctie met de temperatuur. De temperatuurgevoeligheid van de Planckfunctie varieert door het spectrum (Figuur 7.2); daarmee is ook deze kromme frequentie-afhankelijk. De helling dB/dT is altijd positief.

De lijn is in absorptie als de temperatuur naar buiten afvalt en in emissie als de temperatuur naar buiten toeneemt.



Figuur 7.2: De temperatuurgevoeligheid van de Planckfunctie B_λ , absoluut (links) en relatief (rechts), voor $T = 4000$ K en $T = 5000$ K.

- Vraag 7.5 Hoe zie je in Figuur 7.1 dat de Eddington-Barbier benadering is aangenomen? Is die aanname juist?
- Vraag 7.6 Geldt het vierluik in Figuur 7.1 ook voor de vorming van het continuum op sterk verschillende golflengtes?
- Vraag 7.7 Wat voor spectraallijnen krijg je in LTE uit een optisch dunne homogene laag? En uit een optisch dikke homogene laag? En uit een homogene laag die optisch dun is in het continuum en optisch dik in de spectraallijn?
- Vraag 7.8 Verklaar met de veronderstelling van LTE dat de Na D lijnen in het zonnespectrum absorptielijnen zijn.
- Vraag 7.9 Hoe verandert de intensiteit in het lijncentrum van de Na D lijnen van het midden naar de rand van de zon?
- Vraag 7.10 Voorbij de rand van de zon valt tijdens een totale zonsverduistering de *chromosfeer* waar te nemen. Dat is een dunne schil ijl gas. Tijdens een zonsverduistering kijk

je daar scherend doorheen; zelfs dan is de hele chromosfeer optisch dun langs de gezichtslijn in het zichtbare gedeelte van het spectrum. Verklaar dat de chromosfeer de gele Na D lijnen in emissie toont. Zegt dat wat over de temperatuur van de chromosfeer als LTE een goede veronderstelling is?

Vraag 7.11 In het spectrum van het centrum van de zonneshijf is de $H\alpha$ lijn een absorptielijn maar de $Ly\alpha$ lijn is in emissie. Valt dat met de aanname van LTE te verklaren?

7.3 Stralingstransport bij verstrooiing

De essentie van LTE is dat de bronfunctie *lokaal* wordt bepaald, dankzij voldoende lokale koppeling van deeltjesenergie en stralingsenergie. Als echter niet de botsingsprocessen maar de verstrooiingsprocessen domineren gaat deze lokale bepaaldheid verloren—de te verstrooien fotonen komen van elders. Verstrooiing draagt bij zowel aan j_ν als aan α_ν , dus tezamen aan S_ν .

De vrije weglengte van een foton tussen twee opeenvolgende extinctieprocessen is volgens vergelijking (3.10):

$$l_\nu = 1/\alpha_\nu$$

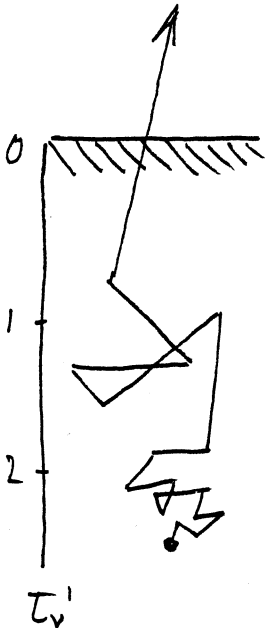
maar als de meeste extinctieprocessen elastische verstrooiingsprocessen zijn blijft de *identiteit* van het quantum stralingsenergie tussen opeenvolgende verstrooiingen behouden: het foton verandert per verstrooiing wel van richting maar niet van energie. De afstand tussen creatie en destructie of tussen creatie en ontsnappen van een foton kan dus effectief veel groter zijn dan l_ν .

Bijvoorbeeld in een steratmosfeer. De uitredende fotonen komen ruwweg uit de laag met optische dikte $\tau_\nu = 1$ tot aan het oppervlak, gemeten langs de gezichtslijn, dat is tot op radiële optische diepte $\tau'_\nu = \mu$. Maar deze ontsnappingsdiepte is slechts de plaats waar de fotonen hun laatste interactie ondergingen, dus waar ze voor het laatst werden verstrooid. Hun *creatiediepte* kan veel groter zijn. Vandaar zijn ze per "random walk" in verstrooiingsstappen naar buiten gediffundeerd.

Het maakt hierbij niet uit over wat voor soort fotonverstrooiing het gaat. Hieronder wordt steeds over *bb* verstrooiing gesproken omdat de creatie en destructiekansen dan handig in de Einsteine overgangswaarschijnlijkheden zijn uit te drukken, maar de behandeling geldt voor elke elastische verstrooiing: Thomson, Rayleigh, *etc.* Bij *bb* resonantieverstrooiing wordt het lijnfoton ook elastisch verstrooid, met behoud van energie. Dat kan exact het geval zijn (*coherente* verstrooiing) of er kan een herverdeling plaats vinden over de breedte van het lijnprofiel (*frequentieredistributie*). Bij spontane deëxcitatie wordt de nieuwe richting dan willekeurig gekozen (*complete hoekredistributie*) terwijl bij geïnduceerde deëxcitatie de richting van het inducerende foton wordt genomen.

Vraag 7.12 Waarom worden de stappen per verstrooiing groter naar buiten toe?

Vraag 7.13 Volgens de Eddington-Barbier benadering tonen de ontsnapte fotonen de bronfunctie van de diepte $\tau'_\nu = \mu$. Geldt dat ook bij verstrooiing?



7.3.1 Pure verstrooiing

Beschouw een homogene laag gas waarin in een *bb* overgang alleen maar verstrooid wordt. Er is geen fotonconversie, geen fotonabsorptie en geen thermische emissie, dus er is geen fotoncreatie of fotondestructie. Neem aan dat de verstrooiing isotroop is en elastisch (= "coherent" = monochromatisch: $\nu' = \nu$). In elk extinctieproces veranderen de fotonen dan alleen maar van richting. In plaats van de lijnextinctiecoëfficiënt α_ν^l gebruiken we een verstrooiingscoëfficiënt α_ν^s die de verstrooiingsdoorsnede in cm^2 per cm^3 geeft, gedefinieerd door

$$dI_\nu = -\alpha_\nu^s I_\nu ds.$$

Wat is de emissiecoëfficiënt j'_ν ? Ieder "nieuw" foton is een verstrooid "oud" foton uit het bestaande stralingsveld. Dus moet gelden dat de totale emissie per cm^3 in alle richtingen

gelijk is aan de totale extinctie per cm^3 uit alle bundels:

$$\int j_{\nu}^s d\Omega = \int \alpha_{\nu}^s I_{\nu} d\Omega.$$

Het hoekgemiddelde stralingsveld is $J_{\nu} = (1/4\pi) \int I_{\nu} d\Omega$, dus wordt de emissiecoëfficiënt gegeven door

$$j_{\nu}^s = \alpha_{\nu}^s J_{\nu}$$

en de lijnbronfunctie door

$$S_{\nu}^l = j_{\nu}^s / \alpha_{\nu}^s = J_{\nu}.$$

De stralingstransportvergelijking wordt daarmee:

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = \alpha_{\nu}^s [J_{\nu} - I_{\nu}]$$

De gemiddelde intensiteit J_{ν} moet dus bekend zijn om I_{ν} te bepalen, dus moeten we I_{ν} in alle richtingen kennen om J_{ν} voor een specifieke bundel uit te rekenen. Hier stopt de analytische analyse; voor preciese evaluatie is iteratieve numerieke berekening nodig.

In deze paragrafen over verstrooiing moeten we ons derhalve beperken tot benaderingen. We beginnen met een afchatting van het stralingstransport bij pure verstrooiing, met "random walk" argumenten losgelaten op individuele fotonen. De vrije weglengte van een foton tussen twee opeenvolgende verstrooiingen wordt gegeven door (vergelijking 3.10):

$$l_{\nu} = \frac{\langle \tau_{\nu} \rangle}{\alpha_{\nu}^s} = \frac{1}{\alpha_{\nu}^s}.$$

Wat is de totale door een quantum afgelegde weg l^* na N verstrooiingen? Een beschrijving als een 1-dimensionaal diffusieproces levert (Rybicki en Lightman §1.7):

$$l_{\nu}^* \approx \sqrt{N} l_{\nu}. \quad (7.6)$$

In hoeveel verstrooiingsstappen komt een foton door een laag met dikte D ? Daar zijn ruwweg zoveel stappen voor nodig dat de uiteindelijk afgelegde weg l_{ν}^* gelijk is aan D , dus $N \approx (l_{\nu}^*)^2 / l_{\nu}^2 \approx D^2 / l_{\nu}^2$. Met $l_{\nu} = 1/\alpha_{\nu}^s$ en $\tau_{\nu} = \alpha_{\nu}^s D$ volgt $N \approx \tau_{\nu}^2$ mits de laag voldoende dik is ($\tau_{\nu} \gg 1$) dat de diffusiebeschrijving geldt.

Bij een dunne laag met $\tau_{\nu} \ll 1$ vliegt het foton er meestentijds meteen uit — met een kleine kans om tegen te worden gehouden, ruwweg gelijk aan $\tau_{\nu} = \alpha_{\nu}^s D \ll 1$.

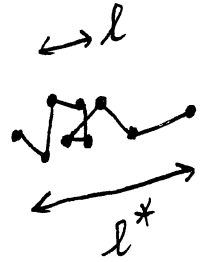
7.3.2 Absorptie en verstrooiing voor een twee-niveau atoom

Beschouw nu een medium dat voor het gemak slechts bestaat uit *twee-niveau atomen*: deeltjes met alleen maar een lower level l en een upper level u . Daartussen zijn slechts discrete overgangen mogelijk, namelijk de vijf processen van Figuur 1.5 die behandeld zijn in Hoofdstuk 5. We nemen ook aan dat het bovenniveau u scherp is, niettegenstaande Heisenberg's onzekerheidsrelatie, zodat de overgang strikt monochromatisch is, met frequentie $\nu = \nu_0$. In alle vergelijkingen van Hoofdstuk 5 waarin de frequentiegemiddelde hoekgemiddelde intensiteit \bar{J}_{ν_0} staat komt daar dan de monochromatische hoekgemiddelde intensiteit J_{ν_0} voor in de plaats.

De vijf processen kunnen volgens Figuur 1.6 worden gecombineerd in de procesparen *fotoncreatie*, *fotondestructie* en *fotonverstrooiing*.

Het vierde paar, botsingsexcitatie gevolgd door botsingsdeëxcitatie, bevat geen interactie met fotonen en is hier niet van belang, afgezien van het feit dat het de (ook hier aangenomen) Maxwellverdeling helpt onderhouden.

Deze veronderstellingen leveren een medium met strikt elastische verstrooiing, zonder enige fotonconversie. Er is geen stralingsexcitatie die wordt gevolgd door excitatie of deëxcitatie naar



een ander niveau of continuum, noch per foton noch per botsing. Elk lijnfoton dat middels een creatiepaar (botsingsexcitatie gevolgd door stralingsdeëxcitatie) is gecreëerd blijft al monochromatisch verstrooid wordend rondstappen totdat het door een destructiepaar (stralingsexcitatie gevolgd door botsingsdeëxcitatie) wordt vernietigd — ofwel het medium verlaat.

Dit is een handige benadering ter illustratie van stralingstransport bij verstrooiing zonder ons te hoeven bekommeren om koppeling aan andere delen van het spectrum en aan andere delen van het medium via allerlei andere overgangen van en naar de twee niveau's. We krijgen zo een goede beschrijving van de *niet-lokale aard* van stralingstransport, met voorbijgaan aan de *niet-monochromatische aard*.

Elke stralingsexcitatie van een twee-niveau atoom wordt gevolgd hetzij door stralingsdeëxcitatie (verstrooiing), hetzij door botsingsdeëxcitatie (destructie). De totale extinctie (alle stralingsexcitaties) is de som van deze procesparen; daarom splitsen we de bb extinctiecoëfficiënt $\alpha_{\nu_0}^l$ in twee delen: een absorptiedeel $\alpha_{\nu_0}^a$ dat fotonvernietiging beschrijft en een strooiingsdeel $\alpha_{\nu_0}^s$ dat elastische verstrooiing beschrijft. De totale overgangswaarschijnlijkheid voor deëxcitatie per aangeslagen deeltje per seconde is (vergelijkingen 5.1–5.6):

$$R_{ul}^{\text{tot}} = (A_{ul} + B_{ul}J_{\nu_0} + C_{ul}) n_u \quad \text{Creatie en}$$

De eerste twee termen van het rechterlid vormen samen de fractie *verstrooiing*, de derde term de fractie *destructie = absorptie*. Dit zijn de fracties per aangeslagen deeltje, dus ook per stralingsexcitatie. De twee deelextinctiecoëfficiënten zijn daarmee:

$$\alpha_{\nu_0}^a = \alpha_{\nu_0}^l \frac{C_{ul}}{A_{ul} + B_{ul}J_{\nu_0} + C_{ul}} \quad (7.7) \quad \checkmark$$

$$\alpha_{\nu_0}^s = \alpha_{\nu_0}^l \frac{A_{ul} + B_{ul}J_{\nu_0}}{A_{ul} + B_{ul}J_{\nu_0} + C_{ul}} \quad (7.8) \quad \checkmark$$

met

$$\alpha_{\nu_0}^a + \alpha_{\nu_0}^s = \alpha_{\nu_0}^l.$$

Deze splitsing van de extinctiecoëfficiënt maakt dus onderscheid in wat er *na* de extinctie van een foton met het opgenomen quantum gebeurt.

Wat zijn de bijbehorende emissiecoëfficiënten? Bij thermische vernietiging hoort thermische creatie; de bronfunctie die hoort bij de botsingsprocessen is de Planckfunctie. Dus volgt voor het eerste deel:

$$j_{\nu_0}^a = \alpha_{\nu_0}^a B_{\nu_0}.$$

De verstrooiing is monochromatisch en isotroop, dus de emissiecoëfficiënt van het tweede deel, *i.e.* de ten gevolge van verstrooiing per cm^3 per seconde per Hz en per steradiaal uitgestraalde energie is weer gelijk aan de gemiddeld per cm^3 per seconde per Hz en per steradiaal ten gevolge van verstrooiing geëxtingeerde energie:

$$j_{\nu_0}^s = \alpha_{\nu_0}^s J_{\nu_0}.$$

De samengestelde bb bronfunctie $S_{\nu_0}^l$ is

$$S_{\nu_0}^l \equiv \frac{\sum j_{\nu_0}}{\sum \alpha_{\nu_0}} = \frac{\alpha_{\nu_0}^a B_{\nu_0} + \alpha_{\nu_0}^s J_{\nu_0}}{\alpha_{\nu_0}^a + \alpha_{\nu_0}^s},$$

en de transportvergelijking wordt:

$$dI_{\nu_0} = -\alpha_{\nu_0}^a I_{\nu_0} ds - \alpha_{\nu_0}^s I_{\nu_0} ds + \alpha_{\nu_0}^a B_{\nu_0} ds + \alpha_{\nu_0}^s J_{\nu_0} ds,$$

waarin de eerste twee termen van het rechterlid het absorptiedeel en het verstrooiingsdeel van de extinctie zijn, de derde en vierde term het *thermische deel* en het verstrooiingsdeel van de emissie, langs de bundel. Met *Creatie*

$$d\tau_{\nu_0} \equiv \alpha_{\nu_0} ds = (\alpha_{\nu_0}^a + \alpha_{\nu_0}^s) ds$$

* In de noemer staat $B_{ul} B_{\nu_0}$ ipv B_{ul} if om dat alleen het thermische deel van de verstrooiing meetdret. Dit wordt nader uitgelegd in college AFy 2b.

en de samengestelde bronfunctie hervinden we de standaardvorm:

$$\frac{dI_{\nu_0}}{d\tau_{\nu_0}} = \frac{dI_{\nu_0}}{(\alpha_{\nu_0}^a + \alpha_{\nu_0}^s) ds} = S_{\nu_0}^l - I_{\nu_0}.$$

We voeren nu de kans ϵ_{ν_0} in dat een foton in zijn volgende extinctieproces wordt vernietigd:

$$\epsilon_{\nu_0} \equiv \frac{\alpha_{\nu_0}^a}{\alpha_{\nu_0}^a + \alpha_{\nu_0}^s} = \text{destructiekans per extinctie.} \quad (7.9)$$

De kans dat het in zijn eerstvolgend extinctieproces wordt verstrooid is dan:

$$1 - \epsilon_{\nu_0} = \frac{\alpha_{\nu_0}^s}{\alpha_{\nu_0}^a + \alpha_{\nu_0}^s} = \text{verstrooiingskans per extinctie.}$$

In Einsteincoëfficiënten uitgedrukt is ϵ_{ν_0} :

$$\epsilon_{\nu_0} = \frac{C_{ul}}{A_{ul} + B_{ul} \mathcal{B}_0 + C_{ul}}. \quad (7.10)$$

Deze belangrijke parameter meet de fractie absorptie per extinctie, dus de mate van koppeling aan de lokale temperatuur. De twee-niveau lijnbronfunctie wordt daarmee:

$$S_{\nu_0}^l = (1 - \epsilon_{\nu_0}) J_{\nu_0} + \epsilon_{\nu_0} B_{\nu_0}. \quad (7.11)$$

Dit is een belangrijk resultaat. De bronfunctie is gelijk aan de Planckfunctie als $\epsilon_{\nu_0} \approx 1$; daarentegen wordt de bronfunctie gedomineerd door het hoekgemiddelde stralingsveld J_{ν_0} als $\epsilon_{\nu_0} \ll 1$. In tussenliggende gevallen is de bronfunctie een met ϵ_{ν_0} gewogen gemiddelde van J_{ν_0} en B_{ν_0} . Wanneer geldt $S_{\nu_0}^l = B_{\nu_0}$? Als $\epsilon_{\nu_0} \approx 1$ of als $J_{\nu_0} \approx B_{\nu_0}$, of als aan beide condities tegelijk is voldaan.

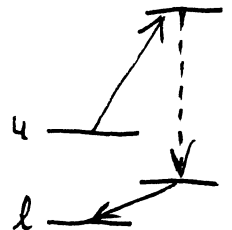
De term J_{ν_0} is de *reservoirterm*: de hoeveelheid beschikbare fotonen. De term $\epsilon_{\nu_0} J_{\nu_0}$ is de *verliesterm* ("photon sink"); deze specificeert de energie van de fotonen die per extinctie door vernietiging uit het reservoir verdwijnen. De term $\epsilon_{\nu_0} B_{\nu_0}$ is de *bronterm* ("photon source"); dit is de energie van de per extinctie nieuw gecreëerde fotonen. Deze bronterm kan niet verwaarloosd worden omdat er anders geen fotonen worden gecreëerd om te verstrooien, tenzij er een groot opgelegd stralingsveld is. Dat betekent dat ook wanneer ϵ_{ν_0} heel klein is, de fotonbron meestal $\epsilon_{\nu_0} B_{\nu_0}$ precies moet worden geëvalueerd: die bouwt het stralingsveld J_{ν_0} op waar de bronfunctie dan grotendeels door wordt bepaald. Deze *inhomogene term* maakt numerieke oplossing van de transportvergelijking moeilijk voor het geval $\epsilon_{\nu_0} \ll 1$.

Het bovenstaande is voor de eenvoud gegeven voor een twee-niveau atoom met monochromatische verstrooiing, maar de resulterende bronfuncties zijn illustratief voor elk extinctieproces. De bronfunctie is altijd een gewogen gemiddelde over de verschillende deelprocessen. De lijnbronfunctie van een bb overgang in een meer-niveau atoom kan bijvoorbeeld geschreven worden als:

$$S_{\nu_0}^l = (1 - \epsilon_{\nu_0} - \eta_{\nu_0}) J_{\nu_0} + \epsilon_{\nu_0} B_{\nu_0}(T_e) + \eta_{\nu_0} B_{\nu_0}(T^*),$$

waarin T_e de kinetische temperatuur (electronentemperatuur) is en T^* een soort gemiddelde procestemperatuur waarvoor de Planckfunctie de bronfunctie levert van alle andere processen dan directe deëxcitatie waarmee een atoom uiteindelijk van het bovenniveau in het onderniveau terecht kan komen. $B_{\nu_0}(T^*)$ is dan de gezamenlijke bronfunctie van alle omwegen van u naar l ; de parameter η_{ν_0} meet de kans op zo'n omweg per $l \rightarrow u$ extinctie.

Vraag 7.14 Leidt uit de statistisch evenwichtsvergelijkingen af dat de lijnbronfunctie in een twee-niveau atoom in het geval van complete redistributie over het lijnprofiel en pure verstrooiing (geen botsingen) gegeven wordt door $S_{\nu_0}^l = \bar{J}_{\nu_0}$. Laat ook zien dat $S_{\nu_0}^l = B_{\nu_0}$ als de bezettingen van de twee niveaus volledig door botsingen worden bepaald.



Vraag 7.15 Hier is ϵ_{ν_0} gedefinieerd als destructiekans per extinctieproces. Anderen gebruiken $\epsilon'_{\nu_0} = \alpha_{\nu_0}^a / \alpha_{\nu_0}^s$, i.e. de destructiekans per verstrooiing. Druk ϵ'_{ν_0} uit in ϵ_{ν_0} en in Einsteincoëfficiënten. Hoe wordt vergelijking (7.11) bij gebruik van ϵ'_{ν_0} ?

Vraag 7.16 Onder welke voorwaarde kan ϵ_{ν_0} vereenvoudigd worden tot

$$\epsilon_{\nu_0} = \frac{C_{ul}}{C_{ul} + A_{ul}/(1 - e^{-h\nu_0/kT})}?$$

Wat levert deze benadering voor ϵ'_{ν_0} ? Deze benadering wordt vaak gemaakt; hij is doorgaans geldig. Waarom?

Vraag 7.17 Leidt vergelijking (7.11) *ab initio* af uit de vergelijkingen van Hoofdstuk 5.

Vraag 7.18 Laat zien dat voor een twee-niveau atoom met de profiefuncties ψ , φ en χ van Hoofdstuk 5 (dus met verbreed bovenniveau) in het geval van complete redistributie geldt:

$$S_{\nu_0}^l = (1 - \epsilon_{\nu_0})\bar{J}_{\nu_0} + \epsilon_{\nu_0}B_{\nu_0}.$$

Hoe moet ϵ_{ν_0} hiervoor gedefinieerd worden?

Ga na dat in dit geval de lijnbronfunctie niet met de frequentie door het lijnprofiel varieert terwijl dat met de "coherente" lijnbronfunctie in vergelijking (7.11) wel het geval is. Is er verschil tussen deze twee gevallen voor de uitredende intensiteit?

7.3.3 Effectieve dikte

Neem weer een homogeen medium met random wandelende fotonen. De vrije weglengte van een foton tussen twee opeenvolgende extinctieprocessen is (vergelijking 3.10):

$$l_\nu = \frac{\langle \tau_\nu \rangle}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s}, \quad (7.12)$$

maar het is interessanter te weten over wat voor afstand een foton zijn *identiteit* behoudt, i.e. wat de afgelegde weglengte is tussen zijn creatie en destructie. De vernietigingskans per stap is ϵ_ν , dus het gemiddelde aantal stappen dat een foton al verstrooiend kan maken is:

$$N = 1/\epsilon_\nu$$

en met vergelijking (7.6) volgt:

$$l_\nu^* \approx l_\nu / \sqrt{\epsilon_\nu} \quad (7.13)$$

met l_ν^* de karakteristieke afstand tussen creatie en destructie, ofwel de *identiteitsbehoudsweglengte*, ofwel de *diffusielengte*, ofwel de *thermalisatielengte*, ofwel de *effectieve vrije weglengte* van een foton.

Voor $\epsilon_\nu = 1$ ($\alpha_\nu^s = 0$, géén verstrooiing) geldt: $l_\nu^* = l_\nu$.

Voor $\epsilon_\nu \ll 1$ ($\alpha_\nu^s \gg \alpha_\nu^a$, véél verstrooiing) geldt: $l_\nu^* \gg l_\nu$.

Voor $\epsilon_\nu = 0$ ($\alpha_\nu^a = 0$, alléén verstrooiing) geldt: $l_\nu^* = \infty$.

Met vergelijkingen (7.12) en (7.9) volgt:

$$l_\nu^* \approx 1/\sqrt{\alpha_\nu^a(\alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s)} \quad (7.14)$$

en we definiëren, in vervolg op vergelijkingen (3.7) en (3.10), de:

- optische ~~dikte~~ τ_ν door $d\tau_\nu = (\alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s) ds$;
- absorptie~~dikte~~ τ_ν^a door $d\tau_\nu^a = \alpha_\nu^a ds$;
- strooiings~~dikte~~ τ_ν^s door $d\tau_\nu^s = \alpha_\nu^s ds$;
- en tenslotte de *effectieve optische weglengte* $d\tau_\nu^*$ als $d\tau_\nu^* = \sqrt{\alpha_\nu^a(\alpha_\nu^a + \alpha_\nu^s)} ds$.

Voor een homogene laag ter dikte D is de *effectieve optische dikte* τ_ν^* :

$$\tau_\nu^* = D/l_\nu^* \approx \sqrt{\tau_\nu^a(\tau_\nu^a + \tau_\nu^s)}, \quad (7.15)$$

met $\tau_\nu^* < \tau_\nu$ omdat

$$\tau_\nu^*/\tau_\nu = \sqrt{\tau_\nu^a/(\tau_\nu^a + \tau_\nu^s)}.$$

De laag is *effectief dun* als $\tau_\nu^* < 1$ en *effectief dik* als $\tau_\nu^* > 1$.

weglengte

7.3.4 Verstrooide straling uit een dunne laag

We bekijken nu straling uit lagen die homogeen zijn in de toestandsparameters maar waarin verstrooiing optreedt. De homogeniteit verschilt daarmee van die besproken in Hoofdstuk 3 waar de bronfunctie niet door het medium varieerde. Hier nemen we aan dat temperatuur, dichtheid en extinctiecoëfficiënt niet van de plaats afhangen, maar dat de bronfunctie door verstrooiing kan variëren.

Dit is geen consequente veronderstelling: als de bronfunctie ten gevolge van verstrooiing varieert doen de populatieverhoudingen dat ook, en daarmee ook de populaties zelf en de extinctiecoëfficiënten. Bij een twee-niveau atoom bijvoorbeeld gaat overexcitatie van het aangeslagen niveau gepaard met onderbezetting van het grondniveau, dus een toename van de bronfunctie gaat gepaard met een afname van de extinctiecoëfficiënt. Wegens de Boltzmannfactor is de afname voor het onderniveau echter meestal een kleinere fractie van de bezetting dan voor het bovenniveau; in eerste benadering verandert de bronfunctie wel en de extinctiecoëfficiënt niet.

Eerst een ~~optisch~~ dunne laag. De totale monochromatische lichtkracht van een effectief dun object is:

$$L_\nu \approx 4\pi\alpha_\nu^a B_\nu V \quad (7.16)$$

met V het volume van het object. De term $\alpha_\nu^a B_\nu$ beschrijft alle uit thermische energie gecreëerde fotonen die bijdragen aan een gegeven bundel; vermenigvuldiging met $4\pi V$ geeft het totale aantal uit het object ontsnappende fotonen onder de aanname dat alle ooit gecreëerde fotonen het object verlaten, hoe vaak ze ook worden verstrooid. De richting gaat daarbij verloren, vandaar dat hier een uitdrukking voor de lichtkracht staat.

Vraag 7.19 Wat is de lichtkracht van een homogene effectief dunne bol met absorptiecoëfficiënt α_ν^a en strooiingscoëfficiënt α_ν^s ?

Vraag 7.20 Kan een object tegelijk effectief dun en optisch dik zijn? Geldt vergelijking (7.16) dan wel?

7.3.5 Verstrooide straling in een ^{inhomogene} dikke laag: de Eddingtonbenadering

De Rosseland benadering van §7.2.2 vereist dat de intensiteit slechts in eerste benadering van de Planckfunctie verschilt. Een ruimer geldende benadering is aan te nemen dat I_ν wederom slechts in eerste orde afwijkt van isotropie, maar wel niet-thermisch mag zijn. De toevoeging van fotonen aan een bundel geschiedt isotroop zowel voor thermische creatie van nieuwe fotonen als voor verstrooiing van reeds bestaande fotonen (mits spontane deëxcitatie overheerst over geïnduceerde deëxcitatie); daarom zal deze benadering ook nog kunnen gelden als verstrooiing belangrijk is ($\epsilon_\nu \ll 1$) en een ruimer toepassingsgebied hebben dan de Rosselandbenadering. We veronderstellen weer axiale symmetrie en stellen:

$$I_\nu(z, \mu) \equiv a_\nu(z) + b_\nu(z)\mu, \quad \uparrow \text{ (maar geen homogeniteit)}$$

dan zijn de eerste drie "momenten" van de intensiteit I_ν jegens μ :

$$J_\nu(z) \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu(z, \mu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu = a \quad (7.17)$$

$$H_\nu(z) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \cos\theta I_\nu(z, \mu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu I_\nu d\mu = b/3 \quad (7.18)$$

$$K_\nu(z) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \cos^2\theta I_\nu(z, \mu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^2 I_\nu d\mu = a/3. \quad (7.19)$$

De dimensies van de Eddington-flux H_ν en de K -integraal K_ν zijn [$\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ ster}^{-1}$], net zoals voor I_ν en J_ν . J_ν en K_ν zijn altijd positief; H_ν kan ook negatief zijn.

Hieruit volgt de belangrijke Eddingtonbenadering

$$J_\nu = 3K_\nu. \quad (7.20)$$

Uit de transportvergelijking (voor radiële optische diepte τ'_ν en axiale symmetrie, cf. vraag 3.24) volgt door over μ te integreren:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI_\nu}{d\tau'_\nu} &= I_\nu - S_\nu \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu \frac{dI_\nu}{d\tau'_\nu} d\mu &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu d\mu - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} S_\nu d\mu \\ \frac{dH_\nu}{d\tau'_\nu} &= J_\nu - S_\nu \end{aligned}$$

(van de transportvergelijking)

met S_ν isotroop genomen, hetgeen doorgaans het geval is. Vermenigvuldiging met μ en een tweede integratie over μ levert

$$\frac{dK_\nu}{d\tau'_\nu} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu S_\nu d\mu = H_\nu$$

met de Eddingtonbenadering

en derhalve:

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{d\tau'^2_\nu} = J_\nu - S_\nu. \tag{7.21}$$

Voor elastische verstrooiing geldt $S_\nu = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu$ en daarmee

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{d\tau'^2_\nu} = \epsilon_\nu (J_\nu - B_\nu). \tag{7.22}$$

Dit is de stralingstransportvergelijking in de Eddingtonbenadering bij elastische verstrooiing. Mits er randvoorwaarden bekend zijn levert deze uit $T(z)$ en $\epsilon_\nu(z)$ eerst $J_\nu(z)$, vervolgens $S_\nu(z)$ en tenslotte met de transportvergelijking $I_\nu(z)$. Deze veel gebruikte benadering geldt dus als het stralingsveld niet al te anisotroop is, i.e. binnen in lagen die tenminste effectief dik zijn.

die homogeen is in de bestandsparameters (T, N_e, \dots)

7.3.6 Verstrooide straling uit een dikke laag

Nu een effectief dikke laag met $\tau_\nu^* \gg 1$. Fotonen die dieper dan l_ν^* van het oppervlak ontstaan ontsnappen niet maar worden na $N = 1/\epsilon_\nu$ random-walk stappen vernietigd. Fotonen die worden gecreëerd op minder dan l_ν^* van het oppervlak kunnen wel ontsnappen. Stel dat deze allemaal ontsnappen, dan leveren ze een bovenschatting voor de uittredende lichtkracht. Het volume waaruit ze ontsnappen wordt gegeven door:

$$V = Al_\nu^*$$

met A een stukje oppervlak. Dus volgt met vergelijking (7.16)

$$L_\nu \approx 4\pi\alpha_\nu^3 Al_\nu^* B_\nu$$

en met vergelijkingen (7.14) en (7.9)

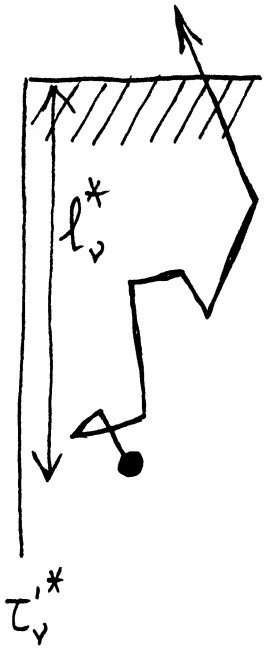
$$L_\nu \approx 4\pi\sqrt{\epsilon_\nu} B_\nu A,$$

en tenslotte

$$\mathcal{F}_\nu^+ = L_\nu/A \approx 4\pi\sqrt{\epsilon_\nu} B_\nu.$$

Dit is wat te groot. Immers, voor $\epsilon_\nu = 1$ is $S_\nu = B_\nu$; de oppervlakteflux van een zwart lichaam is $\mathcal{F}_\nu^+ = \pi B_\nu$ in plaats van $4\pi B_\nu$. Een betere benadering volgt uit de Eddingtonbenadering (zie opgave 1.10 van Rybicki en Lightman) met de effectieve optische dikte gedefinieerd door $\tau_\nu^* \equiv \sqrt{3}\epsilon\tau_\nu = \sqrt{3}\tau_\nu^a(\tau_\nu^a + \tau_\nu^s)$ en de effectieve optische diepte door $\tau'_\nu = \sqrt{3}\epsilon_\nu\tau'_\nu$, dus $\sqrt{3}$ groter dan in vergelijking (7.15). Voor de uittredende flux levert deze benadering

$$\mathcal{F}_\nu^+ \approx \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{\epsilon_\nu}}{1 + \sqrt{\epsilon_\nu}} B_\nu$$



en voor de bronfunctie

$$S_\nu(\tau') = B_\nu \left[1 - (1 - \sqrt{\epsilon_\nu}) e^{-\tau'_\nu} \right].$$

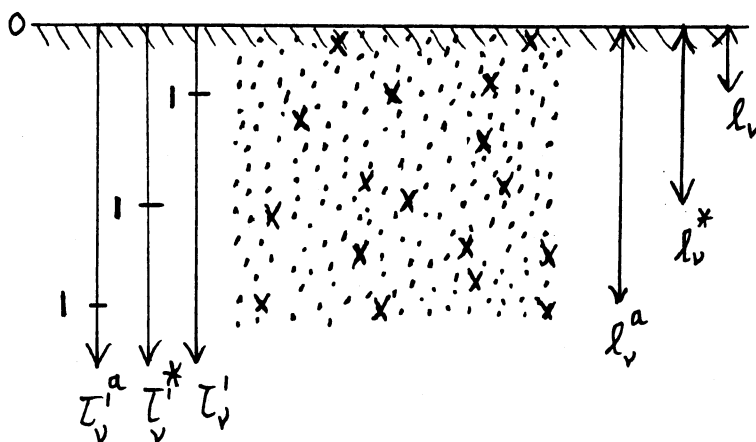
De bronfunctie aan het oppervlak is slechts

$$S_\nu(\tau'_\nu = 0) = \sqrt{\epsilon_\nu} B_\nu \quad (7.23)$$

en bij veel verstrooiing ($\epsilon_\nu \ll 1$) is de uittredende intensiteit nauwelijks groter:

$$I_\nu(\tau'_\nu = 0) \approx S_\nu(\tau'_\nu = 1) \approx (1 + \sqrt{3}) \sqrt{\epsilon_\nu} B_\nu.$$

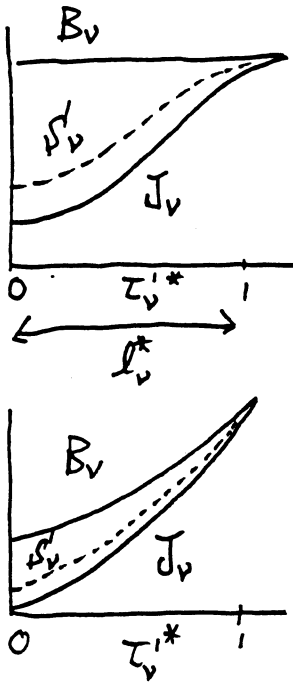
Bij véél verstrooiing ($\epsilon_\nu \ll 1$) komt er dus veel *minder* straling dan B_ν uit de laag — ondanks het feit dat de uittredende fotonen feitelijk van dieper komen dan van waar je ze ziet komen. Bij verstrooiing ontvang je fotonen uit diepere lagen dan de diepte $\tau'_\nu = 1$, maar je krijgt er minder dan je zou krijgen uit een zwart lichaam. Dat komt omdat bij veel additionele verstrooiing het stralende volume kleiner wordt en de representatieve diepte $\tau'_\nu = 1$ veel dichter bij het oppervlak ligt.



Figuur 7.3: Schematische verklaring van de geringe intensiteit uit een effectief dikke laag bij veel elastische verstrooiing. De radiële optische diepte $\tau'_\nu = 1$ waarop de bronfunctie representatief is voor de uittredende intensiteit ligt op slechts één gemiddelde staplengte van het oppervlak; dat is veel dichter bij het oppervlak dan de weglengte die een foton kan afleggen als er geen verstrooiing zou zijn ($\tau_\nu^a = 1$). De effectieve weglengte die een foton na creatie al stappend kan afleggen ligt tussen deze beide in; deze bepaalt de effectieve ontsnappingsdiepte $\tau_\nu^* = 1$ waarop de lokale Planckfunctie representatief is voor de intensiteit van de uittredende straling.

Beschouw Figuur 7.3. De kruisjes zijn fotoncreërende atomen. Doe er een heleboel verstrooiende atomen (stippen) bij: $q \gg 1$ maal zoveel, dus $\alpha^s = q\alpha^a$ en $\epsilon_\nu = 1/(1+q) \approx 1/q$. Dan is de grootte van het volume waarin uittredende fotonen worden geproduceerd in het geval zonder verstrooiing (geen stippen) evenredig met de vrije absorptieweglengte l_ν^a , ofwel de creatie van uittredende fotonen vindt plaats binnen de absorptiedikte $\tau_\nu^a = 1$ vanaf het oppervlak. Met verstrooiing erbij (stippen extra) is de productie van uittredende fotonen evenredig met $l_\nu^* = l_\nu^a/\sqrt{q}$, ofwel de productie van uittredende fotonen vindt nu plaats slechts binnen de effectieve optische dikte $\tau_\nu^* = 1$ vanaf het oppervlak. De plaats met extinctiediepte $\tau_\nu^* = 1$ ligt nog dichter bij het oppervlak.

Er doen dan dus nog maar $1/\sqrt{q} = \sqrt{\epsilon_\nu}$ fotoncreaties mee. De rest van de aangemaakte fotonen blijft steken. Dat gebeurt omdat de effectieve verblijftijd voor de fotonen bij veel verstrooiing groter is, zodat de kans op fotondestructie toeneemt. De kans op fotoncreatie neemt niet evenredig toe omdat er *fotonverlies* optreedt. Een quantum dat na zijn laatste verstrooiing als foton ontsnapt laat een niet-aangeslagen atoom achter dat niet direct statistisch wordt gecompenseerd. Er zijn minder aangeslagen en meer niet-aangeslagen atomen dan bij evenwicht, dus de emissiecoëfficiënt j_ν is kleiner, de extinctiecoëfficiënt α_ν is groter en de bronfunctie $S_\nu \equiv j_\nu/\alpha_\nu$ is kleiner dan bij evenwicht.



Het gemiddelde stralingsveld J_ν neemt buitenwaarts af vanaf ongeveer de diepte $l_\nu^* = 1/\sqrt{\epsilon_\nu}$ waar dit stralingsverlies begint; van daar af kunnen fotonen al rondstappend de buitenkant bereiken en verloren gaan¹ vóór ze aan de beurt zijn om vernietig te worden. De bronfunctie wordt gegeven door $S_\nu = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu$ en ligt dus altijd tussen J_ν en B_ν . Aan het oppervlak geldt $S_\nu = \sqrt{\epsilon_\nu} B_\nu$ en J_ν ligt daar nog onder. In voldoende diepe lagen zal $J_\nu \rightarrow B_\nu$ gaan omdat daar géén fotonen ontsnappen. Het bestaan van een buitenkant, dat wil zeggen het plotseling ophouden van de homogeniteit van het medium, wordt daar nog niet door het stralingsveld en de bronfunctie gevoeld. Dus geldt daar $S_\nu = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu \approx B_\nu$, ongeacht de waarde van ϵ_ν . Die bepaalt echter wel wáár deze "thermalisatie" optreedt.

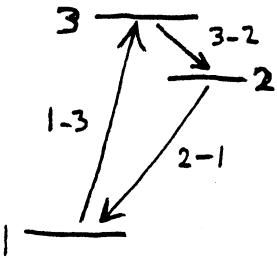
De afname van S_ν/B_ν nabij het oppervlak van een optisch dik medium ten gevolge van stralingsverliezen is feitelijk een afname van de potentiële energie van het stralingsveld om atomen aan te slaan, te ioniseren, etc. Als er enige koppeling is tussen het stralingsveld en de kinetische energieverdeling ($\epsilon_\nu \neq 0$) leiden de stralingsverliezen ook tot temperatuurafname nabij het oppervlak. Een homogene dikke laag gas kan dus feitelijk helemaal niet bestaan. De aanwezigheid van een oppervlak als overgang naar de lege ruimte waarin fotonen verdwijnen leidt onherroepelijk tot verlies van lokale energiedichtheid, in aanslag van atomen en in de beweging van atomen.

Vraag 7.21 Wat verwacht je voor het gedrag van de fotondestructiekans ϵ_ν met de diepte vanaf het oppervlak in een ster?

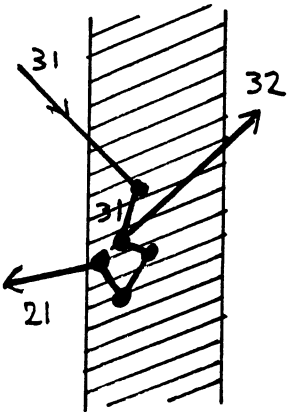
Vraag 7.22 Wat is het geldigheidsbereik van respectievelijk de Rosselandbenadering en de Edingtonbenadering in termen van optische diepte?

7.4 Stralingstransport bij conversie

In de voorgaande paragrafen werd de nadruk gelegd op het niet-lokaal zijn van de bronfunctie bij veel elastische verstrooiing: de bronfunctie wordt dan op een andere plaats bepaald dan vanwaar de uittredende straling wordt waargenomen. Bij niet-elastische verstrooiing komt daar nog bij dat de bronfunctie ook op een andere frequentie dan de waarnemingsfrequentie kan worden beïnvloed. In het extreme geval van fotonconversie kan de waargenomen straling zelfs nauwelijks iets te maken hebben met het daarin waargenomen object.



We bekijken dit weer schematisch. Veronderstel weer een laag die homogeen is in de toestandsparameters en extinctiecoëfficiënten maar waarin de bronfunctie ten gevolge van verstrooiing en conversie plaatselijk kan variëren. Veronderstel dat het medium bestaat uit drie-niveau atomen, met sterke toegestane bb overgangen tussen de niveaus, alle drie met dezelfde overgangswaarschijnlijkheid A_{ul} . Fotonconversie is dan mogelijk door omzetting van 3-1 fotonen in 3-2 plus 2-1 fotonen en omgekeerd. Neem aan dat de populaties Boltzmannachtig zijn verdeeld. Dan is de bezetting van niveau 1 veel groter dan de bezettingen van niveau's 2 en 3; dus is het goed mogelijk dat de laag optisch dik is in de lijnen 2-1 en 3-1 (in beide even dik, waarom?) maar optisch dun is in de lijn 3-2. Laten we aannemen dat dat inderdaad zo is.



Veronderstel vervolgens dat de laag een lage temperatuur en een lage dichtheid heeft, en van links wordt aangestraald door een hete bron met veel sterkere straling op λ_{31} dan op langere golflengten. Wat gebeurt er in de laag met de zo ontvangen fotonen op de golflengtes λ_{21} , λ_{31} en λ_{32} ? Voor de laatste is de laag optisch dun: een 3-2 foton zal meestentijds ongehinderd passeren; een enkele pleegt wellicht 2-3 foto-excitatie. De 2-1 en 3-1 fotonen blijven echter steken. De 2-1 fotonen verzorgen foto-excitatie naar niveau 2. Gezien de lage dichtheid is 2-1 botsingsdeëxcitatie onwaarschijnlijker dan stralingsdeëxcitatie, dus treedt er vooral resonantieverstrooiing op: 2-1 fotonen zullen per random-walk door het medium stappen tot ze de laag weer verlaten, door een schaarse 2-1 botsing worden vernietigd of door een schaarse 2-3 excitatie (per 3-2 foton of botsing) hun identiteit verliezen. De talrijke opvallende 3-1 fotonen tenslotte verzorgen foto-excitatie naar niveau 3. Botsingsdeëxcitatie van niveau 3 naar niveau 1 of 2 is relatief infrequent, dus spontane deëxcitatie overheerst, met gelijke

¹voor het medium, juist niet voor de mensheid.

kans ("branching ratio") voor 3-1 en 3-2. Het eerste geval is weer resonantieversstrooiing en het nieuwe 3-1 foton zal niet veel verder komen dan het oorspronkelijke. In het tweede geval zal het 3-2 foton daarentegen meestentijds de laag uitvliegen — op die golflengte is de laag immers optisch dun. Er blijft dan een atoom in niveau 2 achter. Dat zal meestal een 2-1 foton toevoegen aan het reeds rondstappende 2-1 stralingsveld.

Gevolg: elk opvallend 3-1 foton levert, eventueel na enkele 3-1 resonantieversstrooiingen, een ontsnappend 3-2 foton; hun aantal is veel groter dan het aantal 3-2 fotonen uit de bron zelf. Het aantal uit de laag tredende 3-2 fotonen is dus een goede maat voor het aantal op de laag vallende 3-1 fotonen. Dat is een situatie die wel erg ver van LTE afligt: de waargenomen 3-2 intensiteit wordt bepaald door de intensiteit van een heel ander object op een heel andere golflengte. Neem bijvoorbeeld aan dat je op λ_{32} door de laag naar de hete bron kijkt. De laag is optisch dun en koud en zou zonder conversie een absorptielijn veroorzaken in het door de hete bron geleverde continuum, analoog aan de tellurische lijnen in het zonnenspectrum; nu levert de laag echter een zeer sterke emissielijn die niets te maken heeft met de temperatuur van de laag zelf maar alles met de temperatuur van de bron.

Het is onwaarschijnlijk dat de populaties Boltzmann-verdeeld zullen zijn als botsingen niet of nauwelijks meedoen. De statistisch-evenwichts vergelijkingen voor de drie niveaus zijn dan:

$$\begin{aligned} n_1(B_{12}\bar{J}_{21} + B_{13}\bar{J}_{31}) &= n_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21}) + n_3(A_{31} + B_{31}\bar{J}_{31}) \\ n_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21}) &= n_1B_{12}\bar{J}_{21} + n_3A_{32} \\ n_3(A_{31} + B_{31}\bar{J}_{31} + A_{32}) &= n_1B_{13}\bar{J}_{31}. \end{aligned}$$

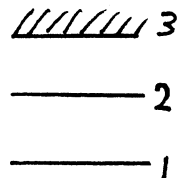
Deze moeten samen met de stralingstransportvergelijkingen voor de drie lijnen (op een aantal frequenties in elke lijn) worden opgelost om de populaties en stralingsvelden te vinden.

In meer realistische termschema's kan fotonconversie in allerlei patronen optreden, bijvoorbeeld middels bf overgangen of gebruikmakend van een golflengte-coïncidentie met een sterke spectraallijn van een ander element zoals $\text{Ly } \alpha$ ("optisch pompen"). Ook is het mogelijk dat de 2-1 overgang hierboven niet is toegestaan of een zeer kleine overgangswaarschijnlijkheid heeft. Dan verzamelt niveau 2 een grote overpopulatie waarvan de groei uiteindelijk wordt afgekapt, hetzij door botsingsdeëxcitatie naar niveau 1 welke dan resulteert in verhitte van het lokale medium, hetzij door stralingsdeëxcitatie in zo'n "verboden" lijn die dan opvallend sterk zal zijn.

Vraag 7.23 Binnen de laag kan \bar{J}_{21} groter zijn dan in het opvallende stralingsveld, waarom?

Vraag 7.24 Ga na wat er in het voorbeeld hierboven gebeurt als de laag niet optisch dun maar effectief dun is in lijn 3-2.

Vraag 7.25 Stel dat de laag bestaat uit twee-niveau-plus-continuum atomen, dus met bf overgangen voor 3-1 en 3-2. Is er verschil met het voorbeeld hierboven?



Hoofdstuk 8

Toepassingen

8.1 Inleiding: tussen dik en dun

Dit extra hoofdstuk geeft enkele toepassingen van stralingsprocessen en stralingstransport voor uiteenlopende astrofysische omstandigheden. De hier behandelde stof is geen leerstof maar wel leerzaam. Delen eruit zijn in het college NGSB tussendoor behandeld; hier staan ze apart om de presentatie van de voorafgaande stof rechttoe-rechtaan te houden. Die krijgt hier verdieping; deze voorbeelden illustreren waar dit college toe dient en leveren tegelijk inzichtelijke oefenstof.

Er zijn nog vele andere toepassingen in de sterrekunde; dit hoofdstuk bevat slechts een eerste selectie. In de toekomst moeten er meer bijkomen; suggesties zijn welkom.

Alle hier behandelde toepassingen hebben gemeen dat ze zich afspelen in het domein tussen optisch dik en optisch dun. Dat is niet verwonderlijk omdat $\tau_\nu \approx 1$ juist de omstandigheden typeert waarin stralingstransport enerzijds belangrijk is en anderzijds complex. Voor optisch zeer dikke omstandigheden is stralingstransport eenvoudig omdat de vrije weglengte der fotonen daarin doorgaans klein is ten opzichte van typische schaallengtes voor temperatuur en drukveranderingen; de Rosselandbenadering voldoet daar doorgaans voor. Optisch zeer dunne omstandigheden vragen alleen evaluatie van de lokale extinctiecoëfficiënt en bronfunctie, zonder stralingstransportproblemen.

8.2 Sterfotosferen

8.2.1 Continua van de zon

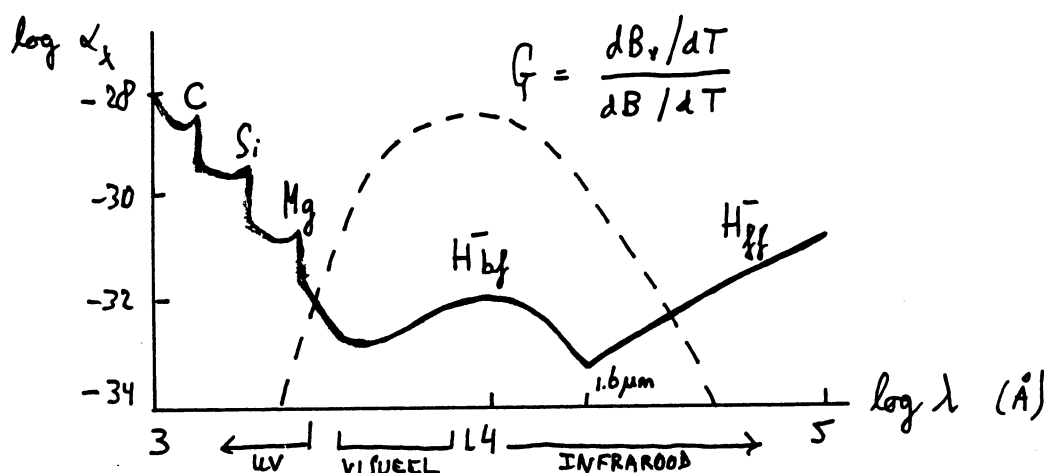
8.2.1.1 Extinctiecoëfficiënt

De *fotosfeer* van een ster is de laag waar het zichtbare licht ontsnapt. In de fotosfeer van de zon ($T_{\text{eff}} = 5770 \text{ K}$, $N_e \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) is H neutraal maar Na, Fe, Mg, Si zijn éénmaal geïoniseerd (Saha). Deze "metalen" zijn abundant en leveren veel electronen; daarmee geeft H^- de grootste bijdrage aan de continue extinctie in het visueel (H_{bf}^-) en infrarood (H_{ff}^-). Op radiofrequenties draagt H_{ff} het meeste bij. In het ultraviolet wordt de extinctiecoëfficiënt bepaald door een reeks elkaar overlappende seriegrenscontinua (Al I, Mg I, Si I, C I, Fe I); in het verre UV door de H en He I Lymancontinua, en in het Röntgengebied door seriegrenscontinua van hoge ionisatiegraad, *e.g.* Fe XXIV *bf*. Zie Figuur 8.1.

Figuur 8.1 geldt voor een specifieke electronendruk P_e (waarom?) maar heeft ongeveer dezelfde vorm voor niet al te sterk afwijkende waarden van P_e (zie Novotny voor voorbeelden). Hoe varieert de *grootte* van de extinctie met P_e ?

De zon is op zijn kleinst in het visuele gebied (anders past-ie niet net achter de maan); het allerdiepst kijk je in de zon op $\lambda = 1.6 \mu\text{m}$ in het nabije infrarood.

De Rosseland gewichtsfunctie $G_\nu(T)$ is ook ingetekend. De hoofdmoot van de zonneflux loopt tussen $\log \lambda = 3.5$ en $\log \lambda = 4.5$, waarom? (NB: de top van $B_\nu(T=5770 \text{ K})$ ligt bij $\log \lambda = 3.9$ of $\lambda = 800 \text{ nm}$ maar $B_\lambda(T=5770 \text{ K})$ heeft zijn top daarentegen bij 600 nm .)



Figuur 8.1: De continue extinctiecoëfficiënt in de fotosfeer van de zon.

8.2.1.2 Vormingshoogte

De continue extinctiecoëfficiënt verandert ordes van grootte door het spectrum heen, zie Figuur 8.1. Dus wisselt de lokatie met $\tau'_\nu = 1$ die volgens de Eddington-Barbier benadering representatief is voor de uittredende intensiteit sterk met de golflengte. Daarnaast is de extinctie op de lijngolflengtes van waarschijnlijke bb overgangen zoals de Balmer- en Lymanlijnen van H I, de H & K resonantielijnen van Ca II en de h & k resonantielijnen van Mg II nog weer vele ordes van grootte groter dan de continue extinctie.

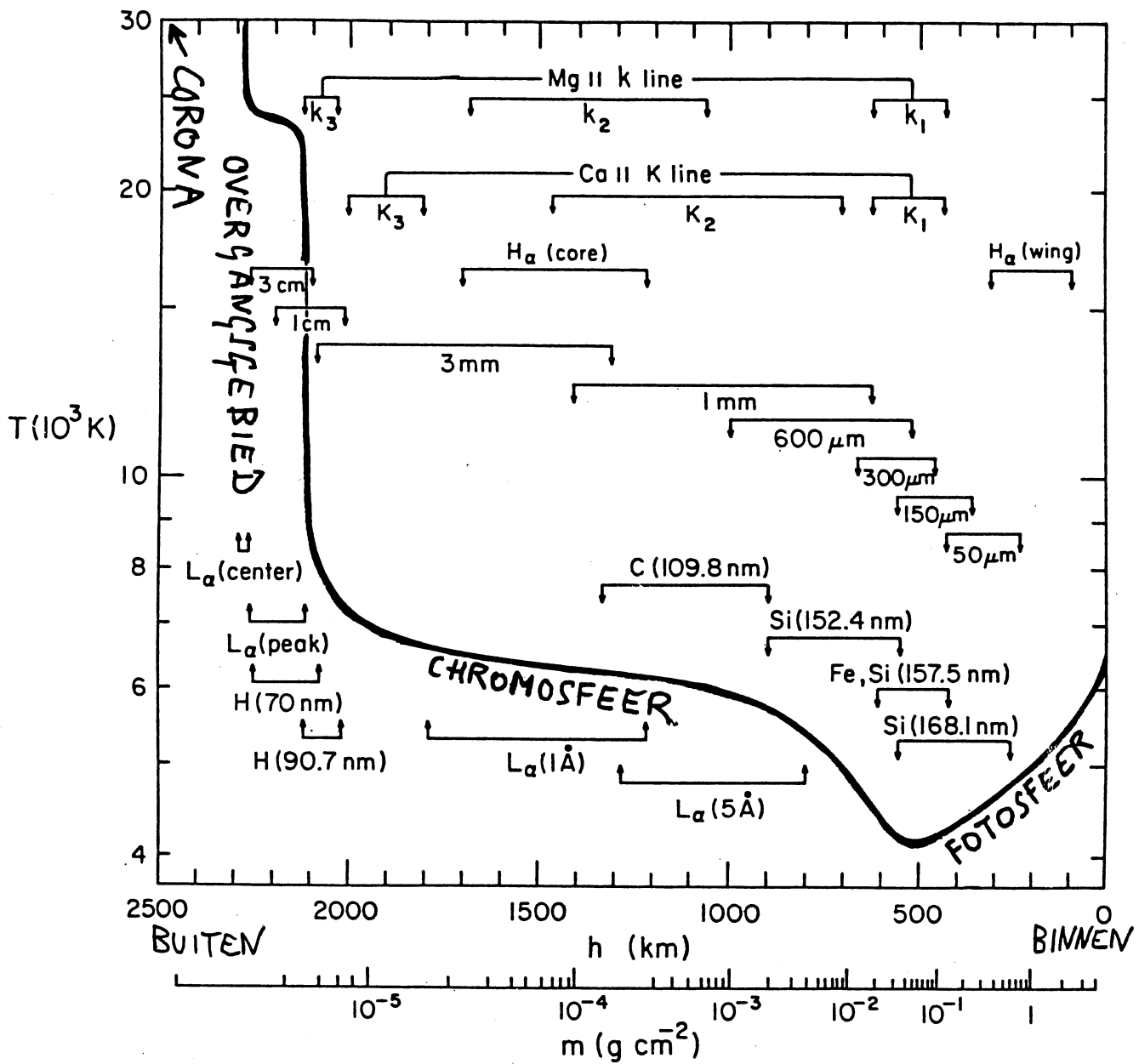
Figuur 8.2 toont de resulterende vormingshoogten. De temperatuur en de hoogte in de zonneatmosfeer zijn tegen elkaar uit gezet, met de hoogte naar links toenemend. De temperatuur is een soort horizontaal gemiddelde over de inhomogeniteiten die de zon in werkelijkheid toont. Het nulpunt van de hoogteschaal is gedefinieerd door de afspraak $h = 0$ waar $\tau'_\nu = 1$ voor het continuum op $\lambda = 500$ nm, dus ongeveer de lokatie waar het visuele continuum de zon verlaat. De tweede abscis geeft de dichtheid, zoals gebruikelijk in de vorm van de kolommassadichtheid $m \equiv$ de massa van een oneindig lange kolom van 1 cm^2 doorsnede boven de gegeven hoogte.

De dichtheid valt ruwweg exponentieel naar buiten af (waarom?) zodat de geometrische hoogteschaal ($h \equiv z$) tamelijk lineair is in $\log m$. Ook de $\log \tau'_\nu$ schaal verloopt ongeveer lineair met $\log m$. Waarom? Hoe uit zich de frequentieafhankelijkheid van τ_ν daarin?

De temperatuur valt in de fotosfeer af tot de lokatie waar de voornaamste continua (met $\log \lambda = 3.5 - 4.5$ voor λ in Å) optisch dun zijn geworden: $\tau'_\nu < 1$. De afval van de temperatuur is in overeenstemming met dit energietransport door de bulk van de zonnestraling waar deze nog het medium beheerst (*stralingsevenwicht*). De hogere lagen zijn echter niet aan \mathcal{F} gekoppeld omdat de visuele zonnestraling daar ongehinderd passeert; ze mogen daarom afwijken van T_{eff} net zoals de aardatmosfeer dat doet. In de hogere lagen loopt de temperatuur buitenwaarts weer op, eerst matig in de *chromosfeer* en dan zeer snel in het *overgangsgebied* naar de zeer hete (2×10^6 K) *corona*.

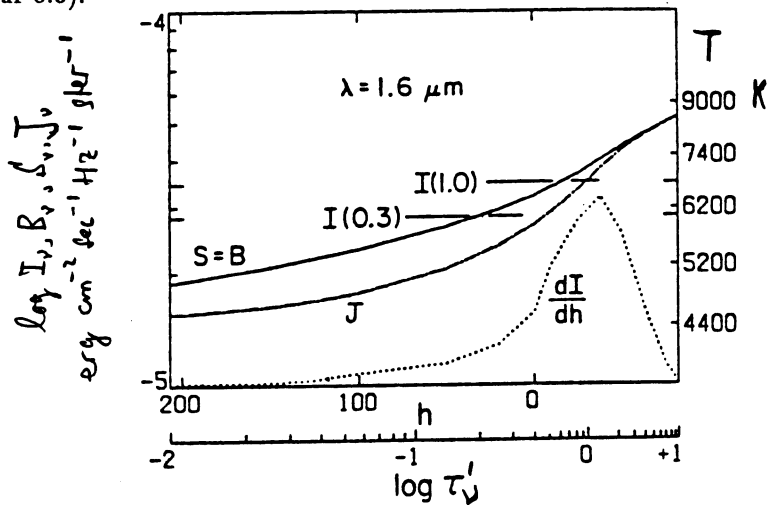
De vormingshoogtes van de diverse continua wordt bepaald door de extinctiecoëfficiënt in Figuur 8.1: hoe groter de extinctie, hoe hoger de vorming; idem dito voor spectraallijnen. Voor grote extinctie is de fotosfeer optisch dik: de representatieve Eddington-Barbier lokatie $\tau_\nu = 1$ ligt dan erboven. Dat is het geval zowel in het verre infrarood als in het verre ultraviolet; die continua en alle radiostraling en Röntgenstraling komen uit de chromosfeer en de corona. De kern van de Ly α lijn heeft ook zeer grote extinctie (waarom?) en wordt pas in het overgangsgebied naar de corona optisch dun.

Ieder stukje $T(\log m)$ is een ruwe indicatie voor het gedrag van $S_\nu(\log \tau'_\nu)$ voor het bijpassende stukje spectrum met $\log \tau'_\nu \approx 0$. Waar LTE geldt is dat een goede indicatie. Dat is zeker het geval voor het infrarode continuum omdat H_{ff}^- daarvoor de voornaamste ex-



Figuur 8.2: De vormingshoogte van continua en sterke spectraallijnen in de zonneatmosfeer. Uit Vernazza, Avrett en Loeser (1981).

tinctiebron is en de dichtheid in de fotosfeer voldoende groot is dat de Maxwellverdeling er geldt (Figuur 8.3).



Figuur 8.3: B_ν , J_ν en S_ν in de fotosfeer van de zon voor $\lambda = 1.6 \mu\text{m}$. Uit Vernazza, Avrett en Loeser (1981).

Figuur 8.3 toont de vorming van de zonnestraling op $\lambda = 1.6 \mu\text{m}$. Vergelijk de hoogteschaal en de $\log \tau'_\nu$ -schaal met Figuur 8.1 en Figuur 8.2. Wordt het continuüm op $\lambda = 500 \text{ nm}$ hoger of lager gevormd dan de $1.6 \mu\text{m}$ straling? Wat bepaalt de flanken van de bijdragefunctie dI/dh met

$$dI/dh = \frac{d}{dh} \int_0^\infty S e^{-\tau'} d\tau' = -\frac{d}{dh} \int_{+\infty}^{-\infty} j e^{-\tau'} dh = j e^{-\tau'}$$

Waarom ligt de top van deze integrand niet bij $\tau'_\nu = 1$? Kloppen de uittredende intensiteiten $I_\nu(\mu = 1.0)$ en $I_\nu(\mu = 0.3)$ met de Eddington-Barbier relatie? Boven een isotroop stralend oppervlak geldt $J_\nu = (1/2)I_\nu$. Klopt dat hier? Als ergens LTE geldt moet het wel op deze golflengte zijn, waarom? Hoe blijkt uit deze figuur dat LTE geldt? En dat $\epsilon_\nu \approx 1$? Geldt $S_\nu(\tau'_\nu = 0) = \sqrt{\epsilon_\nu} B_\nu$? En dat $J_\nu \approx B_\nu$ voor $\tau'_\nu = 1$? Waar ligt $\tau'_\nu^* = 1$?

8.2.1.3 Intensiteit en temperatuurverloop

Het waargenomen continue spectrum $I_\nu(0, \mu)$ is een samenstel van:

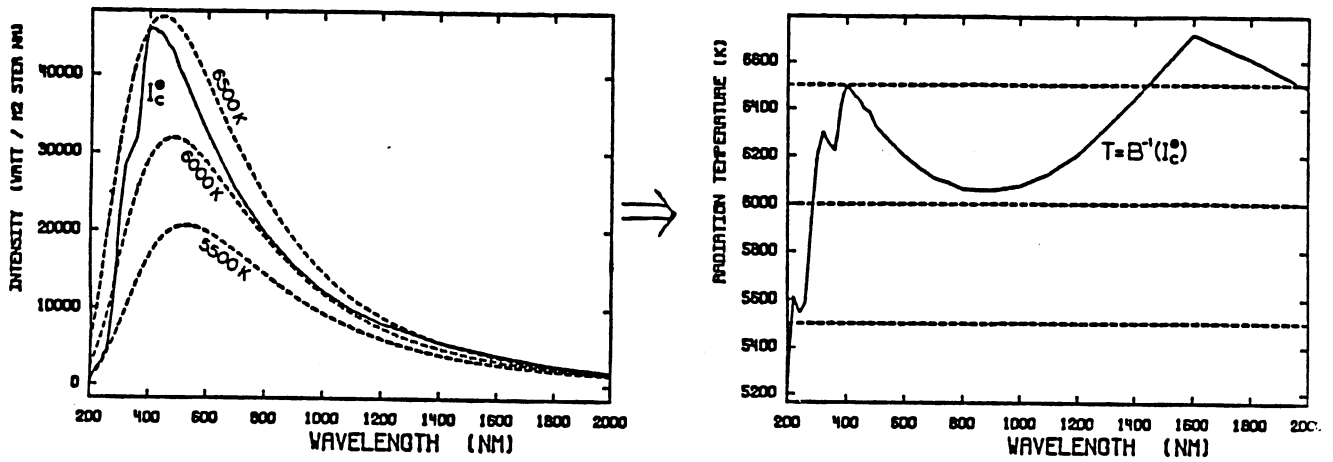
- het temperatuurverloop $T(h)$;
- het bronfunctieverloop, gegeven door $S_\nu(h) = B_\nu[T_e(h)]$ waar de aanname van LTE opgaat, en door $S_\nu(h) = (1 - \epsilon_\nu(h))J_\nu(h) + \epsilon_\nu(h)B_\nu[T_e(h)]$ waar elastische verstrooiing (zoals Thomsonverstrooiing) belangrijk is;
- het extinctieverloop $\alpha_\nu(m)$;
- de dichtheidsstratificatie $m(h)$.

Je kijkt tot een diepte $\tau'_\nu \approx 1$ en ziet de bronfunctie ter plekke. Beter geformuleerd: de waarde van de bronfunctie op de Eddington-Barbier diepte $\tau'_\nu \approx 1$ is representatief voor de uittredende intensiteit; deze formulering is beter omdat de integrand

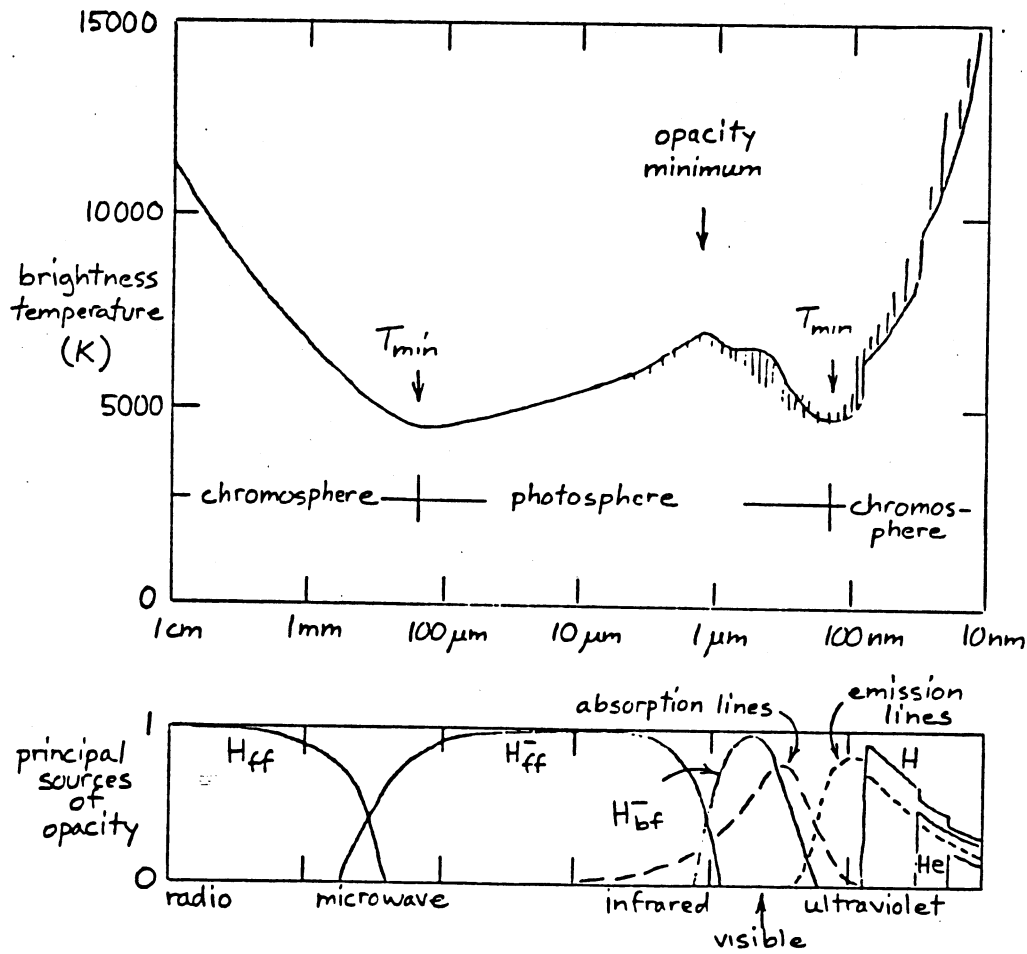
$$\frac{dI}{dh} = \frac{d}{dh} \int_0^\infty S e^{-\tau'} d\tau' = -\frac{d}{dh} \int_{+\infty}^{-\infty} j e^{-\tau'} dh = j e^{-\tau'}$$

tamelijk breed is, zie Figuur 8.3.

Figuur 8.4 toont de intensiteit van de zon vergeleken met Planckfuncties, als energie en als helderheidstemperatuur T_b met $B_\nu(T_b) = I_\nu(0, 1)$. Waarom volgt $I_\lambda(0, 1)$ niet een enkele Planckkromme terwijl voor $\lambda > 400 \text{ nm}$ LTE goed opgaat? Welke grootheden bepalen het verloop van de helderheidstemperatuur T_b^\odot rechts? Waar zag je deze vorm eerder?



Figuur 8.4: Links: de uittredende intensiteit $I_{\lambda}(\tau'_{\nu} = 0, \mu = 1)$ voor het midden van de zonneschijf vergeleken met de drie Planckfuncties $B_{\lambda}(T = 5500, 6000, 6500 \text{ K})$. Rechts: idem, in de vorm van helderheidstemperaturen.



Figuur 8.5: Helderheidstemperatuur van de zon (boven) en de relatieve bijdrage van de voornaamste bronnen van continue extinctie (steeds op de hoogte waar $\tau'_{\nu} = 1$) door het spectrum. Avrett (preprint IAU Symposium 138).

Figuur 8.5 toont het helderheidstemperatuurverloop van de zon voor het hele spectrum, met de voornaamste bijdragers aan de continue extinctie eronder. Met kennis van deze $\alpha_\nu(h)$ kan uit de waargenomen intensiteiten $I_\nu(0, 1)$ een modelatmosfeer $T(h)$ worden afgeleid. Dat deden Vernazza *et al.* met al de spectrale banden in Figuur 8.2 om het daar getekende temperatuurverloop te bepalen: dit is een "empirische" modelatmosfeer bepaald uit allerlei continua en enkele sterke spectraallijnen, waargenomen voor het zonsmidden.

Vernazza *et al.* moesten daarbij gedetailleerde NLTE stralingstransport berekeningen doen voor de ultraviolette of overgangen van H I, Mg I, Si I, Fe I en C I in de hoge fotosfeer omdat de ionisatie-evenwichten voor deze extinctie- en elektronenproducenten niet volgens LTE verlopen. Hun ultraviolette of energiesprongen zijn groter (3–5 eV) dan de typische kinetische energie (1–2 eV) die in botsingen voorhanden is in de koele laag tussen fotosfeer en chromosfeer, zodat de stralingsprocessen in het ionisatie-evenwicht overheersen: straling-ionisatie en spontane stralingsrecombinatie. (Waarom geen geïnduceerde recombinatie en botsingsrecombinatie?) De energiesprong van gebonden niveau naar ionisatiegrens is in het ultraviolet zo veel groter dan het met ν^{-3} afvallende kinetische energiegedeelte erboven dat deze ionisatiekanten zich voordoen als resonantielijnen, inclusief resonantieverstrooiing.

8.2.1.4 Centrum-rand verloop

Schever uittredende straling komt uit hoger gelegen lagen volgens vergelijking (3.17):

$$I_\nu^+(0, \mu) = \int_0^\infty S_\nu(\tau'_\nu) e^{-\tau'_\nu/\mu} d\tau'_\nu/\mu.$$

De visuele straling komt uit de fotosfeer; daarin geldt voor het continuum LTE (omdat H^- de extinctie levert, Figuur 8.1). De temperatuur neemt in de fotosfeer naar buiten af (Figuur 8.2, rechterkant), dus neemt $S_\nu(h) = B_\nu[T(h)]$ naar buiten af, dus toont de zon daarin *randverzwakking*: de waargenomen intensiteit neemt af van het midden naar de rand van de zonschijf. Als LTE en de Eddington-Barbier relatie (vergelijking 3.18) gelden volgt:

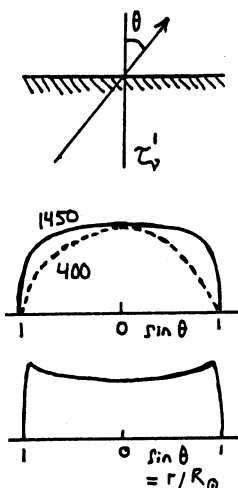
$$\frac{I_\nu(0, \mu)}{I_\nu(0, 1)} = \frac{a + b\mu}{a + b} = 1 - \beta + \beta\mu$$

met $\beta \equiv b/(a + b)$ de randverzwakkingscoëfficiënt.

De randverzwakking van de zon is historisch zeer belangrijk geweest in:

- de constatering dat de fotosfeer in stralingsevenwicht verkeert, dus dat het energietransport daar vooral per straling gaat. De convectie houdt net onder het oppervlak op, als gevolg van het ontsnappen van straling;
- de constatering dat H^- de voornaamste bron van continue extinctie en emissie vormt;
- de empirische bepaling van het $T(h)$ -verloop vóór de infrarode en ultraviolette intensiteiten beschikbaar kwamen.

Straling op $\lambda = 400$ nm en $\lambda = 1450$ nm komt uit ongeveer dezelfde laag (Figuur 8.2, Figuur 8.4 rechts). Toch is de randverzwakking op $\lambda = 400$ nm groter, waarom? In het verre infrarood is aan Eddington-Barbier voldaan als de temperatuur lineair met τ'_ν toeneemt. Waarom? Geldt dat ook als de temperatuur naar binnen toe lineair met τ'_ν afneemt? Voor $\lambda > 1$ mm wordt randverheldering in plaats van randverzwakking waargenomen. Waarom? Verwacht je randverzwakking of randverheldering in het Lymancontinuum ($\lambda \leq 90.6$ nm)?



8.2.2 Spectraallijnen van de zon

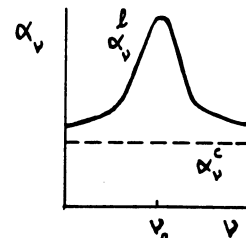
8.2.2.1 Extinctiecoëfficiënt

Een spectraallijn is altijd het gevolg van een positieve piek in de extinctiecoëfficiënt. De grootte van de piek wordt gegeven door

$$\alpha'_\nu(\nu = \nu_0) = \frac{\pi e^2}{m_e c} b_l n_l^{\text{TE}} f_{lu} \varphi(\Delta\nu = 0) \left[1 - \frac{b_u}{b_l} e^{-h\nu_0/kT} \right]$$

met f_{lu} de bb oscillatorsterkte en $\varphi(\Delta\nu=0)$ het maximum van de extinctieprofielfunctie. De mate van extinctie varieert in eerste instantie evenredig met de populatie van het onderniveau n_l . Deze wordt bepaald door de dichtheid en temperatuur ter plekke volgens de Saha en Boltzmann LTE vergelijkingen (n_i^{LTE}), met correctie (b_l) voor NLTE afwijkingen als niet-lokale stralingsvelden in de populatievergelijkingen een rol spelen. In tweede instantie is de lijnextinctie ook afhankelijk van de populatie van het bovenniveau door gevoeligheid voor afwijkingen van LTE in de bronfunctie via de negatieve correctie voor geïnduceerde emissie ($1 - b_u/b_l e^{-h\nu/kT}$) als $S'_\nu \neq B_\nu$.

De vorm van de piek, gegeven door $\phi(\nu-\nu_0)$, is de geconvolueerde van een Gaussprofiel en een Lorentzprofiel, bepaald door de Dopplerverbreiding, de stralingsdemping en de botsingsdemping ter plekke. Over deze lijnverbreidingen handelt een uitgebreide literatuur die in dit dictaat niet aan bod komt; zie Gray (1976) of Mihalas (1978).



8.2.2.2 Vormingshoogte

De extinctiecoëfficiënt bepaalt wederom uit welke laag de straling ontsnapt, nu niet in breedbandige variatie zoals bij de continua hierboven maar heel smalbandig variërend binnen het lijnprofiel. Wederom is de bronfunctie op de monochromatische ontsnappingsdiepte representatief voor de uittredende intensiteit volgens de Eddington-Barbier benadering

$$I_\nu^+(0, \mu) = \int_0^\infty S_\nu(\tau'_\nu) e^{-\tau'_\nu/\mu} d\tau'_\nu/\mu \approx S_\nu(h[\tau'_\nu = \mu]),$$

nu met de totale bronfunctie S_ν welke is samengesteld uit de lijnbronfunctie S'_ν en de continuumbronfunctie S_ν^c volgens

$$S_\nu = \frac{\alpha_\nu^c S_\nu^c + \alpha_\nu^l S'_\nu}{\alpha_\nu^c + \alpha_\nu^l}.$$

Waar LTE geldt bepaalt $T(h)$ weer direct $S_\nu = B_\nu[T_e]$ en daarmee de uittredende intensiteit. Waar LTE niet geldt wordt de lijnbronfunctie gegeven door

$$S'_\nu = (1 - \epsilon_\nu) \bar{J}_\nu + \epsilon_\nu B_\nu[T_e]$$

in twee-niveau benadering, of door

$$S'_\nu = \left[(1 - \epsilon'_\nu - \eta'_\nu) \bar{J}_\nu + \epsilon'_\nu B_\nu[T_e] + \eta'_\nu B_\nu[T^*] \right] / (1 + \epsilon'_\nu + \eta'_\nu)$$

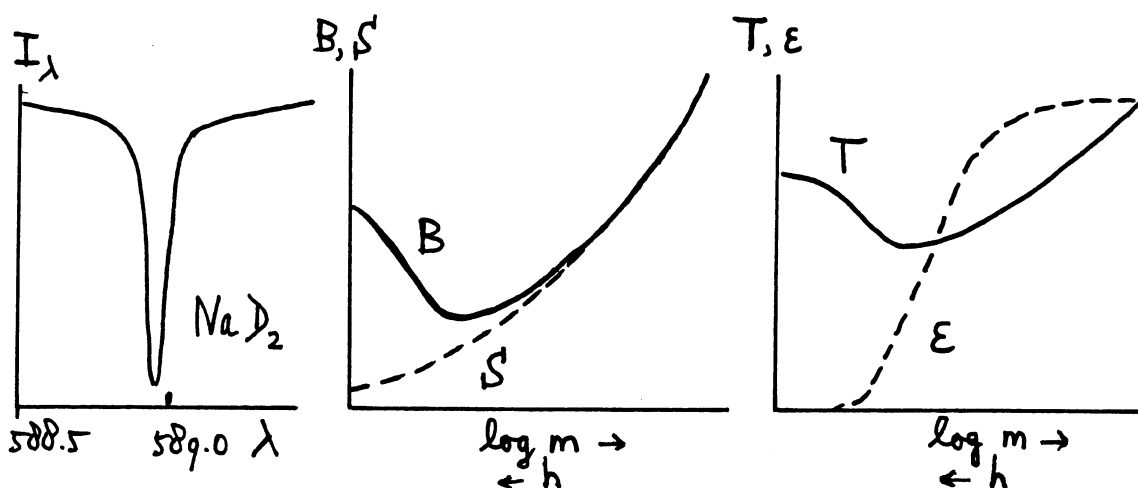
als naast resonantieverstrooiing ook fotonconversie bijdraagt, met η_ν de omwegkans per extinctie en T^* een representatieve procestemperatuur voor de omwegen.

8.2.2.3 De NaID lijnen

Figuur 1.2 toont de twee gele NaID lijnen in het zonnespectrum. In vraag 1.23 werd gesteld dat pas aan het einde van dit dictaat een antwoord kan worden gegeven op de vraag of de schoolboekjes-analogie tussen een aangestraalde vlam met keukenzout en het zonnespectrum opgaat. De fout van de schoolboeken is dat koeien en paarden worden vergeleken: de vlam is optisch dun zodat interpretatie geen stralingstransport vereist, maar de zon is optisch dik. Het in emissie of in absorptie zijn van de NaID lijnen in het zonnespectrum volgt niet eenvoudig uit vergelijking (3.16) zoals bij de vlam, maar uit de Eddington-Barbier relatie en het gedrag van de bronfunctie.

Gedetailleerde numerieke oplossing van de statistisch-evenwichtsvergelijkingen voor de excitatie en ionisatie van natriumatomen in de zonneatmosfeer toont dat de twee-niveau benadering voor deze resonantielijnen goed opgaat. Daarmee is het resultaat in Figuur 8.6 begrijpelijk. Met de dichtheid valt de botsingskans C_{ul} met de hoogte h steil af; omdat A_{ul} voor deze resonantielijnen groot is en onafhankelijk is van de hoogte valt ook de foton-destructiekans $\epsilon \approx C_{ul}/A_{ul}$ steil af met h . De lijnbronfunctie volgt \bar{J}_{ν_0} in de hogere lagen en nadert de Planckfunctie slechts in de diepe fotosfeer.

De lijnvleugels zijn afkomstig uit diepe lagen; daarvoor geldt LTE. Immers, met de afstand in golflengte tot het centrum van de lijn $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ hebben de vleugels afnemende



Figuur 8.6: Vorming van de NaID lijnen in het zonnenspectrum. De destructiekans ϵ valt af van $\epsilon \approx 1$ in de diepe fotosfeer tot $\epsilon \approx 10^{-4}$ boven het temperatuurminimum. De bronfunctie volgt de Planckfunctie alleen in de diepe lagen; in hogere lagen volgt de bronfunctie de hoekgemiddelde intensiteit \bar{J}_{ν_0} , met $\bar{J}_{\nu_0} < B_{\nu}$ wegens fotonverliezen. Voor de vleugels van de lijnen geldt LTE maar de lijnkernen zakken dieper in dan LTE voorspelt; de NaID lijnen zijn "strooiingslijnen".

lijnextinctie α^l ; hoe groter $\Delta\lambda$, hoe dieper wordt de uittredende intensiteit gevormd. Bovendien is voor voldoende grote $\Delta\lambda$ $\alpha^l \ll \alpha^c$; dan overweegt de continue bronfunctie in de totale bronfunctie en is LTE vorming verzekerd.

De lijnkernen hebben $\alpha^l \gg \alpha^c$. De kernen worden veel hoger gevormd; daarvoor wordt de uittredende intensiteit bepaald in het regime waar $S_{\nu} \approx \bar{J}_{\nu_0}$. Deze is veel lager dan de Planckfunctie op die hoogte. In feite merkt de bronfunctie (\approx lijnbronfunctie) daar niets van de plaatselijke temperatuur. De aanwezigheid van het temperatuurminimum komt niet eens tot uitdrukking in de lijnbronfunctie of in het uittredende lijnprofiel; de daar gevormde lijnkernen worden helemaal door de sterke resonantieverstrooiing van dieper gevormde fotonen bepaald; ze zakken veel dieper in dan ze voor LTE zouden doen. De fysische oorzaak daarvan is het optreden van grote fotonverliezen waarvan het effect op de bronfunctie merkbaar is tot ver beneden de $\tau \approx 1$ vormingshoogte.

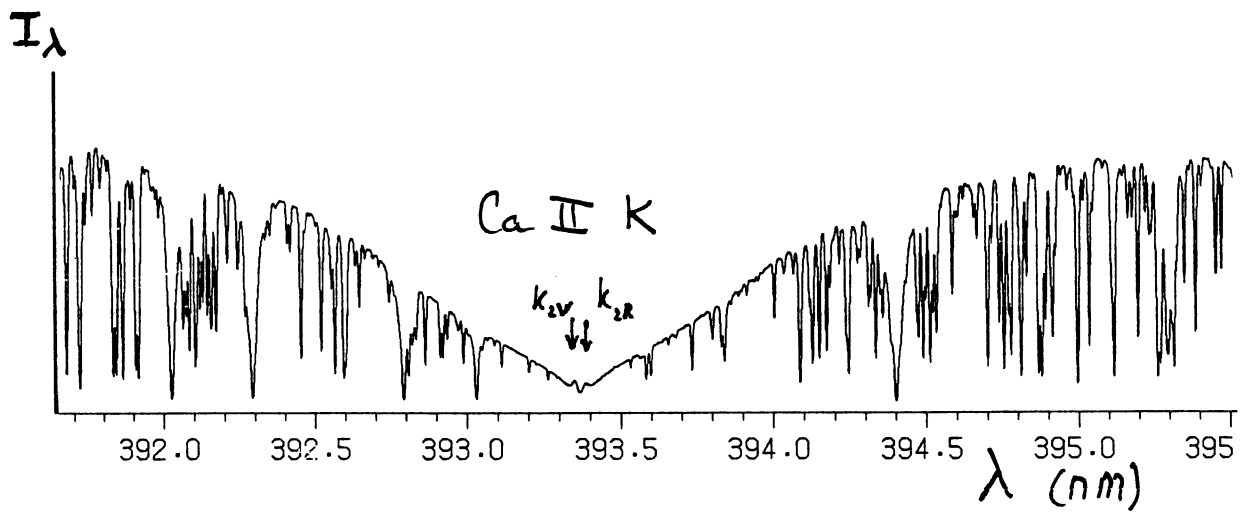
Enige analogie met de vlamproef is er dus wel: in beide gevallen speelt resonantieverstrooiing een belangrijke rol in de lijnextinctie. De manier waarop die doorwerkt in de waargenomen intensiteit is echter in de twee gevallen volkomen verschillend — ook al resulteren in beide gevallen donkere NaID lijnen.

8.2.2.4 De Ca II K lijn

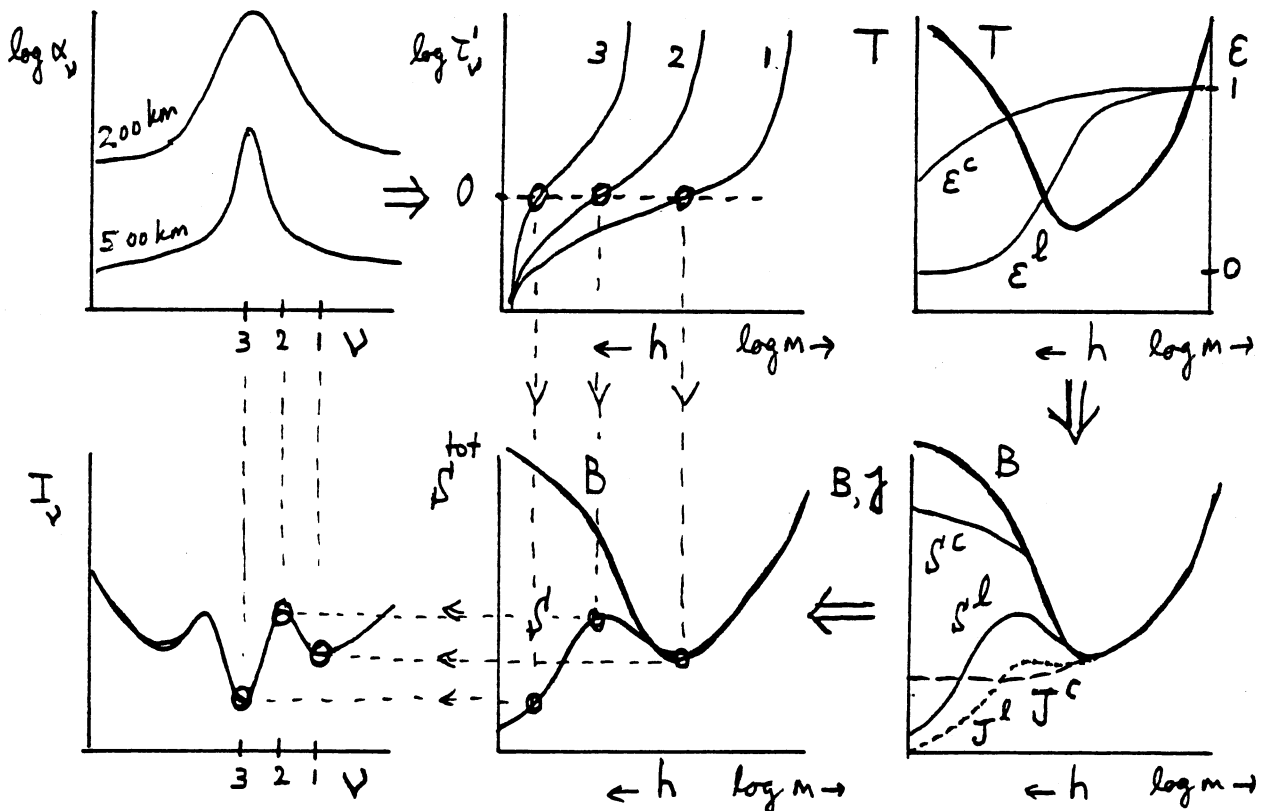
Figuur 8.8 schetst een uitbreiding van Figuur 7.1 voor de vorming van de sterke Ca II K lijn in het zonnenspectrum (Figuur 8.7).

De extinctiecoëfficiënt (linksboven) varieert sterk met de golflengte omdat de bb processen een extra mogelijkheid bieden voor absorptie en verstrooiing. De grootte van de bb piek varieert sterk met de hoogte, afhankelijk van de niveaubezettingen welke gevoelig zijn voor de dichtheid, de temperatuur en (in NLTE) het stralingsveld. De vorm van de bb piek varieert met de hoogte afhankelijk van de dichtheid (botsingsdemping) en de temperatuur (botsingsdemping en Doppler verbreding).

De extinctiecoëfficiënt bepaalt waar de representatieve vormingshoogte h met $\log \tau'_{\nu}(h) = 0$ ligt (midden boven). Iedere frequentie heeft zijn eigen optische diepte schaal $\tau'_{\nu}(h)$, ruwweg exponentieel in h nabij $\log \tau_{\nu}(h) = 0$. De intensiteit $I_{\nu}(0, 1)$ van de uittredende straling wordt in Eddington-Barbier benadering gegeven door de waarde van de monochromatische bronfunctie S_{ν} op de representatieve $\log \tau'_{\nu} = 0$ diepte.



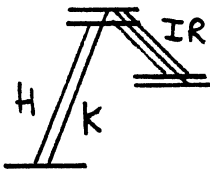
Figuur 8.7: De Ca II K lijn in het zonnenspectrum. De brede diepe ~~kuil~~ kuil in dit stukje zonnenspectrum is een door Fraunhofer "K" gedoopte resonantielij n van het Ca⁺ ion. Dit is de sterkste lijn in het visueel waarneembare deel van het zonnenspectrum. Op de brede lijnvleugels zijn vele zwakkere spectraallijnen gesuperponeerd ("blends"); de meeste zijn van neutrale "metalen" zoals Fe I. In zijn kern vertoont de K lijn twee minuscule piekjes waaraan zeer veel onderzoek van zon en sterren is gewijd.



Figuur 8.8: Zesluik voor de vorming van de Ca II K resonantielij n (393.3 nm) in het zonnenspectrum.

De monochromatische (totale) bronfunctie S_ν (midden onder) is de samengestelde van de continuumbronfunctie S^c en de lijnbronfunctie S^l (rechtsonder). (Door deze samenstelling is de totale bronfunctie altijd frequentie-afhankelijk, ook als de lijnbronfunctie S^l ten gevolge van volledige redistributie over het lijnprofiel, zoals hier is aangenomen, niet over het lijnprofiel varieert.) Beide bronfuncties worden bepaald door het temperatuurverloop $T(h)$ en de mate van koppeling daaraan, gegeven door de destructiekansen ϵ^c en ϵ^l die klein zijn als verstrooiing domineert in de extinctie. De lijnbronfunctie overheerst voor de Ca II K kern door de grote lijnextinctie in de lagen waar de straling ontsnapt; daar is verstrooiing belangrijk. De continue bronfunctie is in de diepe fotosfeer waar hij meedoet in de vorming van de verre lijnvleugels in goede benadering gelijk aan de Planckfunctie, met $\epsilon_\nu^c \approx 1$.

De Ca II K lijn is net voldoende sterk dat de lijnbronfunctie de aanzet tot de temperatuurstijging naar de chromosfeer nog voelt voordat strooiende fotonverliezen de overhand krijgen en ontkoppeling van de Planckfunctie leveren. Er resulteert een bobbel in S^l die als twee kleine emissiepiekjes in het waargenomen lijnprofiel wordt afgebeeld (linksonder).



Wederom is geldigheid van de Eddington-Barbier benadering verondersteld. Hoe zie je dat? Wat moet er anders als de Eddington-Barbier benadering niet geldt? Verstrooiing speelt een belangrijke rol in de vorm van de waargenomen lijnkern (K_3). Hoe zie je dat? Hoe komt de sterke verstrooiing tot uitdrukking in het gedrag van de lijnbronfunctie? In de verre vleugels is LTE daarentegen een goede benadering. Hoe zie je dat?

Hiernaast is het onderste deel van het termschema van Ca II geschetst. Het bovenste deel doet er niet toe, waarom? Ook zijn de bf processen van Ca II naar Ca III en Ca I niet belangrijk, waarom?

Fotonconversie is mogelijk van de Ca II H & K lijnen naar de drie "infrarode" Ca II lijnen en omgekeerd omdat ze gemeenschappelijke bovenniveaus delen. De twee onderniveaus van de infrarode lijnen zijn *metastabiel* omdat er vandaar geen toegestane stralingsovergangen naar het grondniveau zijn. Zulke fotonconversie is niet erg belangrijk voor de H & K lijnen omdat zij grotere overgangswaarschijnlijkheden hebben: de *branching ratio* vanuit de gemeenschappelijke bovenniveaus bevoordeelt de resonantielijnen. Conversie is wel belangrijk voor de drie infrarode lijnen omdat hun extinctie kleiner is (Boltzmann): ook waar zij optisch dun worden volgt hun lijnbronfunctie nog getrouw de Planckfunctie omdat koppeling via conversie aan de daar nog optisch dikke H & K lijnen optreedt.

Het zesluik illustreert de vorming van de Ca II K lijn volgens Jefferies and Thomas (1960) die met deze analyse de basis legden voor de NLTE interpretatie van spectraallijnen van zon en sterren. Deze beschrijving was echter nog lang niet het laatste woord. Ten eerste treedt er ook nog partiële frequentieredistributie op zodat de lijnbronfunctie zelf frequentieafhankelijk is: verschillende delen van de lijn hebben hun eigen bronfunctie, die elk op zijn eigen manier van de Planckfunctie verschilt (Uitenbroek 1989). Ten tweede worden de kleine emissiepiekjes op de K_2 golfengtes in werkelijkheid uitsluitend veroorzaakt door gebieden op de zon met een verhoogde concentratie magneetveld. De werkelijke lijnvorming is dus ingewikkelder dan hier is geschetst.

8.2.2.5 Intensiteit en temperatuurverloop

Hoe komt het fotosferische temperatuurverloop in de spectraallijnen tot uiting? Bij LTE is dat duidelijk: $S_\nu = S_\nu^l = S_\nu^c = B_\nu[T(h)]$, en het lijnprofiel "tekent het $T(\tau_\nu)$ -verloop uit", gevouwen door het (sterk diepteafhankelijke) profiel van de extinctiecoëfficiënt en de temperatuurgevoeligheid van de Planckfunctie. De temperatuur loopt naar buiten af, dus de lijnen zijn absorptielijnen.

Maar als verstrooiing of fotonconversie belangrijk zijn is het mogelijk dat het waargenomen lijnprofiel niet veel zegt over het temperatuurverloop. Dat is bijvoorbeeld het geval in de kern van de Ca II K lijn: het feit dat de K_3 lijnkern donkerder is dan de K_2 emissiepiek impliceert niet dat de temperatuur na een een aanvankelijk stijgingje hogerop weer daalt, maar is het gevolg van de NLTE fotonverliezen in een verstrooiingslijn.

Bij de Ca II K lijn gaat LTE op in de lijnvleugels (hoe zie je dat in Figuur 8.8?). Het waargenomen intensiteitsverloop $I_\nu(0,1)$ voor $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 0.1-1$ nm kan dienen om het temperatuurverloop in de fotosfeer te bepalen. Welke grootheden moeten daartoe bekend zijn en hoe

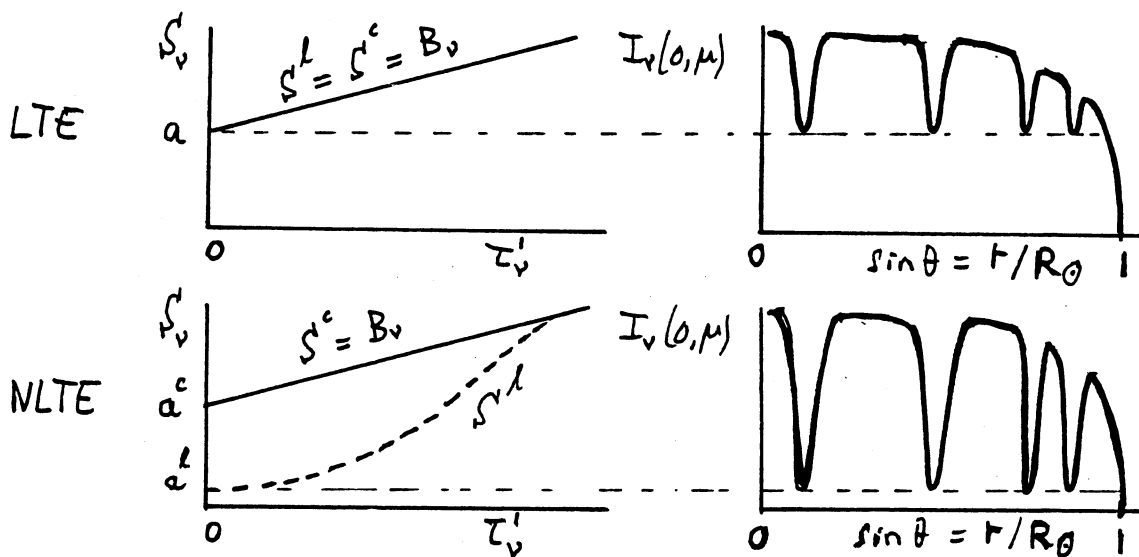
zou je dat aanpakken?

Violette spectraallijnen zakken veel dieper in dan overeenkomstige rode spectraallijnen voor gelijke $\alpha'_\nu(h)$ en gelijke $\tau'_{\nu^c}(h)$ schalen. Verklaar dat uit de temperatuurgevoeligheid van de Planckfunctie.

Spectraallijnen met $\lambda \leq 180 \text{ nm}$ en met $\lambda \geq 150 \mu\text{m}$ zijn geen absorptielijnen maar emissielijnen. Verklaar dat, bedenkend dat de continua bij 180 nm en 150 μm juist in het temperatuurminimum tussen fotosfeer en chromosfeer worden gevormd (Figuur 8.2), en dat spectraallijnen altijd hoger worden gevormd dan hun achtergrondcontinuum.

8.2.2.6 Centrum-rand verloop

Neem voor het gemak lineair naar buiten afvallende bronfuncties $S'_\nu = a' + b'\tau'_\nu$ en $S^c_\nu = a^c + b^c\tau'_\nu$, zodat de Eddington-Barbier benadering exact geldt (Figuur 8.9).



Figuur 8.9: Het midden-rand verloop van fotosferische spectraallijnen

Van het midden naar de rand van de waargenomen zonneschijf zakken de lijnen in omdat de totale bronfunctie naar buiten afneemt. Voor LTE geldt $S'_\nu = S^c_\nu$ en zakken de sterkste lijnen slechts in tot $I_\nu = a$; nabij de zonsrand verdwijnen ze helemaal. Als $\epsilon \ll 1$ valt S'_ν echter veel steiler af dan S^c_ν . De sterkste lijnen zijn dan veel dieper dan in LTE en ze verdwijnen niet bij de zonsrand ($a' \ll a^c$).

Bij de echte zon stijgt de temperatuur weer naar de chromosfeer. Naar de rand toe komt de straling uit hogere lagen; voor veel lijnen ligt de vormingshoogte nabij de zonsrand al boven het minimum in de temperatuur. Het feit dat deze lijnen geen emissiekernen vertonen nabij de zonsrand bewijst dat ze $\epsilon \ll 1$ hebben, dus een NLTE bronfunctie.

8.2.2.7 Buiten de rand

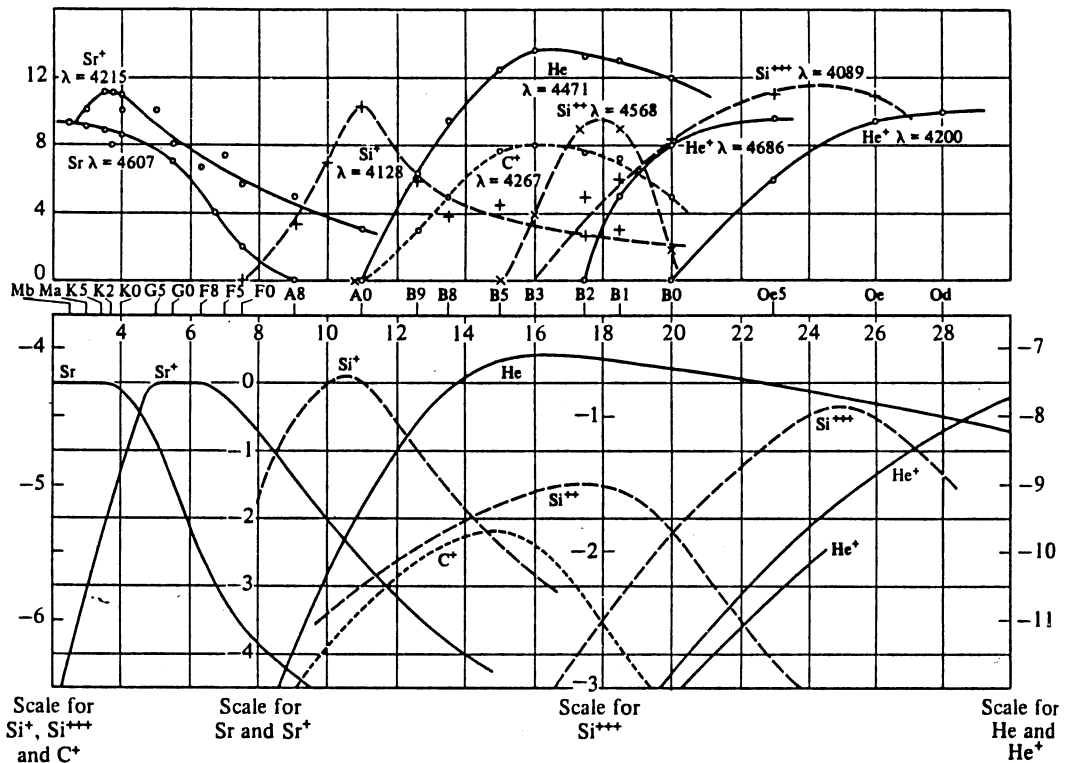
Voorbij de zonsrand worden alle lijnen emissielijnen, ongeacht hun vormingswijze. (Waarom? Bedenk dat de "zonsrand" gezien wordt waar de totale continue optische dikte van de zon langs de gezichtslijn ongeveer 1 is.) Voor gezichtslijnen voldoende ver buiten de zonsrand wordt de zon ook optisch dun in de sterkste lijnen. Dan is de intensiteit van zo'n lijn recht evenredig met de populatie van het bovenniveau (waarom?).

De sterkste visuele lijn in het eclipspectrum is H α : te zien als purperen randje om de zon bij het begin en eind van een totale zonsverduistering. Vandaar de naam chromosfeer.

8.2.3 Spectra van sterfotosferen

Met de inzichten hierboven vallen de meeste fotosferische lijnen in het zonnenspectrum (dat zijn de lijnen in het visuele specraalgebied, waarom?) goed te begrijpen. Daarmee is de spec-

trometrie van sterfotografen een "klassiek" vak geworden. Meestal wordt LTE aangenomen en is abundantiebepaling het doel.



Figuur 8.10: Spectraalclassificatie. De bovenste grafiek geeft schattingen (op het oog, van fotografische platen) van de sterktes van representatieve spectraallijnen als functie van het heuristisch geïntroduceerde spectraaltype. Eronder bezettingsverhoudingen als functie van de temperatuur, berekend uit Saha en Boltzmann voor $P_e = 131 \text{ dyne cm}^{-2}$. Naar Payne.

De verschillen in sterspectra door het HR-diagram liggen echter nauwelijks in abundantieverschillen, maar vooral in de effecten van T_e en P_e op Boltzmann en Saha, dus op de populaties. Dat was lange tijd niet duidelijk; de spectraalclassificatie bestond al lang voordat de rol van de temperatuur duidelijk werd en het Hertzsprung-Russell diagram kon worden vertaald van pure empirie naar astrofysica. Dat gebeurde in het beroemdste proefschrift in de sterrekunde, van Cecilia Payne (1925, Harvard): spectraalclassificatie bleek temperatuurclassificatie te zijn (Figuur 8.10).

De continue extinctiemechanismen verlopen door het HR-diagram. In koele sterren zoals de zon komt waterstof vooral voor als neutraal atoom en overwegen H_{bf}^- in het visuele spectraalbereik en H_{ff}^- in het infrarood. De hierbij gebruikte vrije electronen komen van de ionisatie van die metalen die zowel een redelijke abundantie als een lage ionisatiepotentiaal hebben: Na, Mg, Al, Si, Ca en Fe. In de zonnefotosfeer zijn die overwegend éénmaal geïoniseerd. LTE is een goede aanname voor deze processen omdat ze met botsingen gepaard gaan. Verder treedt er bij G en K sterren ook Rayleighverstrooiing op aan waterstof. Dat is vooral belangrijk in het visueel omdat de resonantielijnen van waterstof, *i.e.* de Lymanlijnen, in het verre ultraviolet liggen (hoe zit dat?) en vooral voor Populatie II sterren met weinig metalen (waarom?). De spectraallijnen komen vooral van neutrale metalen (visueel) en éénmaal geïoniseerde metalen (nabije ultraviolet), met enkele molecuulbanden.

In hetere sterren is waterstof echter meest geïoniseerd en doet H^- niet meer mee; de meeste vrije electronen komen daar van waterstof. Thomsonverstrooiing levert een grote bijdrage aan de continue extinctie in O sterren, met als gevolg dat voor de corresponderende continua geen LTE kan worden aangenomen. De zo verstrooide fotonen zijn dan veelal in H_{ff} processen gecreëerd. In O sterren doet verder ook He II mee (de $n = 2$ ionisatiekant valt samen met het Lymancontinuum, waarom?) en in B sterren He I. De metalen zijn allang

geïoniseerd en daarom tonen de visuele spectra maar weinig lijnen (de neutrale trappen van metalen zoals Fe I hebben veel lijnen in het zichtbaar; voor hogere ionisatietrappen zijn de electronensprongen groter zodat hun lijnen in het ultraviolet liggen). Veel belangrijke resonantielijnen liggen voorbij de Lymangrens (91.2 nm) en zijn nog niet waargenomen.

Tussen de hete en de koude sterren zitten de A sterren; daarin dragen H_2^+ ionen aan de extinctie bij: een geïoniseerd molecuul met twee protonen en één electron.

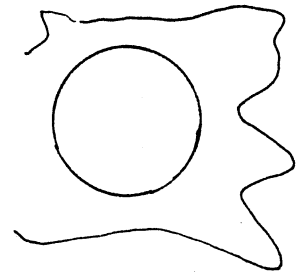
Bij de koudste sterren is er veel Rayleighverstrooiing aan moleculen, vooral aan H_2 . Daar draagt ook H_2^- op lange golflengten bij met ff processen. Het lijnenspectrum van M sterren wordt overheerst door sterke molecuulbanden, vooral in het infrarood waarin de meeste vibratie- en rotatieovergangen liggen. Als er meer koolstof dan zuurstof in de ster zit is alle zuurstof in CO opgebruikt en zijn er daarnaast koolstofverbindingen aanwezig (e.g. C_2 , CN, HCN, C_2N_2 , SiC_2); andersom zit alle koolstof in CO en zijn er daarnaast zuurstofverbindingen (e.g. OH, H_2O , TiO, ZrO, VO).

8.3 Steromhulsels

8.3.1 Stercorona's

Corona's zijn zeer hete ($T_e \geq 10^6$ K), ijle ($N_e \leq 10^7$ cm $^{-3}$), min of meer bolvormige omhulsels van sterren. De meeste laat-type sterren hebben een corona; hier bespreken wij stralingsprocessen in de zonnecorona.

Bij $T_e = 10^6$ K is de zonnecorona voor $\lambda \leq 10$ cm optisch dun. Dat betekent dat er geen stralingstransportcomplicaties zijn: specificatie van de rate vergelijkingen levert direct de uittredende intensiteiten. De situatie is echter ver van LTE, zodat voor deze specificatie alle mogelijke bevolkingsprocessen moeten worden afgeturfd op hun belang en de overblijvende expliciet moeten worden geëvalueerd. Tabel 8.1 geeft een overzicht van de atomaire processen; in de corona slaan die vooral op ionen omdat de combinatie van zeer hoge temperatuur en lage dichtheid leidt tot hoge ionisatiegraad.



Process	Incoming	Outgoing	Rate
Absorption	photon + atom	excited atom	$u_\nu B_{mn} N_m$
Stimulated emission	phot. + excited atom	2 phots. + atom	$u_\nu B_{nm} N_n$
Spontaneous emission	excited atom	photon + atom	$N_{nm} A_{nm}$
Photo-ionization	photon + atom	ion + electron	$u_\nu N_m B_{m\kappa}$
2-Body recombination	electron + ion	photon + atom	$N_e N_i A_{\kappa m}$
Dielectronic Recomb.	electron + ion	phot. + excited atom	$N_e N_i \alpha_{diel}$
Dielectronic Absorption (Auto-ionization)	phot. + excited atom	ion + electron	$N_n u_\nu \kappa_{diel}$
Thomson scattering	photon + electron	phot. + electron	$\sigma_T N_e$
Free-free emission (Bremsstrahlung)	electron + ion	elec. + ion + phot.	$N_e N_i \kappa \kappa'$
Free-free absorption	phot.+electron+ion	phot. + elec. + ion	$N_e N_i B_{\kappa' \kappa} u_\nu$
Collisional excitation	electron + atom	elec. + excited atoms	$N_m N_e C_{mn}$
Collisional de-excitation	elec.+ excited atom	electron + atom	$N_n N_e C_{nm}$
Collisional Ionization	electron + atom	2 electrons + atom	$N_m N_e C_{m\kappa}$
3-Body Recombination	2 elecs. + atom	electron + atom	$N_e^2 N_i C_{\kappa m}$

Tabel 8.1: *Atomaire processen. Naar Zirin.*

Excitatie en ionisatie door straling en ook de geïnduceerde stralingsprocessen zijn in co-

ronale omstandigheden verwaarloosbaar ten opzichte van de corresponderende botsingsprocessen omdat de typische stralingstemperatuur $T_{\text{eff}} \approx 6000$ K van het uit de onderliggende fotosfeer afkomstige stralingsveld ter plaatse veel lager is dan de electronentemperatuur $T_e \approx 10^6$ K. Dus gaat excitatie door botsingsexcitatie, stralingsexcitatie is verwaarloosbaar:



$$P_{lu} \approx C_{lu};$$

ionisatie gaat door botsingsionisatie, stralingsionisatie is verwaarloosbaar:

$$P_{lk} \approx C_{lk};$$

deëxcitatie gaat door spontane stralingsdeëxcitatie, botsingsdeëxcitatie en geïnduceerde deëxcitatie zijn verwaarloosbaar:



$$P_{ul} \approx A_{ul};$$

recombinatie gaat door stralingsrecombinatie, botsingsrecombinatie en geïnduceerde stralingsrecombinatie zijn verwaarloosbaar:

$$P_{kl} \approx A_{kl}^{\text{bf}}. \quad (8.1)$$

met A_{kl}^{bf} een aan de Einsteincoëfficiënt A_{ul} analoge overgangswaarschijnlijkheid voor spontane stralingsrecombinatie. Daarmee worden de populatievergelijkingen

$$\frac{dn_i}{dt} \approx \sum_{j < i} (n_j C_{ij} - n_i A_{ij}) + \sum_{i < j} (n_j A_{ji} - n_i C_{ij}),$$

(met A_{ki}^{bf} ook genoteerd als A_{ji}). Voor de excitatie binnen een twee-niveau atoom wordt dit bij statistisch evenwicht:

$$n_1 C_{12} = n_1 N_e \int_{v_0}^{\infty} \sigma_{12} f(v) v dv \approx n_2 A_{21},$$

waarmee de populatieverhouding $n_2/n_1 \approx C_{12}/A_{21}$ niet alleen afhangt van de temperatuur (die zit in de snelheidsverdeling $f(v)$) maar ook van de electronendichtheid, en ver beneden de (alleen temperatuur-afhankelijke) Boltzmannverhouding $n_2/n_1 = C_{12}/C_{21}$ blijft welke pas wordt gehaald voor veel grotere dichtheid. De twee-niveau fotondestructiekans $\epsilon_\nu \approx C_{ul}/A_{ul}$ is heel klein; de twee-niveau lijnbronfunctie wordt

$$S_\nu^l \approx J_\nu \approx (1/2) B_\nu(T_{\text{eff}}) \ll B_\nu(T_e)$$

in overeenstemming met

$$S_\nu^l \approx \frac{b_u}{b_l} B_\nu(T_e).$$

Weliswaar wordt de excitatie door botsingen verzorgd, *i.e.* met kennis van de locale temperatuur, maar de botsingsfrequentie is te gering om de bezetting van het aangeslagen niveau op Boltzmann peil te houden. Elk aangeslagen ion valt meteen spontaan terug, het ontsnappen van het bb foton representeert een groot NLTE energielek; lokaal gedetailleerd evenwicht, hetgeen evenveel botsingen omlaag als botsingen omhoog vereist, wordt bij lange na niet gehaald.

Voor het bf ionisatie-evenwicht valt de electronendichtheid er daarentegen juist uit omdat een ion wél lang zit te wachten op een passerend electron voor fotorecombinatie. De kans daarop is evenredig met de electronendichtheid, net als de botsingsionisatie; de rate vergelijkingen resulteren derhalve in Boltzmann-achtige ionisatieverhoudingen die alleen afhangen van de temperatuur, hetgeen hun berekening sterk vereenvoudigt en diagnostische toepassing vergemakkelijkt. De formule van Saha voor de TE ionisatieverhouding hangt daarentegen wel af van N_e ; dat komt omdat botsingsrecombinatie evenredig is met N_e^2 . Het tweede botsende electron in dit drie-deeltjes proces levert de Saha N_e maar telt pas als botsingen voldoende domineren. In coronale omstandigheden zijn de N_e afhankelijkheden van excitatie en ionisatie dus juist verwisseld ten opzichte van TE omstandigheden.

Chunen) printer mistake

Hoofdstuk 4

Straling en materie in TE

4.1 Inleiding: thermodynamisch evenwicht

In dit hoofdstuk vervolgen we de vooralsnog macroscopische beschrijving met een discussie van ensemblegemiddelden. Die dienen om de hoeveelheid deeltjes en fotonen van een gegeven type die in een medium aanwezig zijn te specificeren. Middelen over ensembles gaat het eenvoudigst in *evenwichtssituaties*. Daarin zijn diverse gradaties, in dit hoofdstuk beperken we ons tot de veronderstelling van *thermodynamisch evenwicht* (TE).

In TE zijn *alle* processen en toestanden met elkaar in evenwicht. Elk proces is in microscopisch evenwicht met zijn omgekeerde: er is *gedetailleerd evenwicht* ("detailed balancing"). Alle macroscopische equipartitiewetten gelden, en wel met voor alle *dezelfde* temperatuur. Voor de *straling* zijn dat de wetten van Kirchhoff, Planck, Wien en Stefan-Boltzmann; voor de *materie* zijn dat de wetten van Maxwell, Boltzmann en Saha.

TE is de meest strikte vorm van evenwicht, en komt in de natuur niet veel voor. Verderop zullen de hier beschreven TE wetten ook gebruikt worden voor situaties met minder stringente evenwichtsvoorwaarden (zoals voor LTE = Lokaal TE, waarbij de temperatuur langzaam mag variëren door het medium), en om afwijkingen van de wetten te beschrijven.

Straling kan met materie in evenwicht verkeren dank zij het feit dat fotonen massaloos zijn. Anders dan voor fermionen geldt er voor fotonen geen Pauli-uitsluitingsprincipe zodat ongelimiteerde creatie en destructie van fotonen mogelijk zijn, en daarmee de instelling van een evenwicht.

4.2 TE Stralingswetten

4.2.1 Kirchhoff

TE geldt in een homogeen, isotherm, isotroop medium, bijvoorbeeld in een door isotherme wanden omsloten medium na voldoende verloop van tijd. Dan geldt volgens (3.6) voor *elke* bundel, op *elke* frequentie en op *elk* tijdstip:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu = 0 \quad \text{---} \quad j_\nu = \alpha_\nu I_\nu \quad (4.1)$$

Dit is een wet van Kirchhoff. Een andere wet van Kirchhoff is dat de intensiteit in een TE-medium isotroop is, en uitsluitend afhangt van de frequentie en de temperatuur:

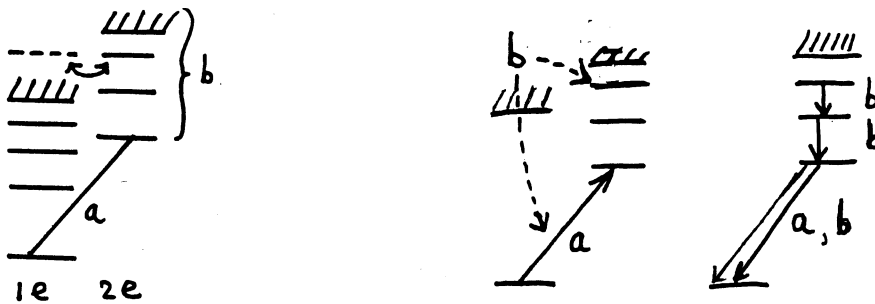
$$I_\nu \equiv B_\nu(T), \quad (4.2)$$

ongeacht de aard van het medium. Hierin is B_ν de Planckfunctie. Tezamen leveren de twee wetten dat in TE geldt:

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T), \quad (4.3)$$

dus is de bronfunctie $S_\nu \equiv j_\nu / \alpha_\nu$ in TE overal gelijk aan de Planckfunctie B_ν .

Deze beschrijving van de bb en bf processen is onvolledig. In coronale omstandigheden moet ook rekening worden gehouden met *diëlectronische processen*, waarbij twee electronen tegelijk energiesprongen maken. Configuraties waarin twee electronen tegelijk zijn aangeslagen kunnen *autoionisatie*-energieniveaus hebben, gelegen boven de ionisatiegrens van de configuratie voor een enkel valentie-electron. Aanslag van zo'n niveau kan ionisatie leveren door een stralingsloze overgang waarbij het ene electron vrijkomt: *autoionisatie*. Dat zal gebeuren als een reeds aangeslagen atoom een voor tweede excitatie geschikt foton of electron ontmoet; de kans daarop is in coronale omstandigheden echter klein omdat voor beiden de ontmoetingsfrequentie klein is ten opzichte van de spontane deëxcitatie-snelheid.



Figuur 8.11: *Diëlectronische recombinitie*. Een energetisch vrij electron slaat een gebonden electron in een ion aan terwijl het wordt ingevangen in een ander aangeslagen niveau. Spontane deëxcitatie van beide electronen, eventueel in een cascaderieks, levert lijnfotonen en laat het ion achter in de grondtoestand, één ionisatietrap lager.

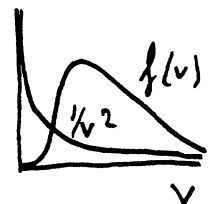
Het omgekeerde proces, diëlectronische recombinitie, is echter wel belangrijk. Daarbij slaat een langskomend energetisch electron een gebonden electron aan en wordt tegelijk zelf ingevangen in een autoionisatietoestand. Daaruit kan het per stralingsloze overgang weer vrij komen maar ook kan dubbele spontane stralingsdeëxcitatie van beide electronen (waarvoor weer alle tijd is) overgang naar de grondtoestand van het lagere ion leveren. Bij hoge temperatuur is dit recombinitieproces efficiënter dan stralingsrecombinitie, in de zonnecorona zo'n tien keer, omdat de botsingsaanslag van het gebonden electron helpt de kinetische energie van het in te vangen electron op maat te snijden zodat veel energetischer electronen mee kunnen doen dan alleen degenen binnen de tamelijk nauwe ionisatiekanten. (Langzamere electronen worden makkelijker ingevangen: de vangstdoorsnede σ_{fb} voor fotorecombinitie neemt voor waterstofachtige ionen immers kwadratisch af met de electronenergie: $\sigma_{fb} \sim 1/v^2$. Energieverlies aan extra bb excitatie compenseert deze afname.)

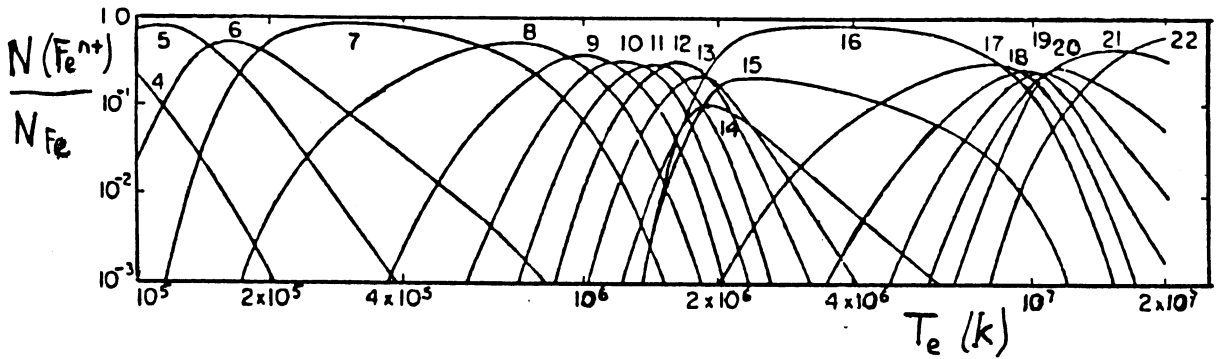
De verhouding tussen de kans op fotorecombinitie en de kans op diëlectronische recombinitie hangt alleen af van T_e en niet van N_e , waarom? De conclusie hierboven dat de ionisatie-evenwichten alleen van de temperatuur afhangen verandert dus niet. Bij hoge temperatuur wint diëlectronische recombinitie omdat de top van de Maxwellverdeling en de $1/v^2$ -afhankelijkheid van de fotorecombinitie bij toenemende temperatuur verder uiteen schuiven.

Figuur 8.12 toont coronale ionisatieverhoudingen in een Cecilia Payne-achtig diagram van Carole Jordan voor de opeenvolgende ionisatietrappen van ijzer. Per temperatuur zijn er meerdere ionisatietrappen tegelijk aanwezig. De trappen met volle schillen zijn moeilijk te ioniseren en vertonen een brede aanwezigheidspiek (16+). De ionen daaronder (6+, 7+, 15+) hebben veel diëlectronische recombinitie hetgeen een lange aanwezigheidsstaart naar hoge energie levert.

Door de lage dichtheid stellen de ionisatie-evenwichten zich langzaam in: na een temperatuurver storing ijlen ze nog enkele minuten na. De instelling van statistisch evenwicht tussen de populaties duurt nog langer.

De vele diëlectronische recombinities dragen bij aan de spectraallijnen: elke recombinitie wordt immers door twee bb emissies gevolgd, of nog meer als het pad van aangeslagen niveau naar grondtoestand via tussenliggende niveaus gaat. Dat levert een *cascadespectrum*, typerend voor omstandigheden waarin recombinitie naar aangeslagen niveaus belangrijk is. De spectraallijnen kunnen dus veel sterker zijn dan de twee-niveau benadering aangeeft.





Figuur 8.12: Ionisatietrappen van ijzer in de zonnecorona. Naar Jordan.

De electronentemperatuur T_e wordt door de grote vrije weglengtes der deeltjes over grote afstanden geëgaliseerd. Als er magnetisch veld aanwezig is gebeurt dit echter alleen evenwijdig aan het magneetveld, niet loodrecht erop, omdat de electronen dan om de veldlijnen spiralisieren (coronale lussen). Dwars op de veldlijnen zijn dan grote temperatuur- en dichtheidsgradiënten mogelijk. Die treden inderdaad op omdat – blijkbaar – de dissipatie van “mechanische” energie via zulke magnetische structuren gaat. Deze zorgen zo voor scherp bepaalde structuren in de toestandparameters en daarmee in de emissiecoëfficiënten; dankzij het optisch dun zijn van de stralingsvelden zijn deze structuren ook goed waarneembaar. De beste Röntgenfoto’s van de zon (raketvlucht met NIXT-camera, september 1989) tonen coronale fijnstructuur tot op de instrumentele resolutie van 1 boogseconde.

8.3.1.1 Röntgenstraling van de zonnecorona

Het coronale Röntgenspectrum bestaat uit overlappende seriegrenscontinua met daarop gesuperponeerde emissielijnen (waarom in emissie?), zie Figuur 8.13. Er zijn meerdere ionisatietrappen te zien, hier zeven van ijzer tegelijk, die goede temperatuuriagnostiek leveren. Coronale Röntgenspectra zijn zeer rijk aan spectraallijnen.

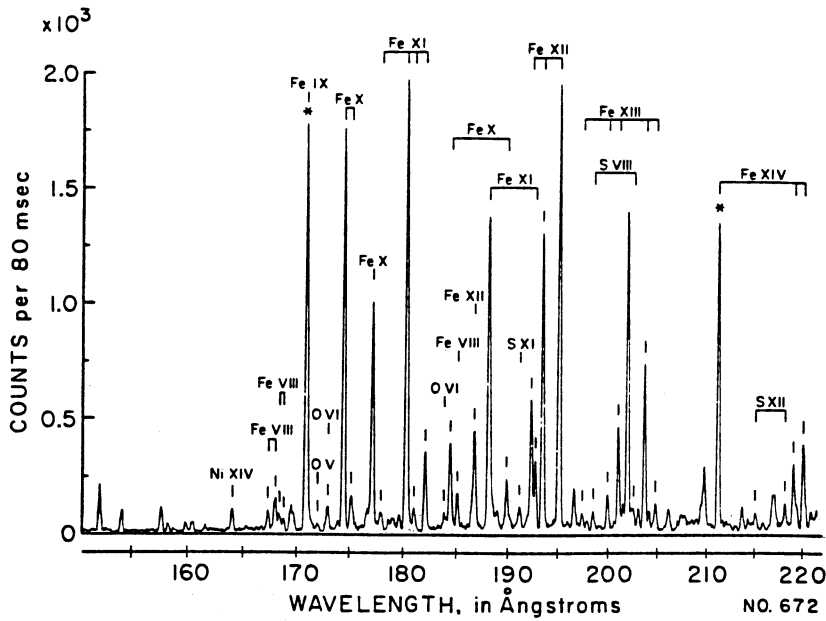
Elk foton representeert de destructie van thermische energie en verdwijnt uit het lokale medium: elk foton levert *stralingsverlies*. De lijnsterktes zijn evenredig met $n_u A_{ul}$ (waarom?), per spectraallijn is dit verlies evenredig met $N_e N_{II}$ (waarom?), en omdat ruwweg geldt $N_e = N_H(1 + 2B)$ met B^1 de fractie N_{He}/N_H volgt dat het verlies per overgang evenredig is met N_H^2 . De optelsom over alle lijnen en continua levert dan het totale stralingsverlies; Figuur 8.14 geeft een voorbeeld als functie van de temperatuur. De getoonde kromme is onbetrouwbaar voor $T_e \leq 5 \times 10^4$ K omdat de corona daarvoor niet meer optisch dun is in de sterkste lijnen zoals Ly α . Wel is de corona daarin nog effectief dun zodat alle gecreeerde fotonen nog steeds meetellen, maar de term $B_{ij} J_\nu$ doet dan mee in de excitatieprocessen zodat de populaties ook van het stralingsveld afhangen.

8.3.1.2 Visuele straling van de zonnecorona

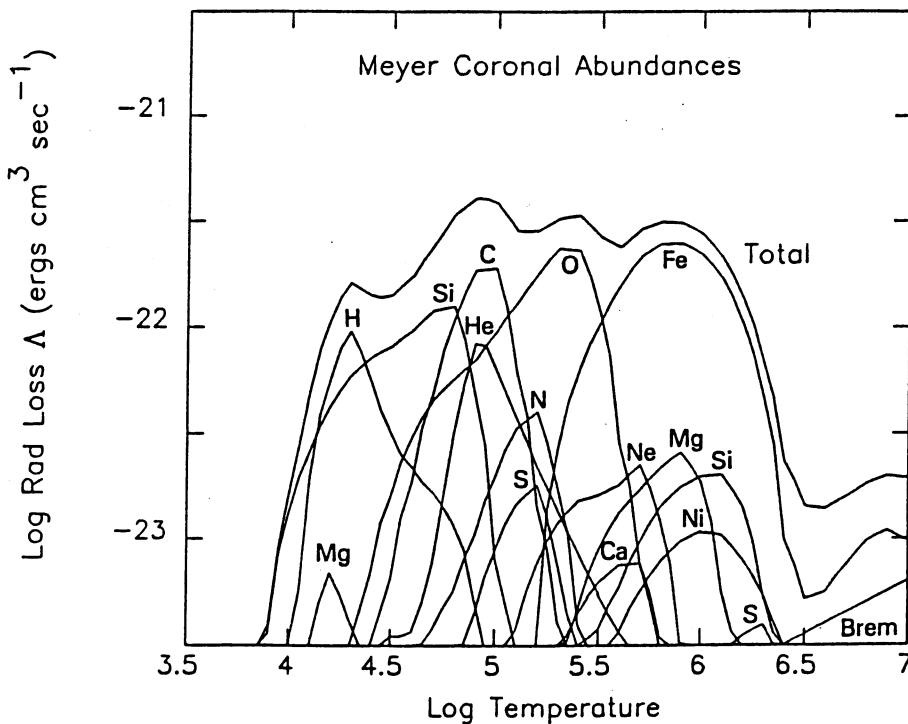
Er zijn diverse “corona’s” = lichtkransen om de zon te zien, zie Figuur 8.15.

De F-corona ontstaat ten gevolge van verstrooiing van fotosferisch zonlicht aan interplanetair stof met doorsnede $d \approx 1 \mu\text{m} \approx \lambda$; deze verstrooiing is daarom “wit” ($\sim \lambda^0$) en sterk voorwaarts gepiekt. De verstrooiing is elastisch dus het spectrum ervan is het fotosferische lijnenspectrum (*Fraunhoferspectrum*, vandaar de F). Omdat deze fotonen vooral voorwaarts zijn verstrooid komen ze vanaf de aarde gezien vooral van nabij de zon: de intensiteit neemt toe naar de zon toe. Dat geldt ook voor de hemelachtergrond bij gesluisde hemel, ten gevolge van de verstrooiing aan aardse stof en waterdruppeltjes. Bij heldere hemel overweegt

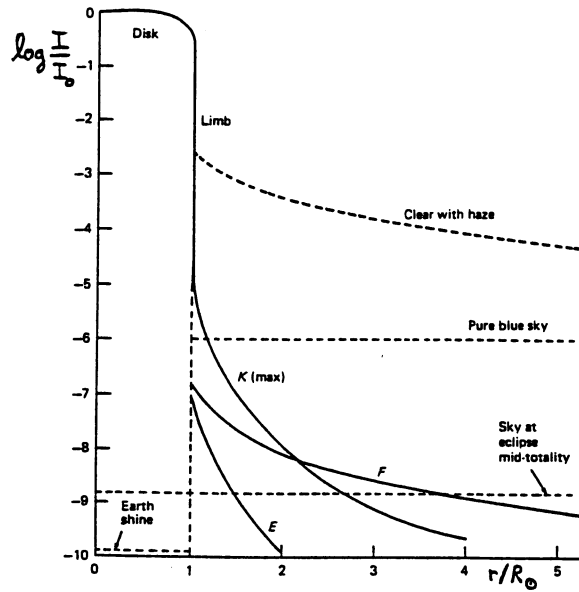
¹NBB: Deze B is de vijfde B in dit dictaat.



Figuur 8.13: Een Röntgenspectrum van de zon, opgenomen vanuit een raket. Plasma's die in coronale omstandigheden verkeren (optisch dun, heet en ijl) produceren spectra met een overvloed aan emissielijnen van hoge ionisatietrappen.



Figuur 8.14: Stralingsverlieskromme. Verticaal staat het energieverlies ten gevolge van fotonemissie gedeeld door het product van electronendichtheid N_e en waterstofdichtheid N_H , horizontaal de temperatuur. De kromme geldt voor een optisch dun gasmengsel met abundanties zoals in de zon (Cook et al. 1989).



Figuur 8.15: De visuele corona van de zon. De eigen straling van de zonnecorona valt af met de afstand tot de zonsrand volgens de kromme K. Deze wisselt met de zonsactiviteit. De F corona beschrijft de bijdrage aan de rond de zon waargenomen intensiteit ten gevolge van verstrooiing aan interplanetair stof. De "aardschijn" is wat van de maan tijdens een totale zonsverduistering wordt terugontvangen. Naar Van de Hulst.

Rayleighverstrooiing aan moleculen echter, met de bijbehorende dipoolfasefunctie, en is er nauwelijks toename. (Een goed criterium voor hemelhelderheid is dan ook om je duim voor de zon te houden en te kijken tot hoe dicht bij de zon het blauw doorloopt.)

De K corona beschrijft de straling van de corona zelf, i.e. de emissie uit de ijle hete gasschil om de zon. De grootste bijdrage aan de continue extinctie (en emissie) wordt gegeven door Thomsonverstrooiing. De electronen bewegen met gemiddelde snelheid

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{2kT}{m_e}} \approx 10^9 \text{ cm s}^{-1},$$

dus de bijbehorende typische Dopplerverschuiving is

$$\Delta\lambda_D = \lambda \frac{\bar{v}}{c} \approx 10 \text{ nm.}$$

in het DRS

Deze verschuivingen zijn heel groot; hoewel de verstrooiing elastisch is (monochromatisch), wordt het aanstralende Fraunhoferlijnspectrum uitgewist. Alleen van de allerbreedste lijnen blijft nog wat over, met name van de Ca II H en K lijnen twee brede ondiepe absorptiekuilen; op grond daarvan stelde Grotrian als eerste voor dat de corona snelle verstrooiende electronen bevat, en dus heel heet moet zijn.

golflengte	identificatie	$\Delta\lambda_D$	\bar{v}	A_{ul}
530.3 nm	[Fe XIV]	0.051 nm	29 km/s	60 s^{-1}
569.4	[Ca XV]	0.087	46	95
637.4	[Fe XI]	0.049	23	69

Tekenen vormen deze de E-corona.

Tabel 8.2: Coronale emissielijnen in het visuele eclipspectrum.

Daarnaast toont het visuele spectrum enkele beroemde emissielijnen, zie Tabel 8.2. Dit zijn *verboden* overgangen met $A_{ul} \approx 10^2 \text{ s}^{-1}$ (de notatie [Fe XIV] betekent een verboden overgang uit het spectrum van Fe^{13+}). Alle toegestane overgangen (met $A_{ul} \approx 10^1 - 10^8 \text{ s}^{-1}$)

liggen voor zulke hoge ionisatietrappen in het verre ultraviolet en het Röntgengebied). Uit de aanname dat de waargenomen lijnbreedte door thermische Dopplerverschuivingen wordt veroorzaakt levert $\bar{\nu}$ de temperatuur: $T \approx 2 - 5 \times 10^6$ K. De [Ca XV] lijn is alleen in sterk actieve gebieden waarneembaar; daar is de corona blijikbaar heter.

Waarom zijn deze lijnen te zien hoewel ze verboden zijn? Wederom dankzij de combinatie van zeer hoge temperatuur en lage dichtheid: zelfs voor deze lange verblijfsduren in het bovenniveau overweegt stralingsdeëxcitatie over botsingsdeëxcitatie.

Deze coronale lijnen waren lang een raadsel. Ze zijn zeer sterk in coronaspectra opgenomen tijdens totale zonsverduisteringen; bij "coronale hemel" (blauw tot op je duim) kunnen ze ook gemeten worden met een *coronograaf*: een telescoop met een zonsverduisterende schijf erin. Ze werden al toegeschreven aan een nieuw element *Coronium* hoewel daar in het periodiek systeem geen plaats meer voor was. Uiteindelijk verschaften Grotrian en Edlén met bovenstaande identificaties de verklaring.

8.3.1.3 Radiostraling van de zonnecorona

Figuur 8.16 toont het verloop fotosfeer-aardbaan van 3 karakteristieke frequenties:

1. $\nu_B =$ gyrofrequentie $= 2.8 \times 10^6 B$, met B in Gauss.
Cyclotronstraling treedt op voor $\nu = (1 - 5) \times \nu_B$; synchrotronstraling voor $\nu = (10 - 1000) \times \nu_B$. Van belang voor $9 < \log \nu < 12$, en alleen in actieve gebieden (waarom?).
2. $\nu_p =$ plasmafrequentie $= 9 \times 10^3 \sqrt{N_e}$.
Er is geen golfvoortplanting voor $\nu < \nu_p$. Sterke *plasmastraling* kan opgewekt worden door exciterende verstoringen met frequentie $\nu = \nu_p$ en op de hogere harmonischen $\nu = 2\nu_p$ etc. Zulke plasmastraling overweegt in de zonnewind nabij de aarde voor frequenties $\nu < 1$ GHz. Meting daarvan gebeurt met ruimtevoertuigen omdat de ionosfeer ($\nu_p \approx 10^7$ Hz) ondoorzichtig is voor zulke lange golven.
3. $\nu(\tau_{ff} = 1) =$ frequentie waarop de continue remstralingsextinctie over één schaalhoogte een optische dikte $\tau_{ff} = 1$ bereikt. Dus is de corona voor de ff processen optisch dun rechts van de gestreepte kromme en optisch dik links ervan; de kromme geeft aan waar thermische remstralingsfotonen van die frequentie typisch vandaan komen.

De thermische remstraling levert de temperatuur. De waargenomen antennetemperatuur is:

$$T_A \equiv \eta_A T_b = T(0) e^{-\tau} + T_{\text{cor}} (1 - e^{-\tau})$$

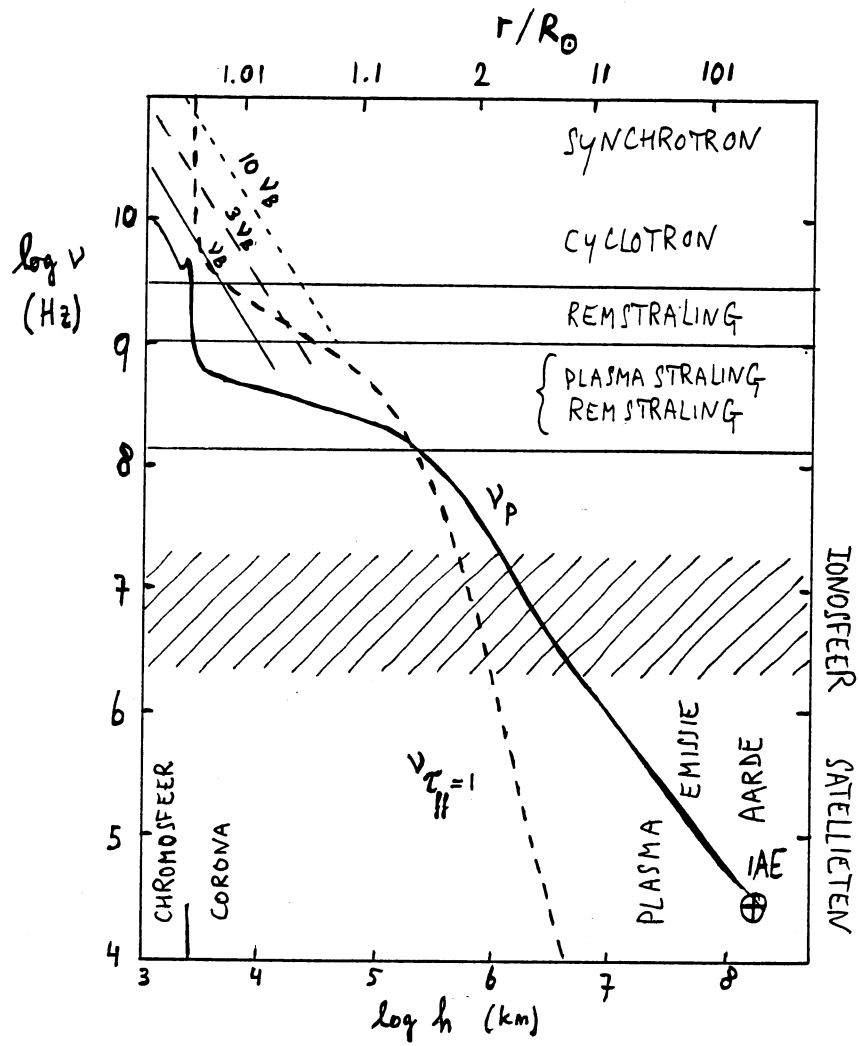
zodat de coronale temperatuur T_{cor} gemeten wordt mits $\tau_{ff} > 1$. Dat gaat echter niet op voor plaatsen met $\nu(\tau_{ff} = 1) < \nu_p$ want dan treedt op de meetfrequentie buiging op voordat die diepte gehaald is (Figuur 8.17). Het gaat wel goed voor $10^8 < \nu < 10^9$ Hz omdat op die frequenties ν_p dieper bereikt wordt dan $\tau_{ff} = 1$. Op $\nu \approx 150$ MHz steekt het omkeerpunt bijvoorbeeld tot op $\tau_{ff} \approx 5$.

Ook al ligt de locatie met $\nu = \nu_p$ voor $10^8 < \nu < 10^9$ Hz veel dieper dan $\tau_{ff} = 1$ is er plasmastraling op die frequenties waarneembaar omdat:

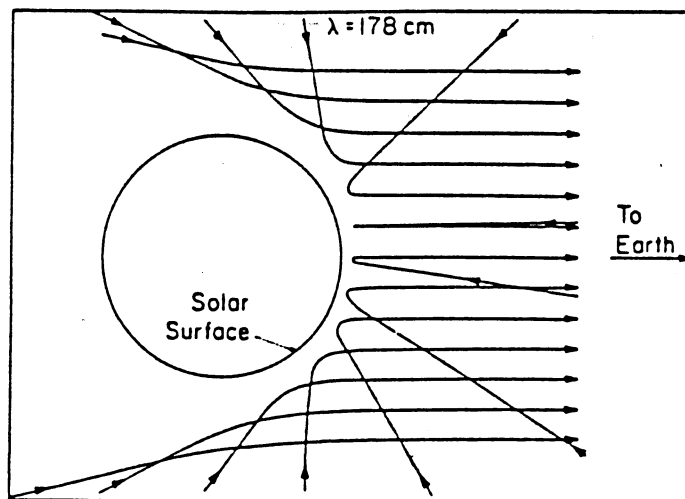
- de helderheidstemperatuur in de actiefste gebieden wel $T_b \approx 10^{15}$ K kan bereiken. Met $\tau = 10$ en $e^{-\tau} = 2 \times 10^{-4}$ blijft daar toch nog $T_b = 10^{10}$ K van over;
- de corona sterk inhomogeen is, dus $\tau_{ff=1}$ sterk fluctueert. Straling uit een optisch dikke coronale lus kan tussen de lussen ontsnappen.

In het laagfrequente deel (30 kHz — 1 GHz) ziet men *uitbarstingen* met negatieve frequentiedrift, veroorzaakt door een schokfront (*Type II*) of een snelle bundel electronen (*Type III*) die zich naar buiten verplaatsen in de corona. De plasmastraling volgt dan ν_p , dus de frequentie verschuift $\sim \sqrt{N_e}$ ter plekke.

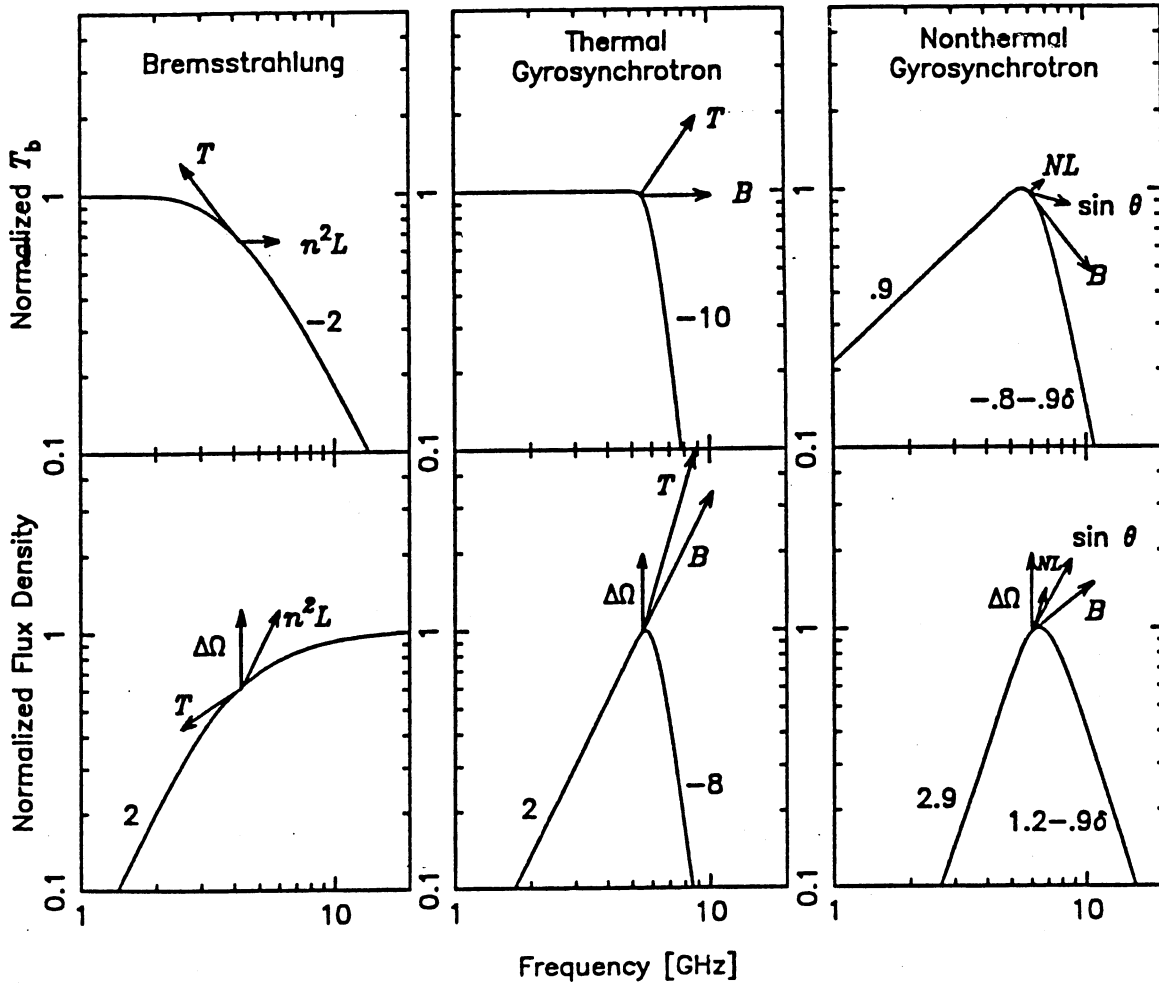
Het hoogfrequente deel (1 GHz — 30 GHz) wordt gedomineerd door gyrostraling. Figuur 8.18 toont karakteristieke spectra voor homogene bronnen. De hellingen zijn aangegeven en de pijlen tonen hoe de krommes verschuiven bij toename van de diverse parameters.



Figuur 8.16: Drie karakteristieke radiofrequenties tussen zon en aarde: de gyrofrequentie ν_B , de plasmafrequentie ν_p en de vormingsfrequentie ν_f^f . Naar preprint Gary en Hurford.



Figuur 8.17: Buiging en reflectie van radiostraling in de corona. Hier is bolsymmetrie aangenomen; in werkelijkheid is de corona sterk inhomogeen.



Figuur 8.18: Karakteristieke radiospectra voor remstraling, thermische synchrotronstraling en niet-thermische synchrotronstraling, als irradiantie (onder) en als helderheidstemperatuur (boven). De getallen geven de helling; in deze dubbellogarithmische grafieken is dat de macht van de frequentieafhankelijkheid. De pijlen geven aan in welke richting de krommes verschuiven (ruwweg met vormbehoud) bij variatie over een factor twee van de parameters n (electronendichtheid), T (temperatuur), B (magneetveldsterkte), L (laagdikte), N (aantal snelle deeltjes boven de drempelenergie), θ (spoedhoek van de spiraalbeweging) en δ (machtsspectrumindex voor de deeltjesenergieverdeling $n(E) = kE^{-\delta}$). Naar preprint Gary en Hurford.

Bekijk bijvoorbeeld het spectrum van remstraling (ff processen). Met Rayleigh-Jeans geldt $S_\nu = B_\nu = 2k\nu^2 T/c^2$ (waarom geldt LTE?), dus

$$T_b = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_\nu \begin{cases} = T_e & \text{voor } \tau_\nu \gg 1 \\ = T_e \tau_\nu = (c^2/2k\nu^2) j_\nu L & \text{voor } \tau_\nu \ll 1 \end{cases}$$

met L de brondiameter. De emissiecoëfficiënt heeft $j_\nu \sim N_e^2$, waarom? De fluxdichtheid (irradiantie) is:

$$R_\nu = \Delta\Omega I_\nu \begin{cases} = \Delta\Omega B_\nu & \text{voor } \tau_\nu \gg 1 \\ = \Delta\Omega j_\nu L = \Delta\Omega B_\nu k_\nu L & \text{voor } \tau_\nu \ll 1. \end{cases}$$

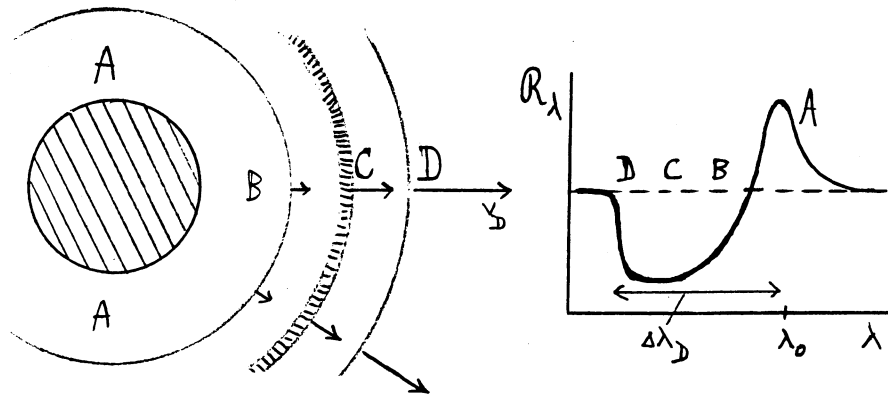
Let op de frequentieafhankelijkheid: voor T_b is die $\sim \nu^0$ voor $\tau \gg 1$ en $\sim \nu^{-2}$ voor $\tau \ll 1$; voor R_ν daarentegen $\sim \nu^2$ voor $\tau_\nu \gg 1$ en $\sim [\nu^2 \nu^{-3}(1 - e^{-h\nu/kT})] = \nu^0$ voor $\tau_\nu \ll 1$.

Bij de synchrotronspectra komen de spoedhoek θ , het magneetveld B , het aantal deeltjes N boven de drempelenergie en de machtsspectrumindex δ van de deeltjesenergieverdeling $n(E) = kE^{-\delta}$ er bij. De piek van de kromme ligt steeds op de frequentie met $\tau_\nu \approx 1$ (waarom?).

Deze krommes kunnen met waarnemingen vergeleken worden om tussen mechanismen te kiezen en om bronparameters te schatten. De bovenste figuren dienen dan ter vergelijking met opgeloste bronnen, terwijl de onderste ook gebruikt kunnen worden als de werkelijke brondiameter onbekend is (waarom?).

8.3.2 Sterwinden

Veel sterren stralen niet alleen fotonen en neutrino's de ruimte in als levensteken, maar blazen ook materie weg. De hydrodynamische zonnewind (verdampen van hete corona) interesseert ons binnen dit college niet maar de stralingsaangedreven winden van hete sterren wel. Ze vormen een uitgebreid chapter in de stralingstransporttheorie (zie Hoofdstukken 14 en 15 van Mihalas 1978). Aan de basis daarvan ligt de constatering dat de lijnextinctiecoëfficiënt bij systematische snelheidspatronen systematisch méé verschuift in golflengte.



Figuur 8.19: *P Cygni profielen. Een expanderende uitgebreide atmosfeer rond een hete ster levert spectraallijnen met een emissiepiek op de rustgolflengte en een absorptiekuil naar kortere golflengten.*

De vorming van *P Cygni profielen* is geometrisch bepaald. De niet verschoven emissielijn komt uit de delen van de uitgebreide atmosfeer terzijde van de ster (A in Figuur 8.19) die haaks op de gezichtsrichting expanderen en geen Dopplerverschuiving geven. (Waarom is die bijdrage in de vorm van emissie?) In de richting van de ster geven de lagen met de grootste expansiesnelheid de grootste blauwverschuiving in hun absorptiebijdrage (waarom absorptie?). Zulke *P Cygni profielen* zijn een goede indicatie van het optreden van een sterwind en massaverlies. Bij *P Cygni* zijn ze in het visuele spectrum te zien maar ze zijn

het markantst in de ultraviolette spectra van hete sterren omdat de resonantielijnen van de belangrijkste ionisatietrappen in het ultraviolet liggen. Met de eerste ultravioletspectrometer (Morton in 1967, met een raket waarvan de opvang mislukte en die van de zeebodem werd opgevist) werd verrassenderwijs gevonden dat O en B superreuzen Si IV lijnen hebben (140.28 nm en 154.95 nm) met uitstroomsnelheden tot op 2000 km s⁻¹. Dat is veel groter dan de ontsnappingssnelheid:

$$v_{\text{esc}} = 620 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ km s}^{-1}.$$

De visuele lijnen zijn afkomstig uit de fotosfeer of uit lagen vlak daarboven en bereiken slechts een eindsnelheid $v_D \approx 300 \text{ km s}^{-1}$, maar de ultraviolette resonantielijnen hebben veel meer extinctie zodat de buitenste meetellende laag (schil D in Figuur 8.19) voor hen veel verder naar buiten ligt: ze tonen $v_D \approx 1500 - 3000 \text{ km s}^{-1}$.

Hoe ontstaat deze snelle uitstroming? Idee van Lucy en Solomon (1970): impuls-overdracht door deze ultraviolette lijnen drijft de wind aan. Beschouw een dunne schil ter plekke C. Fotoexcitatie met gebruik van buitenwaarts gerichte sterstraling gevolgd door isotrope reëmissie levert een buitenwaartse versnelling met een optelsom waarin de impuls-overdracht van de fotoexcitatie wel meetelt maar die van de fotodeëxcitatie niet wegens de isotropie ervan:

energiestroom [sec ⁻¹ cm ⁻²]	\mathcal{F}_{ν}
draagt impuls	\mathcal{F}_{ν}/c
impuls-overdracht [cm] ⁻²	$\alpha_{\nu} \mathcal{F}_{\nu}/c$
bijdrage aan de versnelling	$\alpha_{\nu} \mathcal{F}_{\nu}/\rho c$
totale versnelling	$g_r = (1/\rho c) \int_0^{\infty} \alpha_{\nu} \mathcal{F}_{\nu} d\nu$

We evalueren deze versnelling eerst voor het continuum. De continue extinctie in O sterren wordt gedomineerd door Thomsonverstrooiing. Die is frequentieonafhankelijk, dus

$$g_r^{\text{cs}} = \frac{1}{\rho c} N_e \sigma^{\text{cs}} \mathcal{F} = \frac{N_e \sigma^{\text{cs}} L}{\rho c 4\pi r^2},$$

en de verhouding tot de inwaartse zwaartekrachtsversnelling $g = GM/r^2$ is

$$\Gamma^{\text{cs}} \equiv \frac{g_r^{\text{cs}}}{g} = \frac{N_e \sigma^{\text{cs}} L}{4\pi \rho c GM}.$$

Deze verhouding is de *Eddingtonlimiet*; als $\Gamma^{\text{cs}} > 1$ wordt de fotosfeer weggedrukt door de continue straling. Stabiele sterren hebben derhalve $\Gamma^{\text{cs}} < 1$.

Nu de stralingsdruk van spectraallijnen. In diepe lagen geldt de Rosselandbenadering:

$$\mathcal{F}_{\nu} = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_{\nu}} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dz} d\nu,$$

dus

$$g_r = \frac{1}{\rho c} \int_0^{\infty} \alpha_{\nu} \mathcal{F}_{\nu} d\nu = \frac{4\pi}{3\rho c} \int_0^{\infty} \mathcal{F}_{\nu} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dz} d\nu$$

is onafhankelijk van α_{ν} : de spectraallijnen doen in diepe lagen niet ter zake. Ze verhogen de extinctie wel maar de stralingsflux kiest juist de spectrale vensters met kleine extinctie. Maar boven het oppervlak is dat niet zo. De stralingsflux weet daar niet wat hem nog boven z'n hoofd hangt en grotere lijnextinctie in een hogere schil telt wel mee zolang de schil optisch dun is. Per spectraallijn een bijdrage:

$$g_r^l = \frac{1}{\rho c} \alpha^l \Delta\nu_D \mathcal{F}_{\nu} \approx \frac{1}{\rho c} \alpha^l \Delta\nu_D B_{\nu}(T_{\text{eff}})$$

met $\Delta\nu_D = \nu\xi/c$ de Dopplerbreedte van de lijn, bepaald door de gemiddelde thermische snelheid ξ van de verstrooiende deeltjes in de schil. De piek van B_{ν} ligt in het ultraviolet; voor sterke ultraviolette resonantielijnen zoals C IV 154.8 nm met $\mathcal{F}_{\nu} = B_{\nu}(T_{\text{eff}})$ volgt

$g_r^l/g \approx 300$. Dit is dus een groot effect; bovendien zijn er honderden van zulke sterke lijnen in het ultraviolet voorhanden.

Maar nu stralingstransport erbij. Een optisch heel dunne laag vangt weinig fotonen; in een optisch dikke laag verzadigen de lijnen en wordt er geen $B_\nu(T_{\text{eff}})$ meer aangestraald. Dus voeren we de optische dikte van de schil τ^l in voor de lijnfrequentie $\nu = \nu^l$. Bij aanstraling van beneden door het ongestoorde continuum van de ster volgt uit

$$\tau^l \langle g_l \rangle = g_l(0) \int_0^{\tau^l} e^{-\tau'} d\tau'$$

dat

$$\langle g_l \rangle = \frac{\alpha^l \Delta\nu_D}{\rho c} \mathcal{F}_\nu \frac{1 - e^{-\tau^l}}{\tau^l}.$$

Hoe groot is τ^l ? Voor een statische atmosfeer geldt $\tau^l = \int_R^\infty \alpha^l dr$, maar voor een uitdijende atmosfeer verschuift het extinctieprofiel in golflengte mee met de naar buiten toenemende expansiesnelheid. Daar past de belangrijke *Sobolevbenadering*:

$$\tau^l \approx \alpha^l \frac{\xi}{dv/dr},$$

een soort effectieve optische dikte per lijn van een expanderende schil. Bij voldoende grote dv/dr snijdt elke schil een nieuw stukje continuum aan omdat het lijnextinctieprofiel voor die schil op een andere plaats zit dan voor alle andere schillen; dan wordt die schil niet afgeschermd door de schillen er binnen. Elk foton dat een weglengte van ongeveer τ^l aflegt (bijvoorbeeld al strooiend) ontsnapt, in elke richting; noch boven, noch onder de schil zijn er atomen die de lijnfotonen op deze Dopplerverschuiving kunnen absorberen. Bij voldoende grote dv/dr is deze schil van interactie ook zo dun dat hij homogeen kan worden verondersteld. Dus:

$$\begin{aligned} \text{voor sterke lijnen } (\tau^l \gg 1) \quad \langle g_l \rangle &= \frac{\mathcal{F}_\nu}{\rho c} \frac{\Delta\nu_D}{\xi} \frac{dv}{dr} \\ \text{voor zwakke lijnen } (\tau^l \ll 1) \quad \langle g_l \rangle &= \frac{\mathcal{F}_\nu}{\rho c} \Delta\nu_D \alpha^l \end{aligned}$$

Voor sterke lijnen valt de lijnextinctiecoëfficiënt α^l er uit: alleen hun aantal telt. Hun bijdrage is evenredig met dv/dr omdat ze voor grotere dv/dr zichzelf minder afschermen.

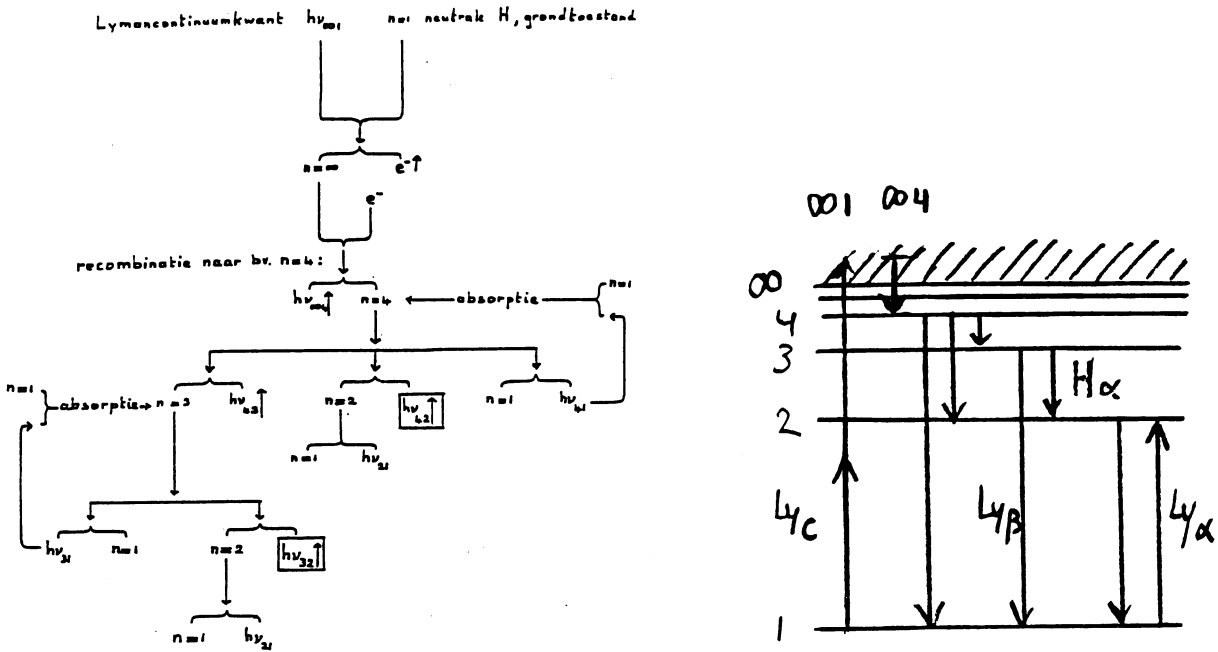
8.3.3 Planetaire nevels

Planetaire nevels zijn het gevolg van stellair materieverlies: uitgestoten schillen worden verhit en tot stralen gebracht door de centrale ster. Ze hebben niets met planeten van doen. Vergelijkbare objecten zijn de zogenaamde H II gebieden: emissienevels van H^+ rond hete reuzen. Literatuur: Bowers & Deeming deel II, hfst. 20, 24. Hier volgt een beschrijving van relevante stralingsprocessen die regelrecht is overgeLaTeX'd uit een oud dictaat van C. Zwaan.

8.3.3.1 Fotoelektrische verhitting en foton-degradatie

Sterstraling in Lymancontinuum ($\lambda < 91.2$ nm) ioniseert de nevel – de nevel wordt daardoor dus verhit. Een recombinerend electron draagt bij tot het *recombinantiespectrum* (uitregenspectrum) – naast Lyman-fotonen komen daarbij ook Balmer-, Paschen-, ...-fotonen vrij (dus: fotonconversie, of foton-degradatie).

Zanstra nam aan dat een (planetaire) nevel *optisch dik* is voor alle Lymanfotonen, doch *optisch dun* voor Balmer-, Paschen-, ...-fotonen. Zanstra stelde vast dat dan $Ly\beta$, $Ly\gamma$, ... en Lymancontinuum fotonen, die van de ster afkomstig zijn, eventueel na veel extincties en heremissies in de nevel, tenslotte gedegradieerd worden tot $Ly\alpha$ fotonen en Balmer-, Paschen-, ...-fotonen (Figuur 8.20). Hij merkte op dat *elk* Lymanfoton (van β af tot continuum toe) één $Ly\alpha$ en één Balmer foton vormt. De $Ly\alpha$ fotonen lekken via vele verstrooiingsprocessen



Figuur 8.20: Het Zanstra-mechanisme voor planetaire nevels. De nevel converteert fotonen van het Lymancontinuum uit de hete centrale ster naar Balmerlijnen en Balmercontinuum waarin de nevel optisch optisch dun is. Tellen van uittredeende Balmerfotonen levert het oorspronkelijke aantal Lymancontinuum fotonen. Het schema (uit een dictaat van A. Schadee) toont een uitwerking voor recombinitie naar niveau $n = 4$.

uit de nevel weg, de Balmerfotonen verlaten de nevel zodra zij gevormd zijn. Dus: door alle Balmerfotonen uit de nevel te tellen, telt men alle Lymanfotonen (van $Ly\beta$ af, doch Lymancontinuum is het belangrijkste) die uit de ster afkomstig zijn. Vergelijking met de fotonen in het optische sterspectrum levert een *kleurindex* die een zeer gevoelige maat voor de ster temperatuur is. Men vindt zo voor kernen van planetaire nevels de *Zanstratemperaturen*: $3 \times 10^4 K \leq T_{c,ff}^* \leq 3 \times 10^5 K$.

Men kan natuurlijk een gedetailleerde beschouwing opstellen, zonder de extreme onderstellingen over de optische dikte van de nevel, en waarbij méér uit het Balmer spectrum van de nevel te halen is. De bezetting van de energieniveaus van waterstof wordt volledig bepaald door het stralingsveld van de ster: ten gevolge van de lage electronendichtheden vallen botsingsprocessen bij alle niet-verboden lijnovergangen in het niet.

Het stralingsveld van de ster heeft een zeer extreem karakter: in de nevel is de gemiddelde intensiteit ten gevolge van de straling:

$$J_\nu = W_\nu \frac{2h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT_r} - 1},$$

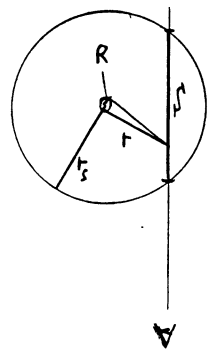
met T_r de (zeer hoge) stralingstemperatuur van de ster in de betreffende lijn of seriegrenscontinuum en W_ν is de zeer kleine stralingsverdunningsfactor:

$$W_\nu = \frac{R^2}{4\pi r^2} e^{-\tau_\nu(r)}.$$

De eerste factor is de geometrische verdunningsfactor, met R de straal van de ster, en r de afstand tot de ster. Aangezien $r \gg R$, is $R^2/4\pi r^2$ zeer klein: $\approx 10^{-15}$. De tweede factor is de extinctiefactor, waarin τ_ν de optische afstand van de ster tot het beschouwde element in de nevel voorstelt – daarin zit de dichtheid van de (waterstof)atomen langs die afstand. Het stralingsveld is dus zeer "heet" doch uiterst verdund.

Doordat de nevel optisch dun is in alle overgangen behalve het Lyman spectrum, is het "eigen" stralingsveld van de nevel te verwaarlozen (behalve wellicht in $Ly\alpha$). Uit deze beschouwing volgt dat het statistische evenwicht volledig bepaald wordt door:

1. foto-ionisatie en fotoexcitatie, uitsluitend uit het grondniveau, ten gevolge van Lymanstraling van de ster;



2. foto-recombinatie en foto-deëxcitatie (niveaus worden dus alleen bezet door processen uit het grondniveau en uit hoger niveaus of continuum).

Het stelsel vergelijkingen voor statistisch evenwicht is dus toch betrekkelijk eenvoudig – men kan het doorrekenen met modellen voor sterstraling en de dichtheid in de nevel, daaruit bijv. de relatieve sterkten van de Balmerlijnen en het Balmercontinuum (het Balmerdecrement) berekenen, en dit vergelijken met het waargenomen Balmerdecrement – daaruit volgen dan enkele modelparameters.

Een gevolg van het sterk verdunde stralingsveld is dat de aanwezige H atomen vrijwel uitsluitend in de grondtoestand $n = 1$ verkeren. Als de nevel optisch zeer dik is in Ly α , dan worden de Ly α fotonen efficiënt vastgehouden. Dan wordt in Ly α het stralingsveld tot een gemiddelde intensiteit opgebouwd die het verdunde stralingsveld van de ster overtreft; de netto flux blijft echter gering. Een verhoogd stralingsveld in Ly α leidt dan tot een verhoogde bezetting van het niveau $n = 2$.

Aangezien de waterstof in de nevel verregaand geïoniseerd is wordt vrijwel alle emissie in het Balmer-, Paschen-, ...-spectrum door *recombinatie* gevormd, per volume-element is de emissie dus evenredig met $n_H \times N_e$. De oppervlaktehelderheid I_ν van de nevel wordt dus bepaald door de zogenaamde *emissiegraad* EM :

$$EM = \int_S n_H \times N_e ds$$

waarbij S het segment langs de gezichtslijn binnen de nevel is.

De nevel heeft een scherpe rand, vooral tengevolge van de extinctiefactor in de verdunningsfactor W_ν . Op een zekere afstand van de ster neemt de intensiteit van de sterstraling in het Lymancontinuum af, met de daarmee gepaard gaande grotere fractie neutraal waterstof in de nevel neemt de extinctiecoëfficiënt voor Lymanstraling snel toe, enz. De emissieniveau strekt zich uit tot de zogenaamde *Strömgenstraal* r_s :

$$r_s = r_{s,1} N_H^{-(2/3)}.$$

Hierin is n_H de dichtheid van waterstofdeeltjes. De Strömgenstraal hangt uiteraard sterk af van de effectieve temperatuur van de centrale ster, zie de tabel.

Spectraal type:	O5	O8	B0	B3	B9	A2
T_{eff}	55000	49000	42000	28000	15500	12300 K
$r_{s,1}(n_H = 1 \text{ cm}^{-3})$	130	80	50	15	2	0.6 pc

Tabel 8.3: *Effectieve temperaturen en Strömgenstralen voor hete sterren*

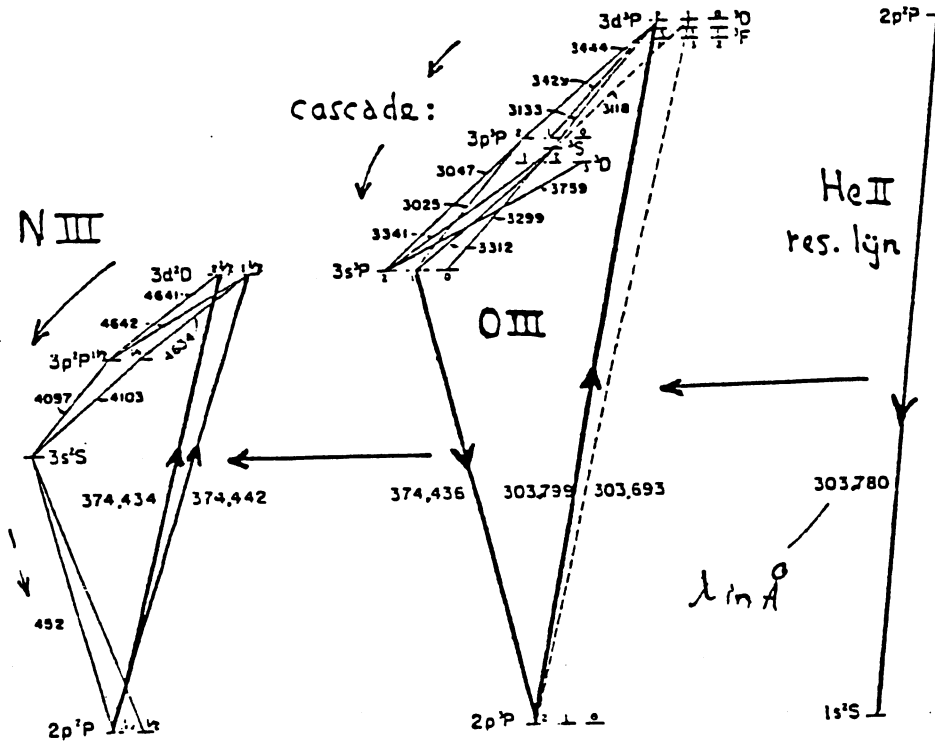
Aangezien de deeltjesdichtheid wat onregelmatig verdeeld is, zal de rand van de nevel een onregelmatige vorm hebben – zeker bij diffuse nevels en H⁺ gebieden.

Het bovenstaande betoog voor het waterstofspectrum in nevels kan ook toegepast worden op het He II spectrum van geïoniseerd helium – alleen zijn de golflengten verschoven: de met Ly α corresponderende resonantielijnt ligt bij 30.3 nm en de met het Lymancontinuum corresponderende seriegrens bij 22.8 nm. Tengevolge van de lagere heliumabondantie is de nevel in He II lijnen en continua wat minder dik dan in H. Met enige modificaties past het voorafgaande ook op He I: ook daar foto-elektrische verhitte en fotondegradatie.

8.3.3.2 Fluorescentie

In planetaire nevels worden enkele sterke UV-lijnen aangetroffen, vooral in O III, die merkwaardig zijn omdat andere sterk verwante lijnen uit hetzelfde spectrum volledig ontbreken.

Bowen (1935) wist aan te tonen dat deze lijnen ontstaan door fluorescentie tengevolge van pompen in een sterke lijn van de nevel (zie Figuur 8.21). De resonantielijnt van He II λ 30.3780 nm is zeer sterk: net als bij Ly α kan zich in de lijn een relatief sterk stralingsveld opbouwen. Deze heliumlijn overlapt met de O III 30.3799 nm lijn, met het gevolg dat O⁺⁺ uit de grondtoestand wordt aangeslagen tot het zeer specifieke fijnstruktuurniveau $3d^3P_2$.



Figuur 8.21: Het Bowen mechanisme voor fluorescentie. Door toevallige golflengtecoïncidenties kunnen hoge niveaus worden aangeslagen met fotonen uit spectra van andere elementen. De golflengtes zijn in Ångstrom.

Van daaruit valt het O^{++} ion door spontane emissies, via een hele cascade van lijnen, de meeste in het optische UV, weer terug naar de grondtoestand. De laatste overgang O III λ 37.4436 nm overlapt met twee lijnen uit het N III spectrum, die een aanslag naar de $3d^2D$ term van N^{++} veroorzaken, met als gevolg wederom een aantal spontane emissies, nu ook in het zichtbare spectrale gebied.

8.3.3.3 Botsingsaanslag van verboden lijnen

In het spectrum van emissieniveaus werden spectrale lijnen opgemerkt, die men uit laboratoria niet kende – waaronder de twee blauwgroene “nebulium” lijnen N_1 en N_2 , die in het zichtbare spectrum van vrijwel alle niveaus helderder zijn dan alle overige lijnen tezamen. Deze lijnen zijn (o.a. door Bowen) verklaard als verboden lijnen (d.w.z. geen elektrische dipoolstraling) van O^{++} : [O III]. De metastabiele niveaus (1D en 1S in dat geval) worden aangeslagen door botsingen met electronen – dat kan bij de typische electronentemperaturen in nevels, $T_e \approx 1 - 2 \times 10^4$ K, want de energiesprongen zijn slechts enkele eV. Tengevolge van de lage N_e is de kans op een botsings-deëxcitatie nog aanzienlijk kleiner dan de kans op fotodeëxcitatie, waarmee wij verboden lijnen te zien krijgen. Merk dus op dat het optreden van verboden lijnen een optimum vertoont bij een vrij heet electronengas, net voldoende dicht om de botsingsaanslagen te bewerken, doch weer niet zo dicht dat bij de deëxcitatie van de metastabiele niveaus de botsing gaan overheersen.

8.3.3.4 Vrij-vrij straling

Aangezien een emissienivel vrijwel volledig geïoniseerd is, wordt vrij-vrij straling uitgezonden – vooral natuurlijk in het radiogebied (waarom?). Belangrijke diagnosticum: levert de electronentemperatuur van de nevel; in het radiogebied treedt geen continue extinctie op. Wel oppassen of nevel in radiogebied optisch dik – (tussen geval) – optisch dun is, maar dat kan men aan het $I(\nu)$ spectrum zelf zien. Indien optisch dik geldt $I(\nu) \sim \nu^2$; indien optisch

dun geldt $I(\nu) \sim \nu^0$.

Epiloog

Stralingstransport per electron

Tot slot een kort overzicht van verleden en toekomst van de beoefening van astrofysisch stralingstransport.

Verleden

In de geschiedenis van dit vakgebied zijn diverse onderzoeksregimes en tijdperken te onderscheiden:

- *Spectroscopische fenomenologie.* Fraunhofer ontdekte spectraallijnen in zonlicht in 1814 en stelde als eerste voor dat de door hem *D* genoemde absorptie in het zonnespectrum te maken heeft met de heldere lijn op dezelfde golflengte in vlamspectra. Kirchhoff en Bunsen legden pas veel later verband tussen natrium in hun laboratoriumvlammen en in de zon (nadat ze vanuit Heidelberg vlamspectroscopie hadden bedreven aan een brand in Mannheim en zich zo bewust werden van de afstandsonafhankelijkheid van spectraalanalyse); de constatering dat materie-eigenschappen elders in het heelal blijkbaar niet verschillen van die op aarde werd de basis van de astrofysica. De samenhang tussen lijnsterkte en abundantie bleef vooralsnog onduidelijk; niettemin werd de hele spectraalclassificatie opgezet en stelden Hertzprung en Russell hun diagram op.
(Wollaston nog eerder)
- *LTE abundantiebepaling.* Met Cecilia Payne's ontdekking dat de Saha en Boltzmannverdelingen samen de lijnsterkte in sterspectra verklaren en dat de spectrale classificatie een simpele rangschikking is naar effectieve temperatuur begon het tijdperk van de nu "klassieke" LTE interpretatie van steratmosferen, vooral ter abundantiebepaling. Te Utrecht speelde Minnaert met medewerkers hierin een belangrijke rol. Dit werk was lang de hoofdschotel van de astrofysica (1930-1950).
- *Analytisch niet-evenwichtsstralingstransport.* In dezelfde jaren werden ook redistributieproblemen aangepakt (Pannekoek, Houtgast), coronale lijnen (Edlén), planetaire nevellijnen (Zanstra), verstrooiing aan interstellair deeltjes (Van de Hulst).
- *NLTE abundantiebepaling.* In de jaren zestig kwamen rekenmachines in gebruik. NLTE theorie en de twee-niveau formulering voor verstrooiing werden geanalyseerd (Menzel, Thomas, Athay, Jefferies). Mihalas en anderen (Auer, Hummer, Rybicki) smeedden computeralgoritmen die het niet-lineaire probleem van de gekoppelde stralingstransportvergelijkingen en statistisch evenwichtsvergelijkingen iteratief oplossen met de methode der *complete linearisatie*, goed beschreven in Mihalas (1978). Deze aanpak is sindsdien veel gebruikt voor interpretatie van spectraallijnen uit zon en sterren onder de aanname van tijdsafhankelijkheid en axiale symmetrie ("vlakke parallelle lagen"). Dit was een der eerste wetenschapsgebieden waarin niet-lineaire problemen succesvol en routinematig werden opgelost (1970-1990).
- *Openlegging van het EM-spectrum.* Tegelijk werden de niet vanaf het aardoppervlak toegankelijke delen van het EM-spectrum opengelegd en verschoof het accent in radiowaarnemingen van continua en de 21-cm lijn naar OH-lijnen en andere molecuullijnen. Zowel

in het radiogebied als op Röntgengolflengten dragen niet-thermische processen doorgaans veel sterker bij dan thermische processen. De astrofysica veranderde daardoor sterk van signatuur, van nadruk op thermische processen en lijnvorming in steratmosferen naar nadruk op impulsieve en magneetveld-gevoelige niet-thermische processen in plasma's. Stralingstransport is hierin op uiteenlopende manieren en in uiteenlopende omstandigheden van belang, vaak energetisch en nog ~~veel~~ vaker diagnostisch.

Toekomst

Wat ligt er in het verschiet? De waarnemingstechnieken evolueren verder. Naast de opening van de resterende golflengtegebieden (sub-mm, ver-ultraviolet) en de consolidatie van andere (infrarood, Röntgen) komt er nu nadruk op vergroting van de *resolutie*, vooral de ruimtelijke resolutie en vooral met interferometrische technieken: satelliet-VLBI op radio-golflengten, infrarood en optische interferometrie met grote telescopen (ESO's VLT project), ultraviolet interferometrie vanuit de ruimte (spacestation, mettertijd een maanbasis). Het openen van het EM-spectrum was vooral een verkenning van nieuwe verschijnselen; grotere resolutie brengt gedetailleerder inzicht in de processen die aan die verschijnselen ten grondslag liggen. De nadruk verschuift daarmee van scenario's naar kwantitatieve analyse.

Daarnaast is er een andere revolutie gaande: de snel toenemende rol van numerieke modellering in interpretatie en theorie. Dat geldt voor de hele astrofysica en voor stralingstransport in het bijzonder. Met de huidige generatie supercomputers en workstations is het mogelijk *stralingshydrodynamica* in detail na te bootsen: *i.e.* de hydrodynamische bewegingen en golven van media numeriek te modelleren met volledig inbegrip van de effecten die de extinctie en emissie van continua en spectraallijnen daarin leveren. Deze effecten zijn vaak groot. Voorbeeld: het wisselende celpatroon dat het zonneoppervlak toont (de *granulatie*) is een gevolg van stralingsverliezen uit de convectielaag; gedetailleerde numerieke simulaties daarvan leiden nu tot begrip van het hoe en waarom van dit reeds lang bekende verschijnsel.

In het algemeen is het belang van numerieke simulaties dat ze *gelegenheid tot experimenteren* geven. Tot dusver was sterrekunde een empirische maar geen experimentele wetenschap. Begrip leidde soms wel tot de voorspelling van waarneembare en inderdaad naderhand waargenomen zaken (zonnwind, neutronensterren, 3 K achtergrondstraling), maar niet tot doelgerichte experimenten waarin allerlei parameters gefixeerd worden en de gevolgen van de gecontroleerde verandering van één enkele parameter worden gemeten. Numerieke simulaties geven wél gelegenheid tot zulke ijkproeven.

De aandachtverschuiving van thermische en stationnaire omstandigheden naar niet-thermische en tijdsafhankelijke omstandigheden wordt nu aangevuld met een interpretatieve verschuiving waarin computermmodellering schematische analyse vervangt en waarin tijdsafhankelijke en volledig "self-consistent" berekening gedetailleerder begrip brengt; de astrofysica is *harder* aan het worden.

Dit geldt ondermeer voor N-body zwaartekrachtsdynamica, stralingshydrodynamica, MHD en plasma-astrofysica. Met name voor de stralingshydrodynamica zijn volwassen simulaties nu al mogelijk, nog zonder de massale parallelprocessing die voor de andere terreinen gewent is. Er is nu grote aandacht voor snelle oplosmethoden in niet-lineair stralingstransport; de complete linearisatie-methode is al weer achterhaald. De nadruk ligt nu op tijdsafhankelijkheid, complexe geometrieën, *etc.*

Dit dictaat behandelt voornamelijk begrippen en vergelijkingen die al in de eerste helft van deze eeuw zijn opgesteld. Niettemin beschrijft het een vakgebied dat nu een snelle ontwikkeling doormaakt, dankzij de technologische vooruitgang der computers. De elektronen daarin zijn een belangrijke astrofysische informatiedrager geworden. Ze bewegen weliswaar veel langzamer dan fotonen en ze komen veel minder ver, maar ze kunnen het gedrag van fotonen elders in de kosmos met hoge precisie nabootsen, op voor de astrofysicus toegankelijke, begrijpelijke en beïnvloedbare wijze.

Appendix A

Tabellen en termschema's

Abondanties der elementen
(naar Allen, *Astrophysical Quantities*)

Element	Symbool	Atoomnr	¹⁰ log(abondantie)	
			in aantal	in massa
Waterstof	H	1	12.00	12.00
Helium	He	2	10.93	11.53
Lithium	Li	3	0.7	1.6
Beryllium	Be	4	1.1	2.0
Boor	B	5	<3	< 4
Koolstof	C	6	8.52	9.60
Stikstof	N	7	7.96	9.11
Zuurstof	O	8	8.82	10.02
Fluor	F	9	4.6	5.9
Neon	Ne	10	7.92	9.22
Natrium	Na	11	6.25	7.61
Magnesium	Mg	12	7.42	8.81
Aluminium	Al	13	6.39	7.78
Silicium	Si	14	7.52	8.97
Fosfor	P	15	5.52	7.01
Zwavel	S	16	7.20	8.71
Chloor	Cl	17	5.6	7.2
Argon	Ar	18	6.8	8.4
Kalium	K	19	4.95	6.54
Calcium	Ca	20	6.30	7.90
Scandium	Sc	21	3.22	4.87
Titaan	Ti	22	5.13	6.81
Vanadium	V	23	4.40	6.11
Chroom	Cr	24	5.85	7.57
Mangaan	Mn	25	5.40	7.14
IJzer	Fe	26	7.60	9.35
Kobalt	Co	27	5.1	6.9
Nikkel	Ni	28	6.30	8.07
Koper	Cu	29	4.5	6.3
Zink	Zn	30	4.2	6.0

Voorbeeld: $N_{\text{Na}}/N_{\text{H}} = 10^{6.25-12.00} = 1.78 \times 10^{-6}$.

Ionisatie-energieën in eV
(naar Allen, *Astrophysical Quantities*)

Atoomnr	Element	I	II	III
1	H	13.598		
2	He	24.587	54.416	
3	Li	5.392	75.638	122.451
4	Be	9.322	18.211	153.893
5	B	8.298	25.154	37.930
6	C	11.260	24.383	47.887
7	N	14.534	29.601	47.448
8	O	13.618	35.116	54.934
9	F	17.422	34.970	62.707
10	Ne	21.564	40.962	63.45
11	Na	5.139	47.286	71.64
12	Mg	7.646	15.035	80.143
13	Al	5.986	18.828	28.447
14	Si	8.151	16.345	33.492
15	P	10.486	19.725	30.18
16	S	10.360	23.33	34.83
17	Cl	12.967	23.81	39.61
18	Ar	15.759	27.629	40.74
19	K	4.341	31.625	45.72
20	Ca	6.113	11.871	50.908
21	Sc	6.54	12.80	24.76
22	Ti	6.82	13.58	27.491
23	V	6.74	14.65	29.310
24	Cr	6.766	16.50	30.96
25	Mn	7.435	15.640	33.667
26	Fe	7.870	16.18	30.651
27	Co	7.86	17.06	33.50
28	Ni	7.635	18.168	35.17
29	Cu	7.726	20.292	36.83
30	Zn	9.394	17.964	39.722
31	Ga	5.999	20.51	30.71
32	Ge	7.899	15.934	34.22
33	As	9.81	18.633	28.351
34	Se	9.752	21.19	30.820
35	Br	11.814	21.8	36
36	Kr	13.999	24.359	36.95
37	Rb	4.177	27.28	40
38	Sr	5.695	11.030	43.6
39	Y	6.38	12.24	20.52
40	Zr	6.84	13.13	22.99
41	Nb	6.88	14.32	25.04
42	Mo	7.099	16.15	27.16
43	Tc	7.28	15.26	29.54
44	Ru	7.37	16.76	28.47
45	Rh	7.46	18.08	31.06
46	Pd	8.34	19.43	32.93
47	Ag	7.576	21.49	34.83
48	Cd	8.993	16.908	37.48
49	In	5.786	18.869	28.03
50	Sn	7.344	14.632	30.502

Ionisatie van waterstof
(voor $P_e = 10 \text{ dyne cm}^{-2}$, naar Novotny)

$T \text{ (K)}$	$\frac{N_{II}}{N_I}$	$\frac{N_I}{N_I + N_{II}}$	$\frac{N_{II}}{N_I + N_{II}}$
6 000	3.50×10^{-4}	1.000	0.350×10^{-3}
8 000	5.15×10^{-1}	0.660	0.340
10 000	$4.66 \times 10^{+1}$	0.0210	0.979
12 000	$1.02 \times 10^{+3}$	0.000978	0.999
14 000	$9.82 \times 10^{+3}$	0.000102	1.000
16 000	$5.61 \times 10^{+4}$	0.178×10^{-4}	1.000

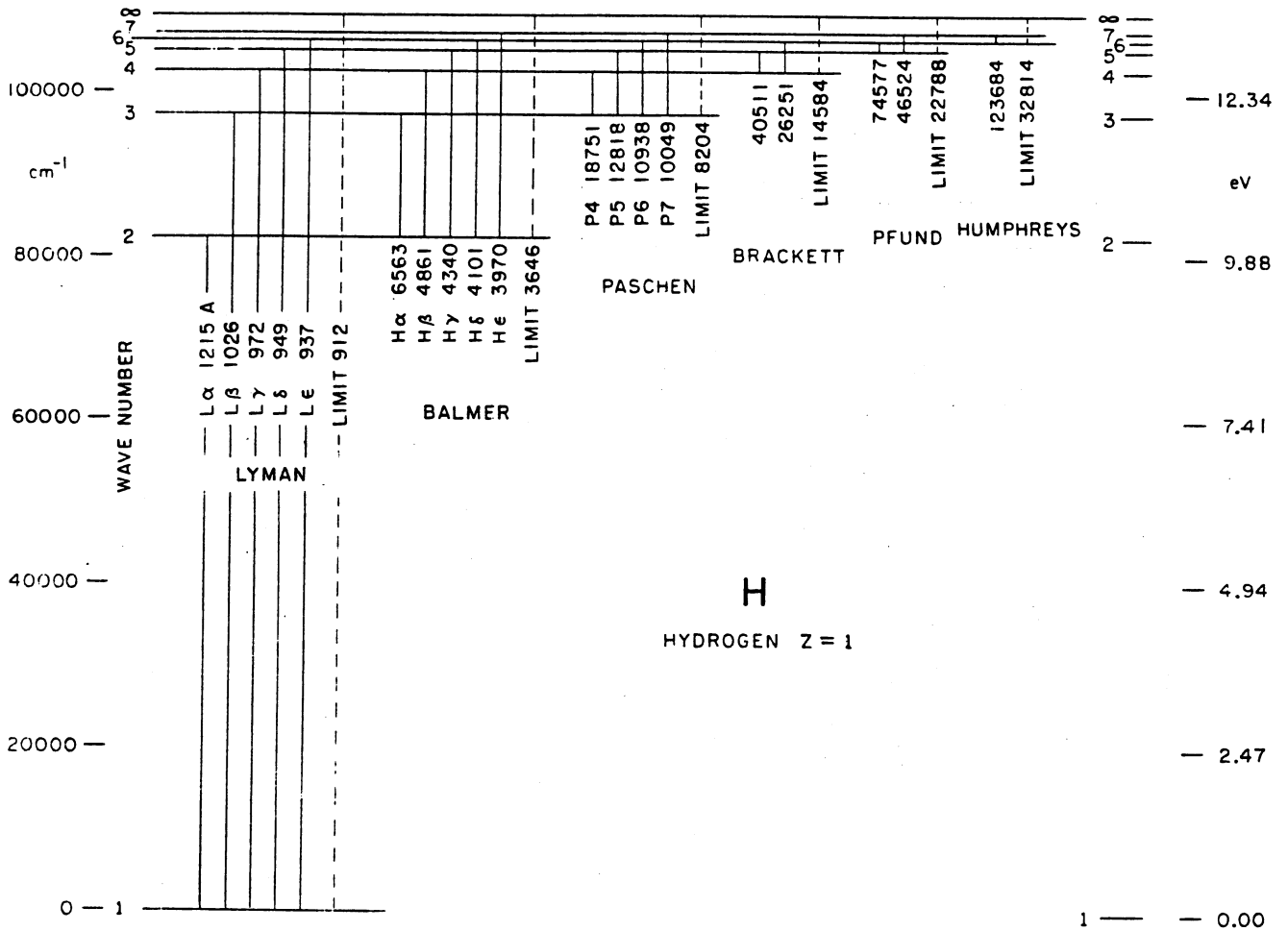
Ionisatie van helium
(voor $P_e = 10 \text{ dyne cm}^{-2}$, naar Novotny)

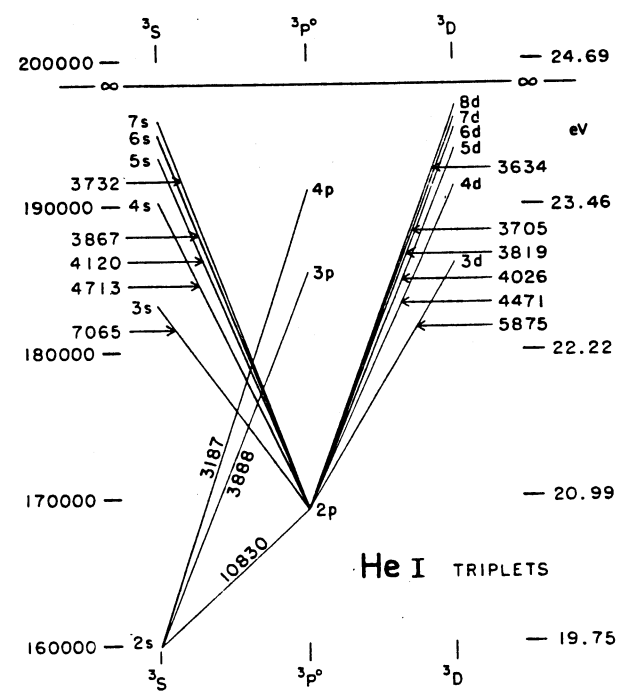
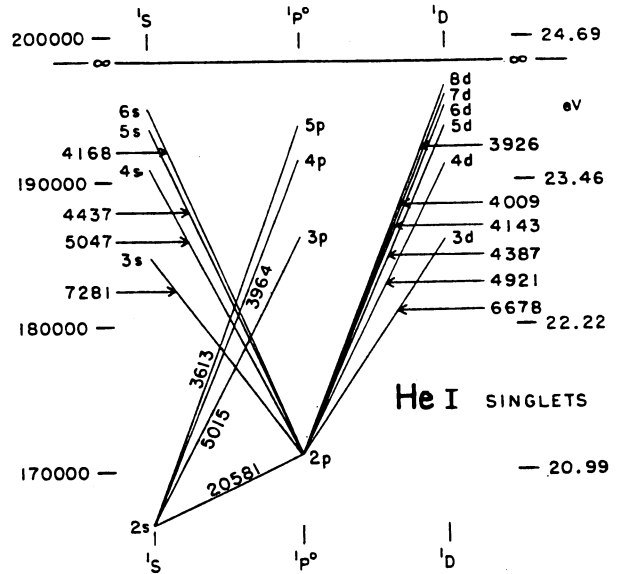
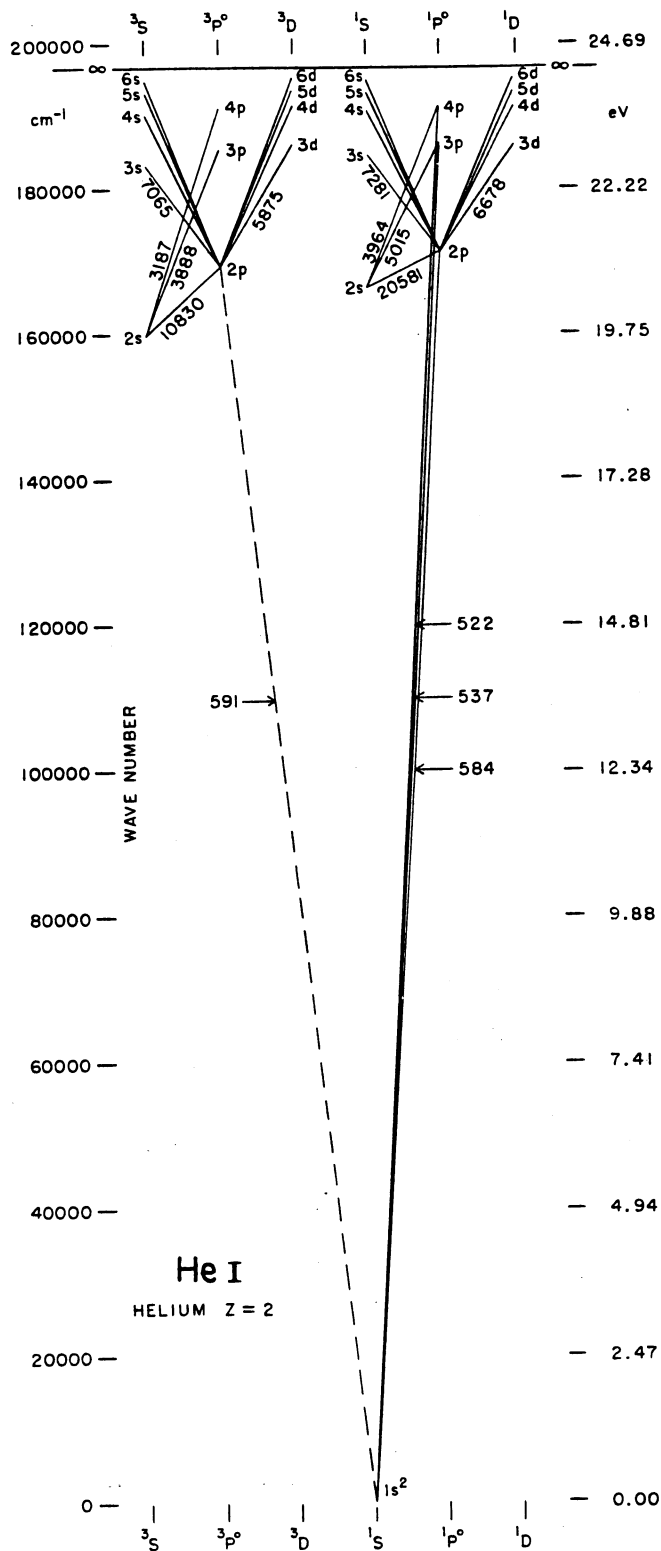
$T \text{ (K)}$	$\frac{N_{II}}{N_I}$	$\frac{N_{III}}{N_I + N_{II}}$
10 000	5.45×10^{-4}	1.27×10^{-19}
12 000	9.97×10^{-2}	7.45×10^{-15}
14 000	4.37	2.01×10^{-11}
16 000	7.80×10^1	7.88×10^{-9}
18 000	7.59×10^2	8.48×10^{-7}
20 000	4.82×10^3	3.68×10^{-5}
22 000	2.24×10^4	8.24×10^{-4}
24 000	8.19×10^4	1.12×10^{-2}
26 000	2.50×10^5	1.03×10^{-1}
28 000	6.58×10^5	7.05×10^{-1}
30 000	1.54×10^6	3.77
32 000	3.28×10^6	1.65×10^1
34 000	6.45×10^6	6.13×10^1
36 000	1.19×10^7	1.98×10^2
38 000	2.06×10^7	5.71×10^2
40 000	3.41×10^7	1.49×10^3

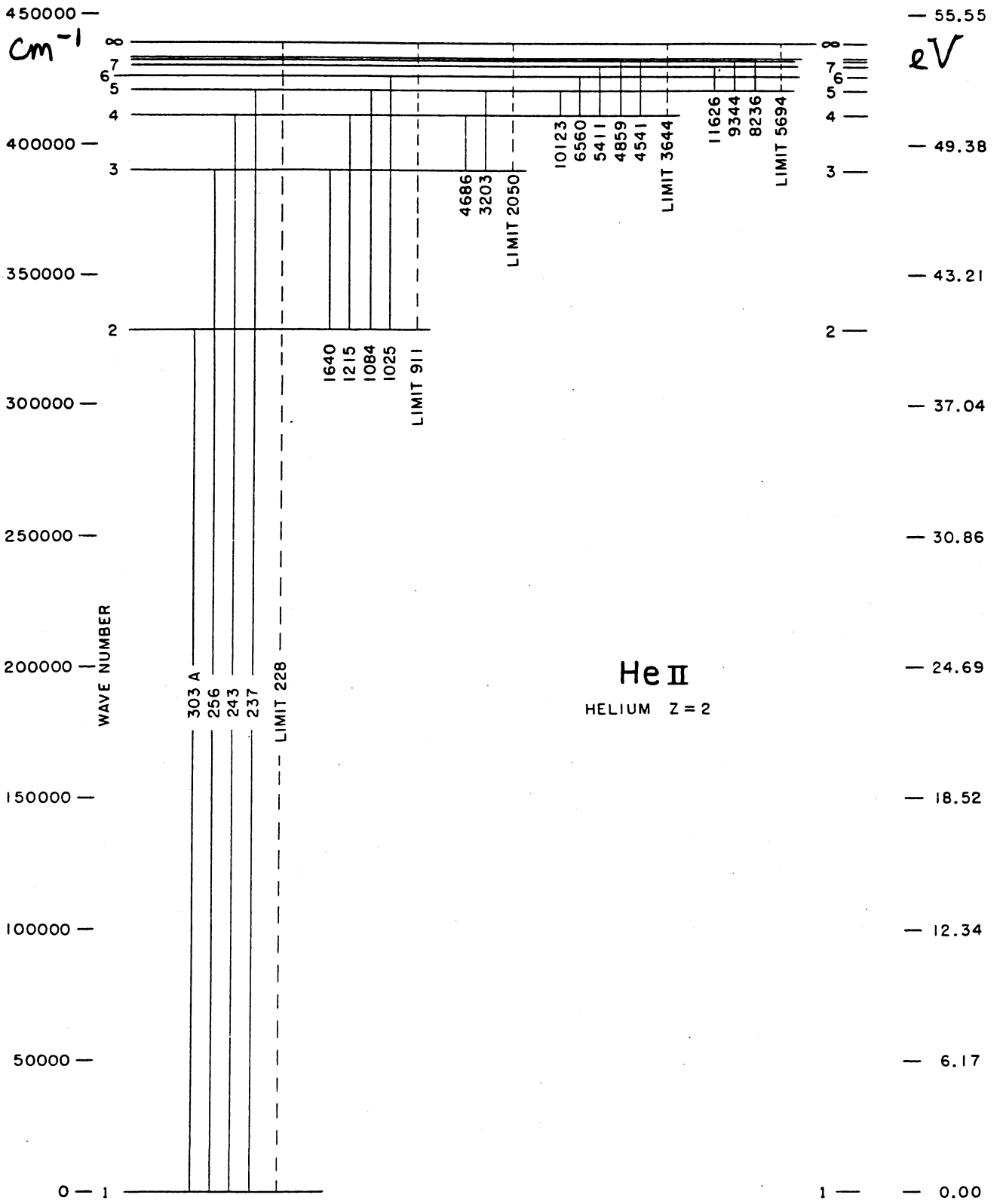
$T \text{ (K)}$	$\frac{N_I}{N_I + N_{II} + N_{III}}$	$\frac{N_{II}}{N_I + N_{II} + N_{III}}$	$\frac{N_{III}}{N_I + N_{II} + N_{III}}$
	6 000	1.000	0.7770×10^{-12}
8 000	1.000	0.249×10^{-6}	0.253×10^{-32}
10 000	0.999	0.544×10^{-3}	0.692×10^{-22}
12 000	0.909	0.0907	0.735×10^{-16}
14 000	0.186	0.814	0.164×10^{10}
16 000	0.127×10^{-1}	0.987	0.777×10^{-8}
18 000	0.132×10^{-2}	0.999	0.847×10^{-6}
20 000	0.207×10^{-3}	1.000	0.368×10^{-4}
22 000	0.447×10^{-4}	0.999	0.823×10^{-3}
24 000	0.121×10^{-4}	0.989	0.0111
26 000	0.363×10^{-5}	0.906	0.0937
28 000	0.891×10^{-6}	0.586	0.414
30 000	0.136×10^{-6}	0.210	0.790
32 000	0.174×10^{-7}	0.0571	0.943
34 000	0.249×10^{-8}	0.0161	0.984
36 000	0.423×10^{-9}	0.502×10^{-2}	0.995
38 000	0.847×10^{-10}	0.175×10^{-2}	0.998
40 000	0.197×10^{-10}	0.671×10^{-3}	0.999

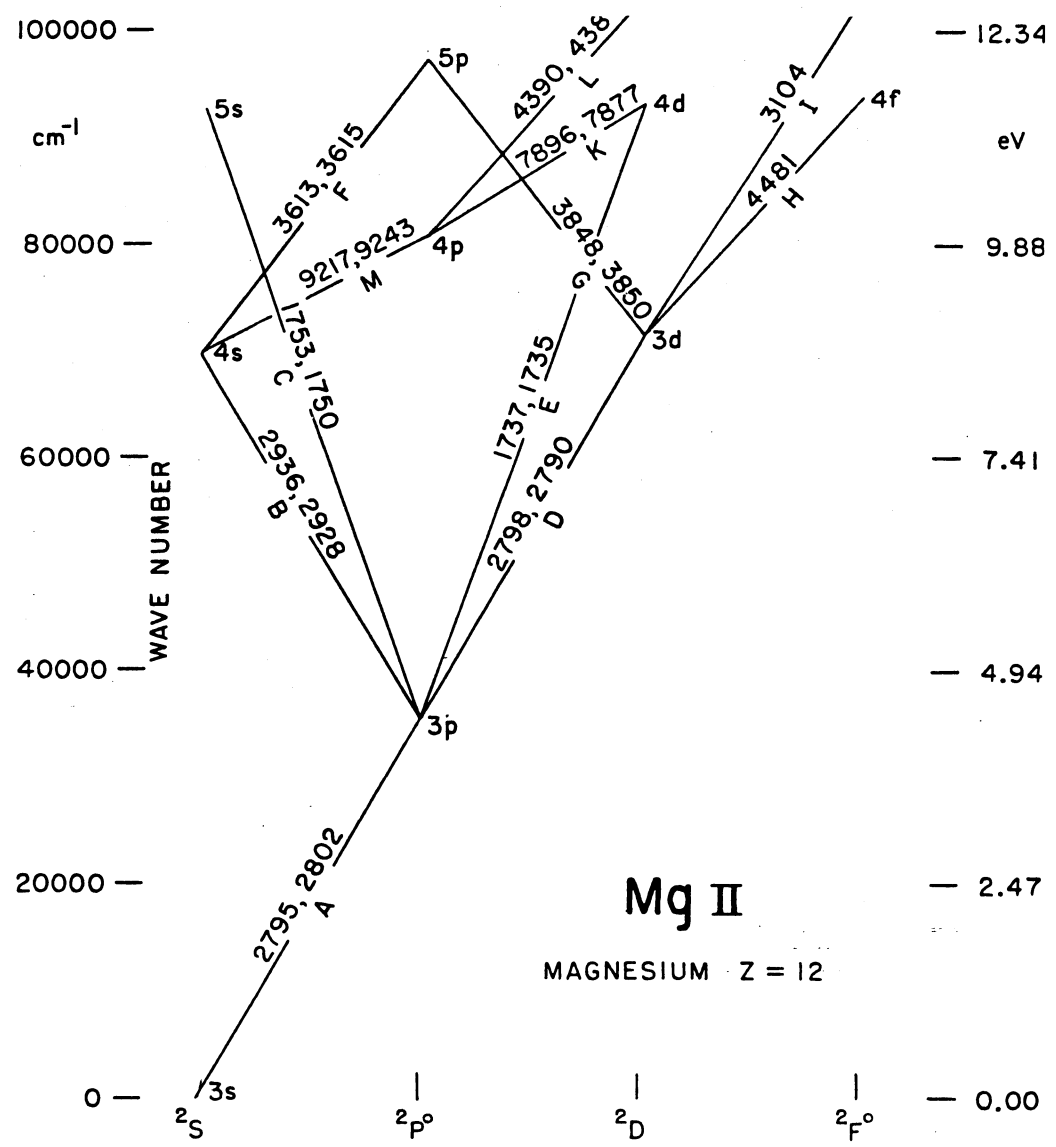
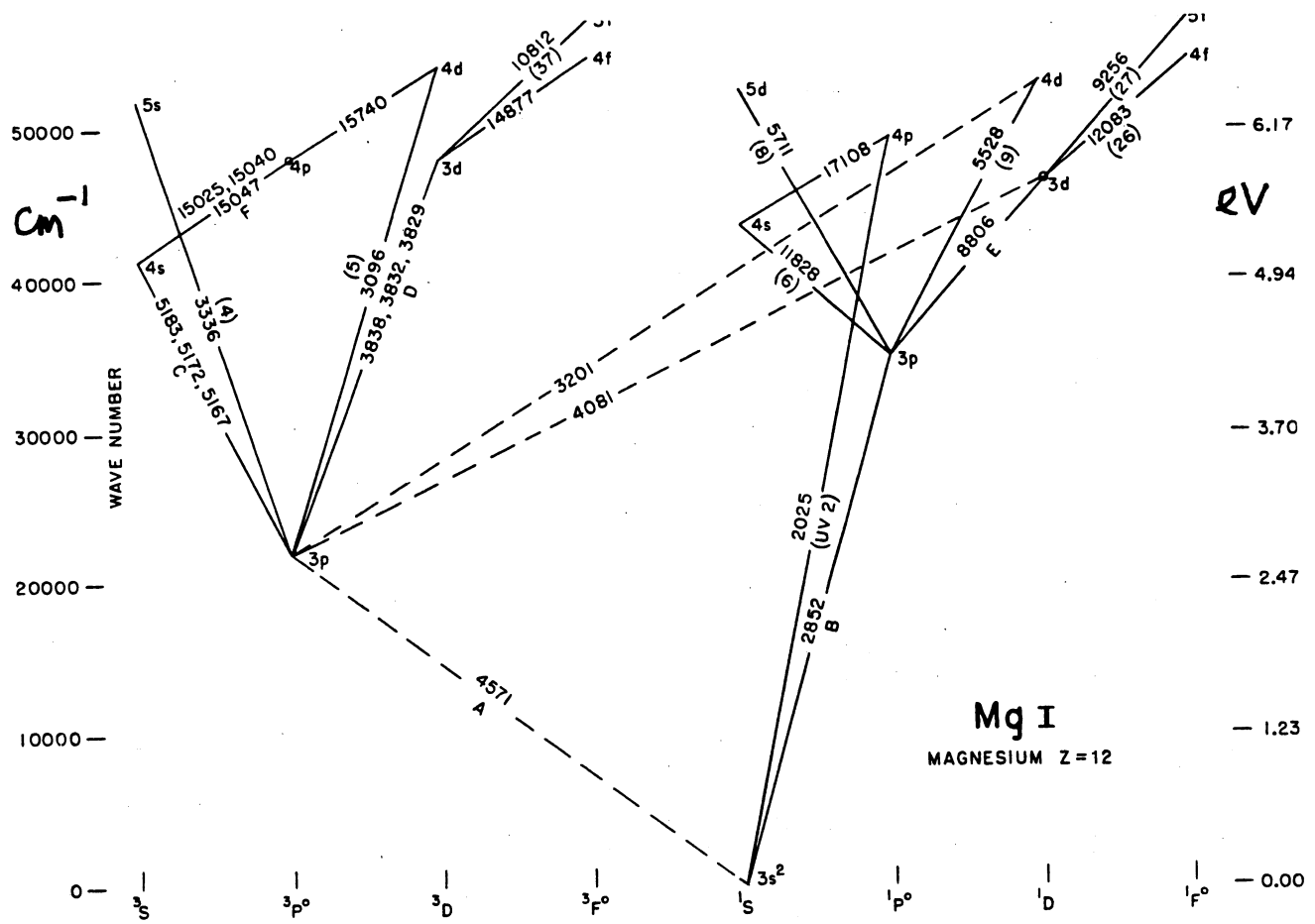
Grotriandiagrammen

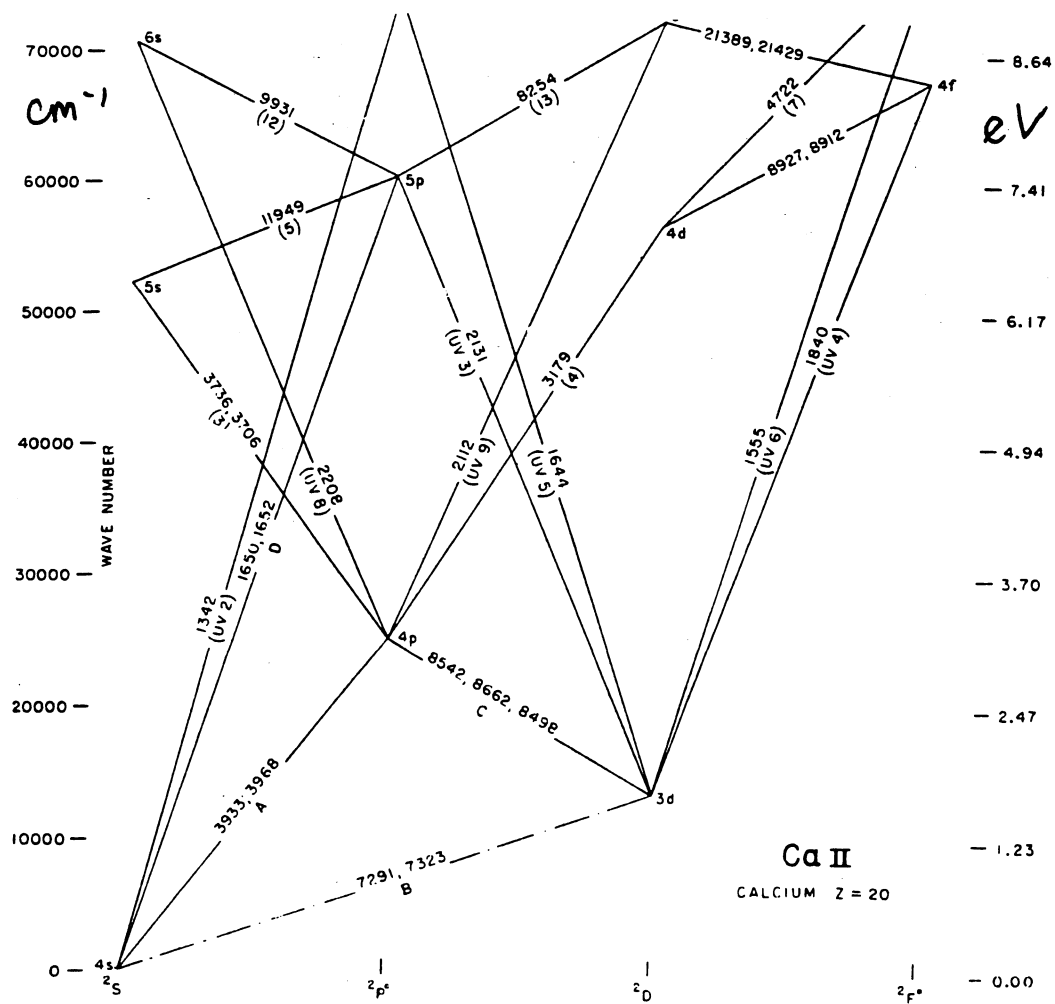
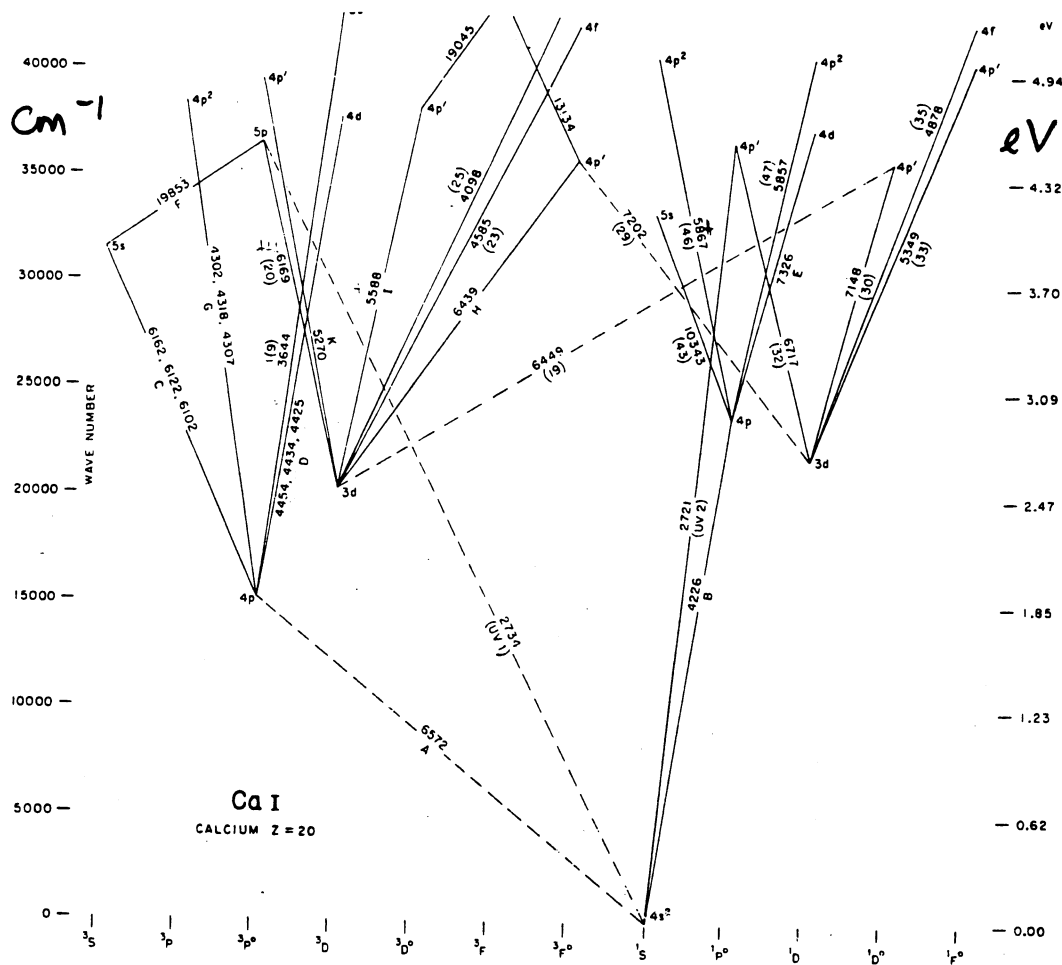
De voornaamste overgangen van enkele belangrijke spectra. Golflengten in Å.
 (uit Moore en Merrill, *Partial Grotrian Diagrams of Astrophysical Interest*)

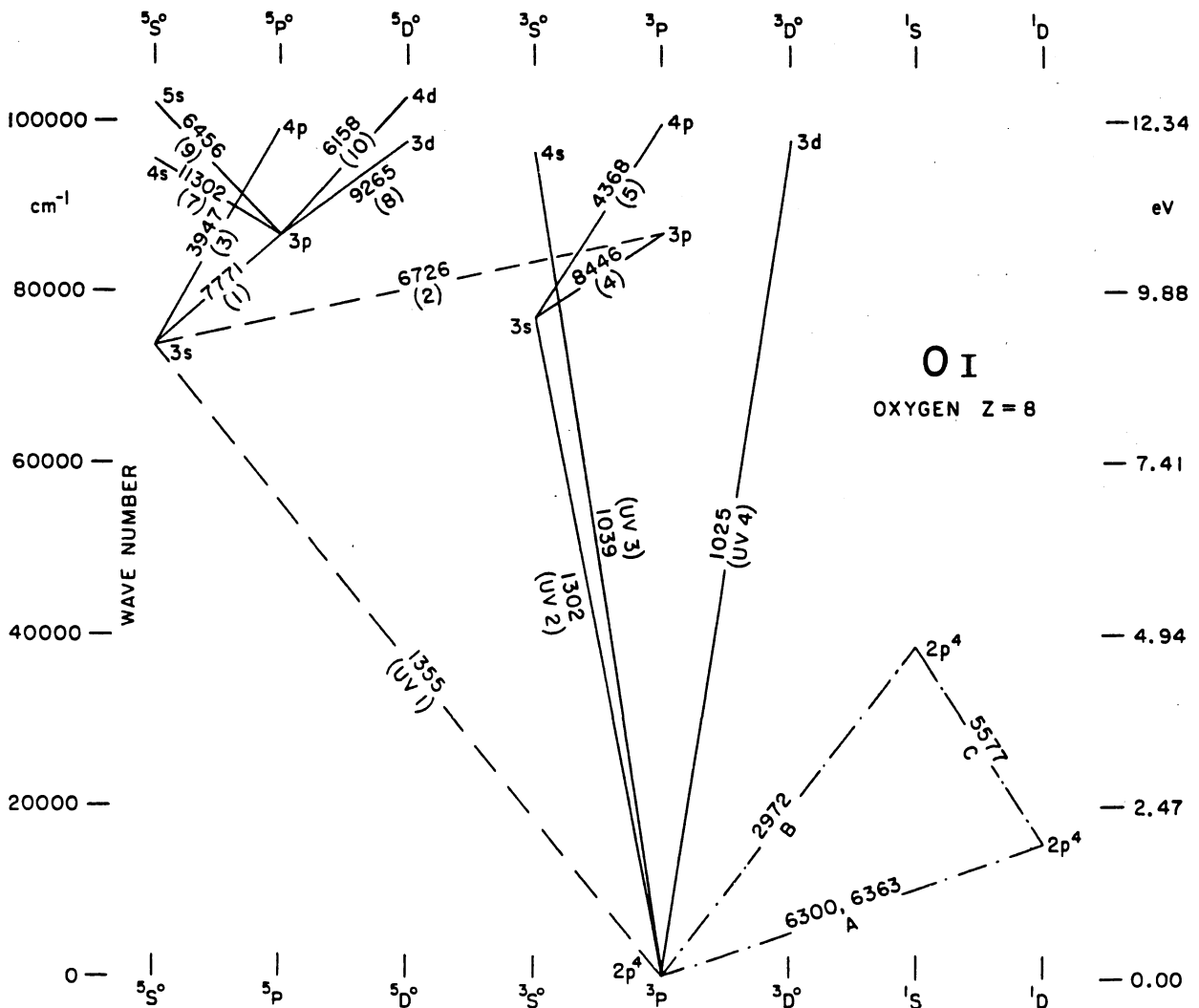
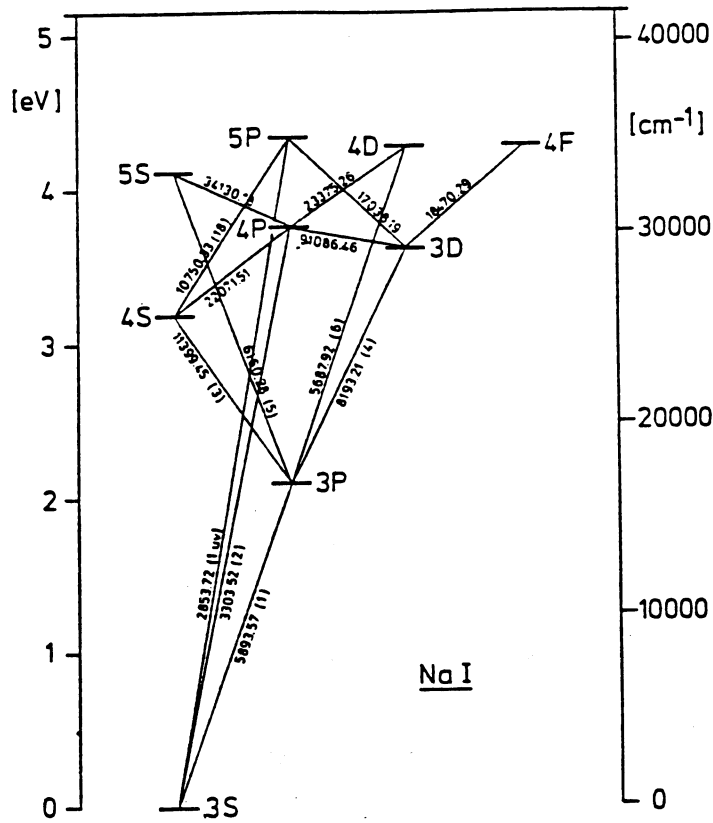


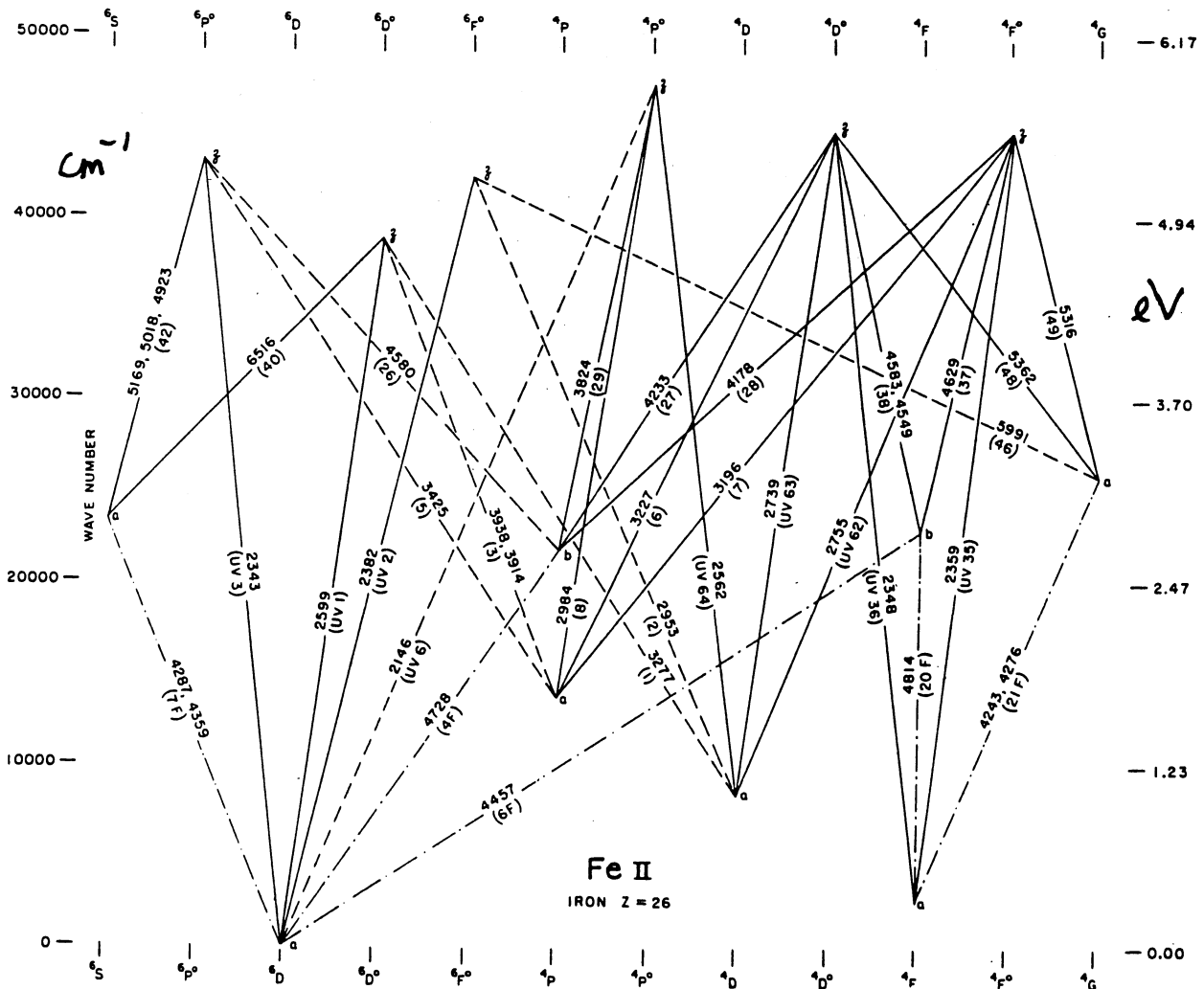
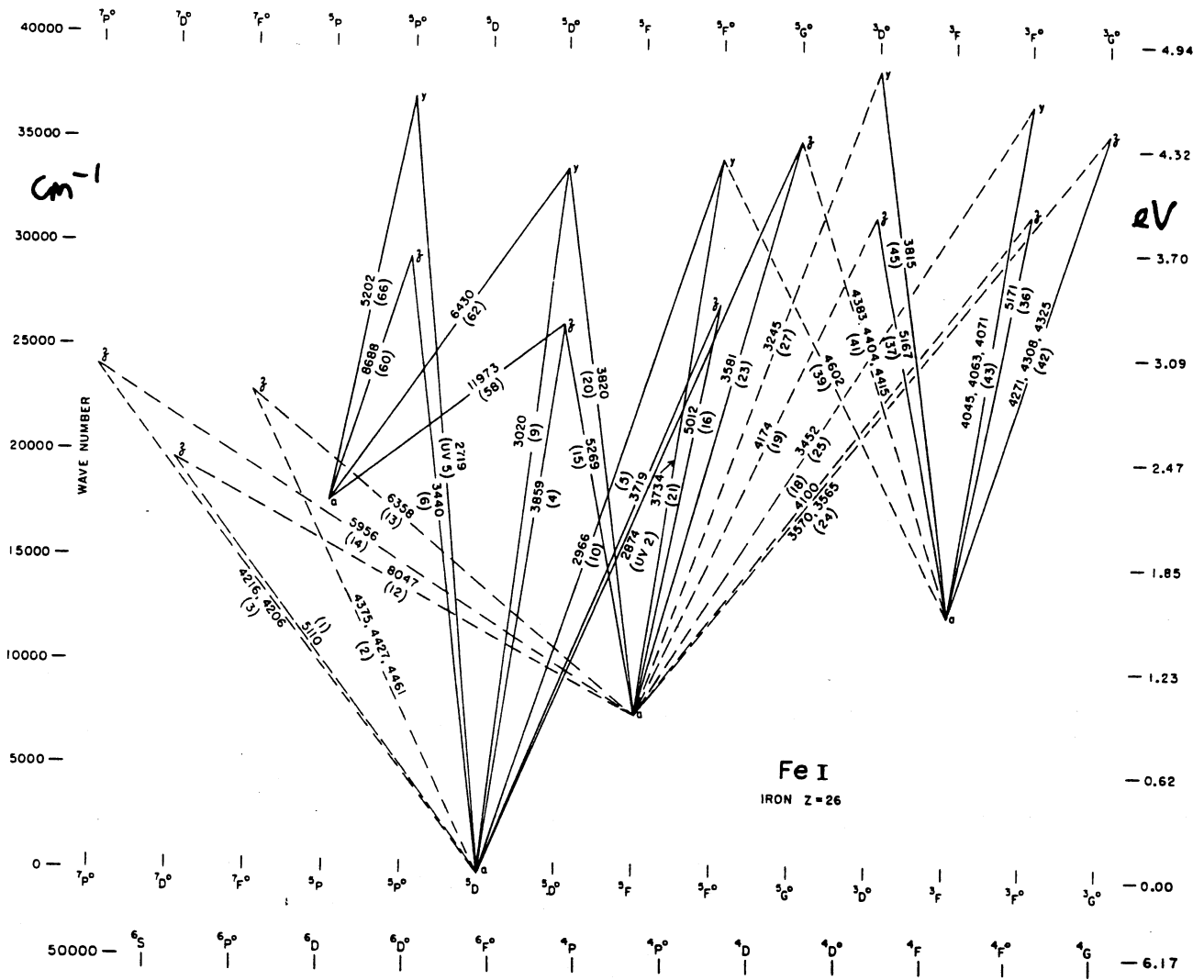












Appendix B

Formularium

- 1.1 $\nu = c/\lambda$
- 1.2 $E = h\nu$
- 2.1 $dE_\nu \equiv I_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t) (\vec{l} \cdot \vec{n}) dO dt d\nu d\Omega = I_\nu(x, y, z, \theta, \varphi, t) \cos \theta dO dt d\nu d\Omega$
- 2.2 $J_\nu(\vec{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \sin \theta d\theta d\varphi$
- 2.3 $J_\nu(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi I_\nu(z, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I_\nu(z, \mu) d\mu$
- 2.4 $\mathcal{F}_\nu(\vec{r}, \vec{n}, t) \equiv \int I_\nu \cos \theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$
- 2.5 $\mathcal{F}_\nu = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_\pi^{\pi/2} I_\nu \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \mathcal{F}_\nu^+ - \mathcal{F}_\nu^-$
- 2.6 $\mathcal{F}_\nu(z) = 2\pi \int_0^1 \mu I_\nu d\mu - 2\pi \int_0^{-1} \mu I_\nu d\mu = \mathcal{F}_\nu^+(z) - \mathcal{F}_\nu^-(z)$
- 2.7 $u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega$
- 2.8 $p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega$
- 3.1 $dE_\nu = j_\nu dV dt d\nu d\Omega$
- 3.2 $dI_\nu(s) = j_\nu(s) ds.$
- 3.3 $dI_\nu = -I_\nu \sigma_\nu n ds$
- 3.4 $dI_\nu = -I_\nu \alpha_\nu ds$
- 3.5 $dI_\nu = -I_\nu \kappa_\nu \rho ds$
- 3.6 $\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu$

- 3.7
$$d\tau_\nu(s) \equiv \alpha_\nu(s) ds$$
- 3.8
$$\tau_\nu(D) = \int_0^D \alpha_\nu(s) ds$$
- 3.9
$$\langle \tau_\nu(s) \rangle \equiv \frac{\int_0^\infty \tau_\nu(s) e^{-\tau_\nu(s)} d\tau_\nu(s)}{\int_0^\infty e^{-\tau_\nu(s)} d\tau_\nu(s)} = 1$$
- 3.10
$$l_\nu = \frac{\langle \tau_\nu(s) \rangle}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\kappa_\nu \rho}$$
- 3.11
$$\tau'_\nu(z_0) = \int_\infty^{z_0} \alpha_\nu dz$$
- 3.12
$$S_\nu \equiv j_\nu / \alpha_\nu$$
- 3.13
$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu$$
- vraag 3.24
$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau'_\nu} = I_\nu - S_\nu$$
- 3.14
$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu$$
- 3.15
$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu(D)} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu(D)})$$
- 3.16
$$I_\nu(D) \approx I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)] \tau_\nu(D)$$
- 3.17
$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu) = \int_0^\infty S_\nu(t'_\nu) e^{-t'_\nu/\mu} dt'_\nu / \mu$$
- 3.18
$$I_\nu^+(\tau'_\nu = 0, \mu) \approx S_\nu(\tau'_\nu = \mu)$$
- vraag 3.37
$$\mathcal{F}_\nu^+(\tau'_\nu = 0) \approx \pi S_\nu(\tau'_\nu = 2/3)$$
- 3.19
$$\tau_\nu = \int \alpha_\nu ds = \int \alpha_\nu^{\text{cont}} ds + \int \alpha_\nu^{\text{lijn}} ds$$
- 3.20
$$S_\nu^{\text{tot}} = \frac{\sum j_\nu}{\sum \alpha_\nu} = \frac{j_\nu^{\text{cont}} + j_\nu^{\text{lijn}}}{\alpha_\nu^{\text{cont}} + \alpha_\nu^{\text{lijn}}}$$
- 4.4
$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$
- 4.5
$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$
- 4.6
$$h\nu/kT \gg 1 \rightarrow B_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

$$4.7 \quad h\nu/kT \ll 1 \quad \rightarrow \quad B_\nu \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2}$$

$$4.8 \quad \frac{\nu_{\max}}{T} = 5.88 \times 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}$$

$$4.9 \quad \lambda_{\max} T = 0.290 \text{ cm K}$$

$$4.10 \quad B \equiv \int_0^\infty B_\nu d\nu = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

$$4.11 \quad B_\nu(T_b) = I_\nu^{\text{obs}}$$

$$4.12 \quad T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu^{\text{obs}}$$

$$4.13 \quad T_A \equiv \eta_A T_b$$

$$4.14 \quad \left. \frac{dI_\nu^{\text{obs}}}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_0} = \left. \frac{dB_\nu(T_c)}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_0}$$

$$4.15 \quad \sigma T_{\text{eff}}^4 = \mathcal{F}_{\text{bron}}^+$$

$$4.16 \quad \frac{n(v_x)}{N} dv_x = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-(1/2)mv_x^2/kT} dv_x$$

$$4.17 \quad \frac{n(v)}{N} dv = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-(1/2)mv^2/kT} dv$$

$$4.18 \quad \left[\frac{n_{r,s}}{n_{r,t}} \right]^{\text{TE}} = \frac{g_{r,s}}{g_{r,t}} e^{-(\chi_{r,s} - \chi_{r,t})/kT}$$

$$4.19 \quad \left[\frac{n_{r,s}}{N_r} \right]^{\text{TE}} = \frac{g_{r,s}}{U_r} e^{-\chi_{r,s}/kT}$$

$$4.20 \quad U_r \equiv \sum_s g_{r,s} e^{-\chi_{r,s}/kT}$$

$$4.21 \quad \left[\frac{n_{r+1,0}}{n_{r,0}} \right]^{\text{TE}} N_e = \frac{2g_{r+1,0}}{g_{r,0}} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r/kT}$$

$$4.22 \quad \left[\frac{N_{r+1}}{N_r} \right]^{\text{TE}} N_e = \frac{2U_{r+1}}{U_r} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r/kT}$$

5.1 $A_{ul} \equiv$ overgangswaarschijnlijkheid voor spontane deëxcitatie per seconde per deeltje in toestand u

$$5.2 \quad \psi(\nu - \nu_0) = \frac{\Gamma_u/4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_u/4\pi)^2}$$

$$5.3 \quad \bar{J}_{\nu_0} \equiv \frac{\int_0^\infty J_\nu \varphi(\nu - \nu_0) d\nu}{\int_0^\infty \varphi(\nu - \nu_0) d\nu} = \int_0^\infty J_\nu \varphi(\nu - \nu_0) d\nu$$

5.4 $B_{lu} \bar{J}_{\nu_0} \equiv$ aantal stralingsexcitaties per seconde per deeltje in toestand l

5.5 $B_{ul} \bar{J}_{\nu_0} \equiv$ aantal geïnduceerde deëxcitaties per seconde per deeltje in toestand u

5.6 $C_{ul} \equiv$ aantal botsingsdeëxcitaties per seconde per deeltje in toestand u

5.7 $C_{lu} \equiv$ aantal botsingsexcitatie per seconde per deeltje in toestand l

$$5.8 \quad \frac{B_{lu}}{B_{ul}} = \frac{g_u}{g_l} \quad \text{en} \quad \frac{A_{ul}}{B_{ul}} = \frac{2h\nu^3}{c^2}$$

$$5.9 \quad \frac{C_{ul}}{C_{lu}} = \frac{g_l}{g_u} e^{E_{lu}/kT}$$

$$5.10 \quad j_{\nu}^{\text{spont}} = h\nu_0 n_u A_{ul} \psi(\nu - \nu_0) / 4\pi$$

$$5.11 \quad \alpha_{\nu}^l = \frac{h\nu_0}{4\pi} [n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0) - n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)]$$

$$5.12 \quad S_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\psi/\varphi}{\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - \frac{\chi}{\varphi}}$$

$$5.13 \quad S_{\nu}^l = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - 1}$$

$$5.14 \quad \frac{n_u A_{ul}}{n_u B_{ul} \bar{J}_{\nu_0}} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2 \bar{J}_{\nu_0}} = e^{h\nu_0/kT} - 1$$

$$6.1 \quad \vec{E}_{\text{rad}}(r, t) = \left[\frac{q}{rc^2} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{v}) \right]$$

$$6.2 \quad \vec{B}_{\text{rad}}(r, t) = \left[\vec{n} \times \vec{E}_{\text{rad}} \right]$$

$$6.4 \quad \frac{dP}{d\Omega} \equiv \frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta$$

$$6.5 \quad P = \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \int \sin^2 \theta d\Omega = \frac{2q^2 \dot{v}^2}{3c^3}$$

$$6.7 \quad r_0 \equiv \frac{q^2}{mc^2}$$

$$6.8 \quad \sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$6.9 \quad \sigma_T \equiv \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

$$6.12 \quad \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{onpol}} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$6.12 \quad \sigma_c(\omega) = f_{lu} \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$6.13 \quad \sigma_e^R(\omega) \approx f_{lu} \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

$$6.14 \quad \sigma_e^T(\omega) = \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$$

$$6.15 \quad \left[\frac{d\sigma_e^T}{d\Omega} \right]_{\text{onpol}} = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta)$$

$$6.16 \quad \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c (1 - \cos \vartheta)$$

$$6.17 \quad \lambda_c \equiv \frac{h}{m_e c} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

$$6.18 \quad \nu_2 \approx \frac{4}{3} \gamma^2 \nu_1$$

$$6.19 \quad R_B = \frac{m_e v_{\perp} c}{eB} \text{ (cgs)} = \frac{m_e v_{\perp}}{eB} \text{ (mksA)}$$

$$6.20 \quad \nu_B = \frac{v_{\perp}}{2\pi R_B} = \frac{eB}{2\pi m_e c} \text{ (cgs)} = \frac{eB}{2\pi m_e} \text{ (mksA)}$$

$$6.21 \quad \nu_g = \frac{\nu_B}{\gamma} = \frac{eB}{2\pi \gamma m_e c}$$

$$6.22 \quad \nu_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \nu_B \sin \alpha = \frac{3}{2} \gamma^3 \nu_g \sin \alpha$$

$$6.23 \quad \nu_p = 9 \times 10^3 \sqrt{N_e} \text{ Hz}$$

$$7.2 \quad \frac{dn_i(\vec{r})}{dt} = \sum_{j \neq i}^N n_j(\vec{r}) P_{ji}(\vec{r}) - n_i(\vec{r}) \sum_{j \neq i}^N P_{ij}(\vec{r}) = 0$$

$$7.3 \quad T_b = T_b(0) + [T - T_b(0)] \tau_{\nu}(s)$$

$$7.4 \quad 1/\alpha_R \equiv \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_{\nu}} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu \right) / \left(\int_0^{\infty} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu \right)$$

$$7.5 \quad \mathcal{F}(z) = -\frac{16}{3} \frac{\sigma T^3}{\alpha_R} \frac{dT}{dz}$$

$$7.6 \quad l_{\nu}^* \approx \sqrt{N} l_{\nu}$$

$$7.8 \quad \alpha_{\nu_0}^a = \alpha_{\nu_0}^l \frac{C_{ul}}{A_{ul} + B_{ul} \mathcal{F}_{\nu_0} + C_{ul}}$$

$$7.8 \quad \alpha_{\nu_0}^s = \alpha_{\nu_0}^l \frac{A_{ul} + B_{ul} J_{\nu_0}}{A_{ul} + B_{ul} \mathcal{F}_{\nu_0} + C_{ul}}$$

$$7.9 \quad \epsilon_{\nu_0} \equiv \frac{\alpha_{\nu_0}^a}{\alpha_{\nu_0}^a + \alpha_{\nu_0}^s} = \text{destructiekans per extinctie}$$

$$7.10 \quad \epsilon_{\nu_0} = \frac{C_{ul}}{A_{ul} + B_{ul} \epsilon_{\nu_0} + C_{ul}}$$

$$7.11 \quad S_{\nu_0}^l = (1 - \epsilon_{\nu_0}) J_{\nu_0} + \epsilon_{\nu_0} B_{\nu_0}$$

$$7.13 \quad l_{\nu}^* \approx l_{\nu} / \sqrt{\epsilon_{\nu}}$$

$$7.14 \quad l_{\nu}^* \approx 1 / \sqrt{\alpha_{\nu}^a (\alpha_{\nu}^a + \alpha_{\nu}^s)}$$

$$7.15 \quad \tau_{\nu}^* = D / l_{\nu}^* \approx \sqrt{\tau_{\nu}^a (\tau_{\nu}^a + \tau_{\nu}^s)}$$

$$7.16 \quad L_{\nu} \approx 4\pi \alpha_{\nu}^a B_{\nu} V$$

$$7.18 \quad H_{\nu}(z) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \cos \theta I_{\nu}(z, \mu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu I_{\nu} d\mu$$

$$7.19 \quad K_{\nu}(z) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \cos^2 \theta I_{\nu}(z, \mu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mu^2 I_{\nu} d\mu$$

$$7.20 \quad J_{\nu} = 3 K_{\nu}$$

$$7.21 \quad \frac{1}{3} \frac{d^2 J_{\nu}}{d\tau_{\nu}^{\prime 2}} = J_{\nu} - S_{\nu}$$

$$7.22 \quad \frac{1}{3} \frac{d^2 J_{\nu}}{d\tau_{\nu}^{\prime 2}} = \epsilon_{\nu} (J_{\nu} - B_{\nu})$$

$$7.23 \quad S_{\nu}(\tau_{\nu}^{\prime} = 0) = \sqrt{\epsilon_{\nu}} B_{\nu}$$

Appendix C

Antwoorden

C.1 Vragen hoofdstuk 1

Vraag 1.1

Vergeleken met EM straling is de opbrengst van de andere astrofysische informatiedragers mager:

- *Neutrino's*. De neutrino's uit de zon dragen informatie in afwezigheid: er worden systematisch drie maal te weinig B^8 neutrino's gevonden in de chloor-detector die R. Davis sinds 1968 in de Homestead goudmijn in South Dakota exploiteert; sinds kort, en nog verontrustender, meet de galliumdetector te Baksan in de Kaukasus ook een gebrek aan *pp* neutrino's. Deze discrepantie impliceert een ernstig probleem voor het hele theoretisch bolwerk van nucleosynthese in sterren en van stervolutie; niettemin is hij tot dusverre meer voer voor deeltjesfysici en "missing-mass" speculanten dan invoer in stervolutiemodellen.

De neutrino's die ons bereikten (Kamiokande II en IMB detectoren) van supernova SN1987a in de Kleine Magelhaense Wolk bevestigen daarentegen de opvattingen rond de rol die neutrino's wordt toegeschreven in de supernova-explosie en stelden met hun geringe spreiding in tijdstip van aankomst een scherpe bovenlimiet op de grootte van de neutrino-massa (vaak speculatief van nul verschillend verondersteld): $m_{\nu_e} \leq 16$ eV, te weinig om het heelal met neutrino's te sluiten.

Van andere buitenaardse bronnen zijn nog geen neutrino's gedetecteerd; men bofte dat SN1987a pas afging toen de IMB en Kamiokande II net in bedrijf waren. (Davis kon ondanks z'n twintigjarig tekort aan zonneneutrino's de SN1987a neutrino's niet detecteren wegens de relatieve overmaat aan zonneneutrinovangsten in z'n detector — het is ook nooit goed.) Zie Bahcall (1989) voor meer details.

- *Baryonen*. De kosmische straling brengt ons atoomkernen van buiten het zonnestelsel, à 1–100 GeV en ten getale van 0.6 deeltjes $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ of 5 GeV $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ als de zonneactiviteit minimaal is, en de helft hiervan tijdens zonsmaximum. Deze straling bestaat uit atoomkernen, ruwweg over het periodiek systeem verdeeld volgens de zonneabon-

danties maar met een tekort aan protonen en een veelvoud aan Li, Be en B welke in de zon zijn opgefuseerd. De oorsprong van de kosmische straling is nog immer onbekend.

De *zonnwind* bevat ruwweg 5 protonen cm^{-3} van 10–100 MeV. Ze komen uit de coronale gaten waarin het magnetisch veld van de zon een open structuur heeft (elders prikt het in gesloten lussen weer terug door het oppervlak). De sterkte wisselt met de zonsactiviteit die daardoor de de ionosfeer en wellicht het klimaat beïnvloedt.

- *Gravitatiestraling*. Nog niet gedetecteerd, ondanks grote inspanningen in vele fysische laboratoria. Wel volgt indirect bewijs van het bestaan van Einsteinse gravitatiegolven uit de baanbeweging waarin de twee neutronensterren van de dubbelpulsar PSR1913+16 om elkaar heen draaien. Het periastron verschuift, analoog aan de Einsteinse bijdrage tot de periheliumverschuiving van Mercurius, maar met maar liefst 4.2° per jaar in plaats van $23''$ per eeuw, maar ook neemt de omlooperperiode af, precies in overeenstemming met de baankrimping die volgt uit het berekende verlies aan impulsmoment door gravitatiestraling.
- *Meteorieten en komeetinslagen*. Vooral bijdrage aan bepaling van de kosmische abundanties; de meeste meteorietabondanties stemmen nauwkeurig overeen met de zonneabondanties. Chondrieten lijken van de maan of van Mars te komen, en er worden organische stoffen in meteorieten aangetroffen die vermoedelijk van buitenaardse oorsprong zijn.
- *Radar*. Oppervlaktekaart van Venus; nieuwe hogeresolutie kaarten van deze planeet worden nu gemaakt door *Magellan*.
Bijhouden van de afstand aarde-maan met de Apollo Lunar Ranging laser-echo's.
Nauwkeurige toetsing van de algemene relativiteitstheorie door time-delay metingen met de Viking Landers en Orbiters (zie Rutten 1980; dezelfde echo-techniek zal met *Ulysses* gebruikt worden in een poging gravitatiegolven te detecteren).
- *Sondes, orbiters, landers, encounters*. Het hele planetenstelsel van nabij: de grootste sprong die de mensheid in scheidend vermogen heeft gemaakt is

die van de refractor waarmee Schiaparelli in de vorige eeuw Marskanalen ontdekte naar de Viking landers die daadwerkelijk voren in de Marsbodem trokken. Daarmee is planeetonderzoek een uitbreiding der geologie, geofysica en meteorologie geworden, niet zozeer van de astrofysica.

- *Astronauten en kosmonauten.* De duurste informatiedragers, met meer waar per dollar dan per roebel.

Vraag 1.2

Geen kennis van stralingsprocessen of stralingstransport is nodig voor:

- *Astrometrie.*
Parallaxbepaling, meridiaankijkerij, visuele dubbelsterbaanbepaling, asteroïdebaanbepaling.
- *Jagen.* Speuren naar kometen, nova's, supernova's.

Vraag 1.3

Vaste-stof fysica: planeten, kometen, neutronensterren, interstellair materie.

Vraag 1.4

Een spectrograaf bestaat meestal uit een *collimator* die de opvallende (ongedispergeerde, "witte") straling evenwijdig maakt en naar de *dispergeerder* stuurt (prisma, tralie, kristal). Deze ontvangt dan een vlak golffront, heeft zelf vlakke oppervlakken, en spreidt door breking of interferentie het licht in vlakke golffronten die voor verschillende golflengten verschillende hoeken met de normaal op het uittrede-oppervlak maken. Ze worden met een *camera* gefocusseerd (Figuur C.1); bij *autocollimatie* wordt eenzelfde lens gebruikt als collimator en als camera, met een tralie dat het ontvangen ongedispergeerde licht door dezelfde lens gedispergeerd terugspiegelt of met een prisma met spiegelende achterkant. Ook gebruikt men soms een gekromd tralie; dan vervallen zowel collimator als camera.

Samen vormen deze drie elementen een afbeelding van wat zich als voorwerp in het brandvlak van de collimator bevindt. Doorgaans is daar een ingangsspleet, loodrecht op de dispersierichting, die in het spectrum monochromatisch wordt afgebeeld. Hij voorkomt overlap. Zonder spleet wordt het voorwerp ook in de breedte afgebeeld in het spectrum: op elke plaats in het spectrum zijn er dan bijdragen van verschillende kleur die komen van in dispersierichting verschillende delen van het voorwerp. De spleet bevindt zich in het beeldvlak van de telescoop zodat het doorgelaten deel van het objectbeeld ook scherp in het spectrum wordt afgebeeld.

Zonder spleet levert een uitgebreid voorwerp overlappende monochromatische beelden. Het spectrum van de zon bestaat in het zichtbaar uit een continuum met absorptielijnen (bijvoorbeeld Figuur 1.2) en levert spleetloos een versmeerd continuum met veel overlap-

pende donkere zonnescijfbeelden; spectra die bestaan uit spaarzame emissielijnen leveren reeksen monochromatische zonsbeelden in die lijnen. Gebruik van een spleetloze spectrograaf bij zonsverduisteringen levert sikkelvormige beelden van de emissielijnen, zoals in Figuur C.2.

Zulke eclipsspectra worden spleetloos opgenomen omdat de resterende zonnescikkel smal genoeg is om spectrale overlap te voorkomen, terwijl het moeilijk is om een spleet van de juiste kromming precies te vullen met deze smalle sikkels tijdens de luttele seconden waarin de maan het laatste restje zon nog niet heeft afgedekt. (Omdat de rest buiten de dampkring wordt afgedekt is er dan geen verstrooid licht van de overige zonnescijf; normaliter is dat veel te sterk om spectroscopie van de uiterste rand toe te staan. Zie Figuur 8.13).

Vraag 1.5

H I = het spectrum van neutraal waterstof (proton + electron).

H II = het spectrum van geïoniseerd waterstof (H^+ , vrij proton).

H III bestaat niet.

H I bevat de Lyman-, Balmer-, Paschen-, Pfundt- etc. reeksen, zie Figuur 1.4.

H II heeft geen spectraallijnen, er is geen gebonden electron dat bb springen kan.

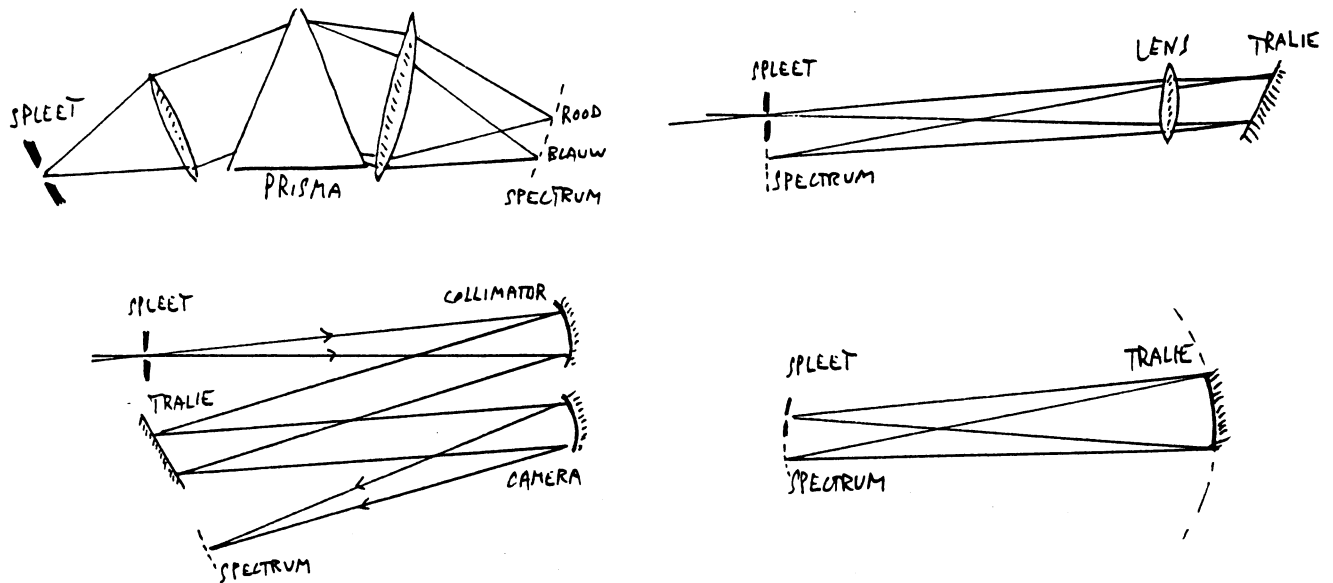
De 21 cm lijn hoort tot het H I spectrum maar niet tot de reeksen bb sprongen van het electron; deze overgang wordt veroorzaakt door spin-omkering van het electron in de grondtoestand. De laatste is dus dubbel; de splitsing bedraagt $\Delta E_{\text{spin}} = 6 \times 10^{-6}$ eV.

Fe XII is het spectrum van Fe^{11+} . Dat bevat zeker lijnen omdat het twaalfde, dertiende electron etc. nog bb kunnen springen. De binding van deze binnenschil-electronen is sterk, dus zijn de ΔE_{mn} groot en liggen de lijnen op korte golflengten. Zie Figuur 8.11 voor een voorbeeld van een emissielijn van Fe XII bij 195 Å.

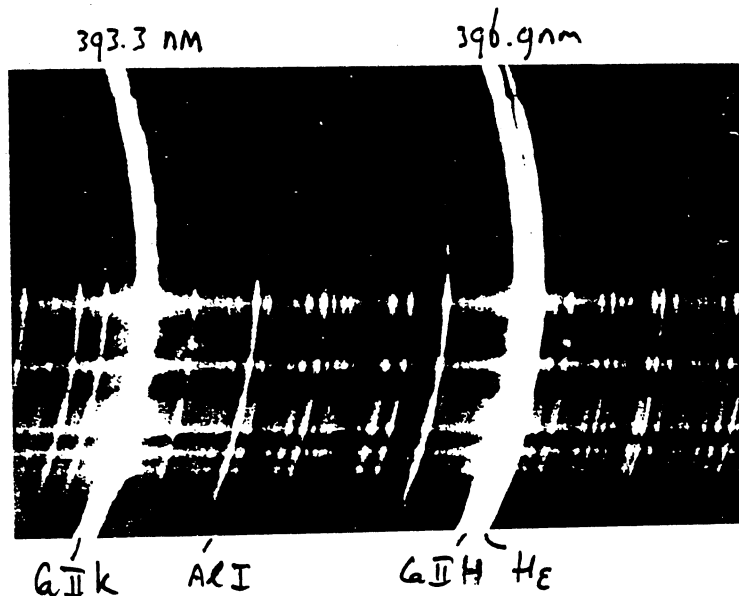
Vraag 1.6

In het zonnenspectrum bevinden de Na I D lijnen zich op hun rustgolflengten: de zon staat stil (*cf.* Galilei Galileo). In het quasarspectrum is Ly α echter verschoven van 121.6 nm naar de waargenomen golflengte van 353 nm door de kosmologische roodverschuiving; deze quasar staat op $z = 1.9$. Het Ly α woud heeft vermoedelijk te maken met waterstofwolken onderweg, hetzij wolken die door de bron met forse snelheden zijn uitgestoten zodat de Dopplerverschuiving van de wolken tussen de bron en ons de kosmologische roodverschuiving gedeeltelijk compenseert, hetzij wolken in clusterhalo's of wolken tussen clusters op kleinere afstand.

Vraag 1.7



Figuur C.1: Schema's van prismaspectrograaf met lenzen, roosterspectrograaf met spiegels, autocollimatie- of "Littrow"-opstelling en een "Rowland circle"-opstelling met alleen een gekromd tralie. De intreespleet dient om de intreedirectionen zó te beperken dat elke uitreederichting slechts één kleur vertegenwoordigt: elk spectraal element is dan de monochromatische afbeelding van de spleet en het daardoor toegelaten stukje telescoopbeeld. De spleet dient voldoende smal te zijn dat het spectraal oplossend vermogen van rooster of prisma en het ruimtelijk oplossend vermogen van de telescoop niet teloor gaan.



Figuur C.2: Spleetloos spectrum opgenomen tijdens een totale zonsverduistering. De twee sterkste lijnen zijn de H & K resonantielijnen van Ca II (zie termschema van Ca II in appendix A en ook paragraaf 8.3.2.3). De derde sterke lijn is H ϵ uit de Balmerreeks. Naar een opname van J. Houtgast en C. Zwaan, Khartoem 1952.

H I bf processen: ionisatie van en recombinatie tot neutraal waterstof, respectievelijk stralingsionisatie en botsingsionisatie waarbij het electron uit een waterstofatoom wordt vrijgemaakt, en stralingsrecombinatie en botsingsrecombinatie waarbij een vrij electron door een vrij proton wordt ingevangen.

Bij remstraling van een vrij proton wordt het electron niet ingevangen maar resulteert de ontmoeting slechts in emissie of absorptie van een foton, met bijbehorende afname of toename van de totale kinetische energie; notatie: H I ff.

Vraag 1.8

De fotonconversiereeksen die mogelijk zijn met het Lyman continuum spelen een belangrijke rol in de stralingshuishouding van planetaire nevels. Waterstofatomen in de grondtoestand worden daarin door Ly cont fotonen van de hete centrale ster geïoniseerd. Daarop kan bijvoorbeeld recombinatie volgen met emissie van een Balmer continuum foton en een Ly α foton, dus een conversie naar twee heel andere golflengten.

Ga na (Figuur 1.4) dat ook allerlei andere meertraps paden van het H I continuum naar de H I grondtoestand leiden; tezamen verzorgen deze het "Zanstramechanisme", zie paragraaf 8.4.3.1.

Vraag 1.9

In geïnduceerde deëxcitatie wordt een aangeslagen atoom door een passerend foton op de bb lijngolflengte tot deëxcitatie "gestimuleerd"; er is geen kinetische energie mee gemoeid. Wel is het zo dat met het voorafgaande proces waarbij het atoom in de aangeslagen toestand werd gebracht bewegingsenergie kan zijn gemoeid geweest, bijvoorbeeld als dat gebeurde per botsingsexcitatie uit een lager niveau of botsingsdeëxcitatie uit een hoger niveau.

Bij geïnduceerde recombinatie stimuleert het langskomende foton met energie $h\nu$ tot invang van een electron met de juiste kinetische energie $(1/2)m_e v^2$ in een gebonden toestand met de juiste ionisatie-energie $\Delta E_{\infty n}$, zó dat de beide energieën samen die van het foton geven:

$$h\nu = (1/2)m_e v^2 + \Delta E_{\infty n}.$$

De kinetische energie van het vrije electron wordt dus omgezet in foton-energie; recombinatie gaat dus *altijd* gepaard met (enige) uitwisseling tussen stralingsenergie en bewegingsenergie.

Vraag 1.10

Bij botsingsrecombinatie wordt een vrij electron ingevangen door een atoom of electron; het derde deeltje neemt de vrijkomende energie als kinetische energie mee. Zulke drievoudige botsingen zijn zeldzaam tenzij de deeltjesdichtheid hoog is.

Vraag 1.11

Ook voor ff overgangen zijn er vijf processen: remstralingsemissie, geïnduceerde remstralingsemissie, remstralingsabsorptie en drie-deeltjes botsingen waarbij het tweede deeltje energie wint of verliest. Het onderscheid tussen de laatste twee doet niet terzake aangezien het ion (atoom, molecuul) zelf niet van structuur verandert: of het tweede dan wel het derde deeltje energie wint maakt hier niet uit.

Vraag 1.12

De paren fotoncreatie en fotonverstrooiing zijn ook mogelijk met geïnduceerde in plaats van spontane stralingsdeëxcitatie. Daarnaast is er ook botsingsexcitatie gevolgd door botsingsdeëxcitatie, zonder foton.

Vraag 1.13

Voor bf en ff processen gelden dezelfde procesparen als voor bb processen, maar de "identiteit" van het foton is minder scherp bepaald. Bij opeenvolgende bb verstrooiingsprocessen wordt hetzelfde quantum energie keer op keer opnieuw gebruikt: het uitgezonden foton verschilt alleen van het ingevangen foton in richting (en bij niet-coherente verstrooiing soms een heel klein beetje in golflengte): het blijft een lijnfoton van de betreffende bb overgang. Men spreekt derhalve van fotonverstrooiing alsof het foton per verstrooiing blijft bestaan.

Bij bf verstrooiing (fotoionisatie gevolgd door spontane of geïnduceerde recombinatie) verandert het quantum wel van golflengte omdat het deel boven de ionisatiegrens elke waarde mag hebben. Een door een foton tot een ion geïoniseerd atoom kan recombineren met een electron met andere bewegingsenergie dan die van het zojuist vrijgemaakte electron: er vindt herverdeling plaats over het ionisatiecontinuum, ook als de recombinatie weer dezelfde gebonden toestand levert.

Bij seriegrenscontinua die behoren bij toestanden diep in het termschema, ver van de ionisatiegrens, is het vaste deel $E_{\infty} - E_n$ groter dan het geredistribueerde deel boven de ionisatiegrens. De identiteit van het foton kan dan goeddeels, maar niet exact, worden vastgehouden.

Bij ff processen is er in het geheel geen identiteitsbehoud omdat er geen gebonden toestand bij betrokken is. Verstrooiing gaat daarvoor altijd gepaard met redistributie over het ff continuum.

Vraag 1.14

Bij fotonconversie zoals in Figuur 1.7 komen de twee fotonen op de langere golflengten (3-2 en 2-1) vrij na stralingsexcitatie van het bovenste niveau vanuit de grondtoestand (1-3). Met 1-2 stralingsexcitatie gevolgd door 2-3 stralingsexcitatie kan de omgekeerde weg bewandeld worden; herhaling levert dan weer dat de fotonen uiteindelijk heel ergens anders vrij kunnen

komen dan waar ze zijn ontstaan.

Waarschijnlijker is echter dat sterke resonantieversstrooiing optreedt in de 1-2 overgang: eenzelfde quantum kan dan veelvuldig per 1-2 plus 2-1 op en neer springen voor het uiteindelijk in 3-2 en 2-1 fotonen wordt gesplitst. Ook dan zijn de laatste fotonen niet kenmerkend meer voor de plaats waar ze vrijkwamen maar voor de omstandigheden waarmee de initiële 1-3 excitatie werd verricht. Dat is de situatie in planetaire nevels (paragraaf 8.4.3.1); de 2-1 fotoncreatie vindt daarbij plaats in de centrale ster, de 3-2 en 2-1 splitsing in de nevel. We nemen de laatste fotonen waar; hun aard zegt meer over de ster dan over de nevel waar ze uit komen.

Koppeling met de lokale bewegingsenergieën treedt op bij fotoncreatie en fotondestructie; in een drie-niveau situatie zoals in Figuur 1.7 is dat mogelijk in elk van de drie overgangen. Bijvoorbeeld kan botsingsdeëxcitatie optreden van niveau 2 naar niveau 1; dat houdt dan gedeeltelijke vernietiging in van het oorspronkelijke exciterende 1-2 foton. Dit komt veel voor bij spectra waarin niveau 2 "metastabiel" is, *i.e.* dat de kans op stralingsdeëxcitatie in 2-1 klein is. Dit is ondermeer het geval bij Ca II en Fe II (zie termschema's in appendix A).

Vraag 1.15

De hemel is licht in plaats van donker omdat het zonlicht door moleculen en stofdeeltjes wordt verstrooid; de eerste verstrooiing is sterker op blauwe golflengten dan op rode (Rayleighverstrooiing, hoofdstuk 6) en daarom is de hemel blauw. De blauwe kleur heeft dus niets met temperatuur te maken. Het witte licht van wolken wel: dat is direct weerkaatst zonlicht, met de kleurtemperatuur van de zonnestraling.

De maan weerkaatst ook zonlicht met behoud van kleurtemperatuur, tenzij hij zo laag aan de hemel staat dat er veel blauw uit de maneschijn is weggestrooid en rood overblijft.

Vraag 1.16

De gemiddelde dichtheid van de zon (1.4 g cm^{-3}) is gelijk aan die van asfalt; door een laag van 1.4 millioenen km asfalt kijk je op geen enkele golflengte heen.

De doorzichtigheid van het zonnegas aan de buitenkant is niet hetzelfde op alle golflengten: in tegenstelling tot mensen is de zonneatmosfeer ondoorzichtiger voor Röntgen- en radiostraling dan voor visuele straling. De bolschil waar de ontsnappende fotonen vandaan komen ligt voor verschillende golflengten op verschillende dieptes in de zon: hoe doorzichtiger het gas, hoe dieper ligt dit "oppervlak".

Vraag 1.17

Juist omdat de zon voor neutrino's doorzichtig is is het interessant neutrino's uit de zonnekern te detecteren:

ze verschaffen een directe blik in de fusiegenerator.

Ze zijn te onderscheiden van de neutrino's uit andere sterren door hun richting te bepalen. Nodig is dit niet aangezien de verhouding neutrino-zonneschijn/neutrino-sterrenschijn gelijk is aan het dag/nacht verschil in fotonen, of nog groter als neutrino's geen behouden deeltjes blijken te zijn.

(Het neutrino dag/nacht verschil is nihil omdat de rode neutrino dun is.)

Vraag 1.18

Verstrooiing wordt belangrijker naarmate de kans op fotondestructie door botsingsdeëxcitatie kleiner wordt. Een atoom (ion, molecuul *etc.*) in een aangeslagen toestand vervalt na verloop van tijd spontaan, tenzij het eerder al geïnduceerd of door een botsing wordt gedeëxciteerd. Alleen in het laatste geval verdwijnt het quantum stralingsenergie; de kans op fotonidentiteitsbehoud en verstrooiing is groter naarmate de verblijftijd in het aangeslagen niveau minder door botsingen wordt bekort.

Vraag 1.19

Bij cyclotron-, synchroton-, annihilatie- en niet-thermische remstraling komt straling vrij uit energie die niet door een kinetisch-evenwichtstemperatuur wordt beschreven.

Een ander voorbeeld vormt de Na I D emissie van de snelwegverlichting: in gasontladingslampen volgt stralingsdeëxcitatie op botsingsexcitatie met gebruik van niet-thermische bewegingsenergie — een potentiaalverschil in plaats van warmte.

Vraag 1.20

De dampkring is niet in thermisch evenwicht met de zonnestraling (dan zou de temperatuur ervan 5700 K bedragen) noch met blauwe hemelstraling. De aarde verkeert wel in *stralingsevenwicht* met de zonnestraling: evenveel erin als eruit, maar met fotonconversie van zichtbaar naar infrarood en herverdeling over het aardoppervlak.

Vraag 1.21

We lopen de hamvragen na:

- *emissie of absorptie?* De Na I D lijnen van de vlam zijn in emissie, gesuperponeerd op een zwakker achtergrondcontinuum;
- *optisch dik of dun?* De vlam is optisch dun dus is de straling uit de vlam een directe afspiegeling van de processen die zich er in afspelen: (vrijwel) elk foton dat in de vlam wordt aangemaakt ontsnapt onmiddellijk.
- *Uit welke laag?* Uit de vlam. Er is geen andere stralingsbron dus het probleem dat van elders komende fotonen in de vlam slechts worden verstrooid doet zich niet voor: alle Na I D fotonen die we zien zijn in de vlam gemaakt.

- *Wat voor processen?* Het termschema van Na I (zie appendix A) laat zien dat de twee-niveau vereenvoudiging voor deze lijnen goed opgaat: er is geen tussenliggend niveau als in Figuur 1.7 dat fotonconversie belangrijk zou kunnen maken.

Alle waargenomen lijnfotonen zijn het gevolg van stralingsdeëxcitatie in de vlam; wat verzorgde de voorafgaande excitatie van de twee bovenniveau's? Resonantieverstrooiing kan niet belangrijk zijn want alle fotonen verlaten de vlam direct. Magneetvelden *etc.* doen niet mee; de deeltjessnelheden in de vlam zijn thermisch bepaald. Dus zijn de uittredende fotonen gecreëerd per botsingsexcitatie. Fotondestructie is onbelangrijk; de lijnfotonen krijgen geen kans om per stralingsaanslag+botsingsdeëxcitatie vernietigd te worden omdat de vlam te doorsichtig is.

- *thermisch of niet-thermisch?* Lastige vraag! De lijnfotonen worden thermisch gecreëerd, *i.e.* uit bewegingsenergie die goed door een evenwichtstemperatuur wordt gekenschetst, maar toch hoeft de straling niet in thermisch evenwicht met de vlam te zijn. Het feit dat de fotonen onmiddellijk ontsnappen houdt in dat de straling kan "weten" dat een ander medium, met een heel andere temperatuur dan die van de vlam, zich rond de vlam bevindt; de vraag is of de twee aangeslagen toestanden van natrium dat daardoor ook merken. Als er teveel Na I D fotonen wegvliegen ten opzichte van het aantal botsingsdeëxcitaties van de beide aangeslagen niveau's dan zal hun bezetting niet zo groot zijn als hij volgens de temperatuur, zonder deze "fotonverliezen", hoort te zijn; er komen dan minder Na I D fotonen uit de vlam dan de temperatuur ervan doet verwachten. Als er echter zoveel botsingsdeëxcitaties optreden dat het verlies in de relatief schaarse stralingsdeëxcitaties niet van belang is dan is de bezetting van de aangeslagen niveau's wat hij volgens de temperatuur hoort te zijn, en zal de straling in de Na I D lijnen daar ook mee overeenstemmen.

Een direct analogon aan deze situatie wordt gevormd door de Röntgenstraling van de zonnecorona. De corona bevat ook een optisch dun heet plasma waarin de fotonen door thermische excitatie worden gecreëerd en dan meteen wegvliegen, de lege ruimte in (paragraaf 8.4.1). De dichtheid van de zonnecorona is vele malen lager dan die van laboratoriumvlammen zodat de botsingsfrequentie er veel kleiner is; de Röntgenstraling uit de zonnecorona is derhalve verre van thermisch. Voor de straling van laboratoriumvlammen is vaak aangenomen dat deze wel thermisch is, maar veelal onterecht.

Vraag 1.22

Met aanstraling van de vlam uit een helderder bron verandert de situatie aanzienlijk: nu is er een sterke bron

van niet-lokale fotonen die verstrooiingsprocessen kunnen leveren. Het waargenomen continuum wordt nu bepaald door de sterke achtergrondstraling; de vraag is wat er op de Na I D golflijnen gebeurt.

Als de achtergrondfotonen een aanzienlijke bijdrage aan de bezetting van de twee aangeslagen niveau's levert, *i.e.* als stralingsexcitatie overheerst over botsingsexcitatie, wordt fotonverstrooiing belangrijker dan fotoncreatie. Bij die verstrooiing verdwijnen Na I D fotonen in alle richtingen, ook zijwaarts de richting van aanstraling uit. Naar de achtergrondbron kijkend neemt men minder fotonen waar dan op een naastliggende golflijntje waarop géén extra bb verstrooiing optreedt; dus verschijnen de Na I D lijnen in absorptie op het heldere continuum.

Vraag 1.23

Het is onjuist om de Na I D lijnen uit de aangestraalde vlam zonder meer te vergelijken met die van de zon, ook al toont de zon ze ook in absorptie op een helder continuum. De reden is dat de zon, in tegenstelling tot de vlam, niet optisch dun is.

Stel dat ook in de zon verstrooiing optreedt van fotonen die elders (dieper) zijn gevormd, dan is het niet duidelijk of die fotonen net zoals bij de vlam zijwaarts uit de kijkrichting kunnen ontsnappen. Omdat de zon optisch dik is kunnen ze best weer worden ingevangen en weer terug in de kijkrichting worden verstrooid.

Omdat de zon optisch dik is hebben we niet genoeg aan de vaststelling van de excitatie- en deëxcitatiemechanismen; ook het *stralingstransport* van de fotonen in de zonnatmosfeer moet in detail worden bestudeerd. Dit is het essentiële verschil tussen vlamspectroscopie en astrofysische spectroscopie: *de meeste astrofysische objecten zijn optisch dik.*

Vraag 1.24

Het feit dat $\text{Ly}\alpha$ in Figuur 1.3 in emissie is zegt niets over het al dan niet optisch dun zijn van het brongebied van de lijn in of nabij de quasar, of over de moeilijkheidsgraad van de interpretatie ervan. Na beantwoording van de eerste hamvraag staan alle andere nog open.

C.2 Vragen hoofdstuk 2

Vraag 2.1

dE_ν wordt gemeten in erg (cgs) of Joule (mksA).

Vraag 2.2

De definitie van intensiteit

$$I_\nu \equiv \frac{dE_\nu}{dt d\nu dO d\Omega}$$

levert voor de hoeveelheid energie dE_ν in een spectrale band gemeten met verschillende eenheden van bandbreedte:

$$I_\nu d\nu = \frac{dE_\nu}{dt dO d\Omega} = I_\lambda d\lambda.$$

Een gegeven spectrale band ligt respectievelijk tussen ν en $\nu + \Delta\nu$ in frequentie en tussen $\lambda + \Delta\lambda$ en λ in golflengte, dus $\nu = c/(\lambda + \Delta\lambda)$ en $\lambda = c/(\nu + \Delta\nu)$. Dat levert $\Delta\nu = c \Delta\lambda/(\lambda^2 + \lambda\Delta\lambda)$ en in de limiet voor $\Delta \rightarrow 0$: $d\nu = c d\lambda/\lambda^2$. Eenvoudiger met de kettingregel: $d\nu = d(c/\lambda) = -(c/\lambda^2) d\lambda$, of per logaritme: $\log \lambda + \log \nu = \log c$, dus $d \log \lambda + d \log \nu = 0$, dus $d\lambda/\lambda = -d\nu/\nu$.

De tekens verschillen afhankelijk van de definitie van $d\nu$ en $d\lambda$; kiezen we beide toenemend dan zijn I_ν en I_λ beide positief en geldt $I_\lambda = I_\nu c/\lambda^2$ en $I_\nu = I_\lambda c/\nu^2$. Deze twee intensiteiten zijn *niet* numeriek gelijk.

Vraag 2.3

[erg cm⁻³ s⁻¹ ster⁻¹]: $\Delta\lambda$ wordt in cm gemeten en die cm⁻¹ is bij de cm⁻² gevoegd;

[erg cm⁻² ster⁻¹]: $\Delta\nu = \text{Hz}^{-1} = (1/\text{sec})^{-1}$ is weggestreept tegen de sec⁻¹;

[erg cm⁻¹ s⁻¹ ster⁻¹]: $\Delta\sigma$ in cm⁻¹ is weggestreept tegen één kant van de vierkante cm.

Geen van deze schrijfwijzen is aanbevelenswaardig.

Vraag 2.4

Impliciet is aangenomen dat:

- de isotrope straler zich ver weg van de aarde bevindt;
- de bolvormige straler zich alleen in het heelal bevindt zonder bestraling door een ander object;
- het isotrope stralingsveld ter plekke wordt gemeten.

In geen van de drie vragen is de plaats van het meetvlakje van 1 cm² precies gespecificeerd. Waar ergens "net buiten de aardse dampkring" wordt \mathcal{R}_ν gemeten? Wordt de integraal $\iint \mathcal{F}_\nu dO$ over het boloppervlak van de straler zelf genomen, of er binnen of er buiten? Waar wordt de flux van het isotrope stralingsveld gemeten?

Doorgaans is de lokatie en oriëntatie van het meetvlak, net als hier, impliciet wel duidelijk; het is niettemin verstandig zich altijd rekenschap te geven wáár en in welke richting precies gemeten wordt.

Vraag 2.5

Een stukje van het ringetje op "breedte" θ en "lengte" φ van de bol met straal r heeft breedte $r\Delta\theta$ en lengte

$r \sin \theta \Delta\varphi$, dus oppervlakte:

$$\Delta O = r^2 \sin \theta \Delta\theta \Delta\varphi.$$

Daarmee is de ruimtehoek in de limiet $\Delta \rightarrow 0$ in poolcoördinaten:

$$d\Omega = dO/r^2 = \sin \theta d\theta d\varphi \text{ ster.}$$

Een hele bol meet, vanuit het middelpunt gezien,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi \text{ ster}$$

en een kamerhoek meet, gemeten vanuit het hoekpunt,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ ster.}$$

Vraag 2.6

I_ν hangt *niet* af van $\Delta\Omega$; daar is de definitie van intensiteit juist voor gemaakt. De hoeveelheid energie dE_ν neemt toe met de bundelhoek $d\Omega$; I_ν is daarbij de evenredigheidsconstante en verandert niet.

Vraag 2.7

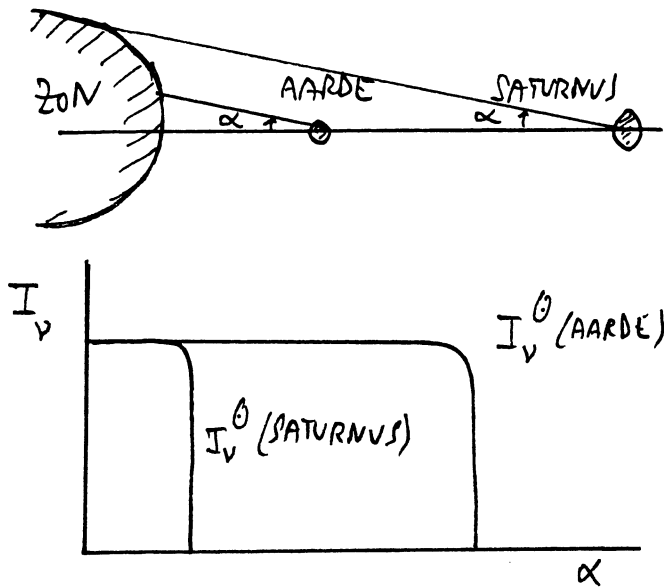
Een spotmeter meet intensiteit omdat de detector zich in het beeldvlak van een lens bevindt: de detector meet de energie die langs de gezichtslijn, *i.e.* langs een straal, binnenvalt over de door de detectorgrootte en brandpuntsafstand bepaalde beelduitsnede. Dat is een ruimtehoek. De afstand tot het voorwerp doet er niet toe zolang de meethoek $\Delta\Omega$ maar homogeen met straling is gevuld. De intensiteit van het gelaat uwer geliefde blijft gelijk, mits in detail opgelost, gemeten van verre met een telens dan wel van nabij met een groothoeklens.

Vraag 2.8

De *monochromatische intensiteit* I_ν blijft bij breking door een prisma behouden omdat deze langs de - gebroken - straal wordt gemeten. De *totale intensiteit* wordt in een richtingswaaier gesplitst die niet meer voldoet aan de definitie van meting per eenheid van ruimtehoek rond een gegeven richting.

Vraag 2.9

De hoek die de zon aan de hemel opspant is vanaf de aarde tien maal zo groot als vanaf Saturnus en de zonneschijf in steradianen dus honderd maal zo groot. De intensiteit van de schijf is vanaf beide planeten gelijk, maar de aarde ontvangt honderd maal meer zonne-energie per cm² (Figuur C.3).



Figuur C.3: De intensiteit van de zon vanaf de aarde en vanaf Saturnus.

Vraag 2.10

Op de zonverlichte maan is de verlichting gelijk aan die op aarde bij volle zonschijn in een maan-achtig landschap met donkere bodem, bijvoorbeeld vulkanisch. Een foto op de maan zelf vraagt dezelfde belichtingstijd als een foto in zo'n zwart lavalandschap op aarde; maanfotografie vanaf de aarde of fotografie van het maansbeeld achter een aardse telescoop eveneens, want onderweg naar en door de telescoop heen verandert de intensiteit niet.

Op Mercurius is de zonschijn veel feller omdat de zon daar een veel groter stuk van de hemel beslaat.

Vraag 2.11

Een intensiteitsmeter meet opvallende energie (fotochemische zwarting van emulsiekorrels in een film, fotoelectrische vrijmaking van electronen in de kathode van een photomultiplier, opeenhoping van lading in een CCD-pixel) en moet voldoen aan de eis dat deze energie ΔE_v wordt gemeten in een zo kleine ruimtehoek $\Delta\Omega$ langs de bundel dat de straling daarbinnen homogeen is. Dat betekent dat de detector "gevuld" moet zijn met een homogene beelduitsnede; de gemeten energiestroom per eenheid van ruimtehoek *etc.* is dan gelijk aan de intensiteit van dat stukje van het object.

De amateur kan bijvoorbeeld een photomultiplier monteren in het beeldvlak, achter een instelbaar diafragma (een photomultiplier is een goede keus voor precisiefotometrie als éénskanaalsdetectie geen bezwaar is. Ze zijn veel nauwkeuriger dan CCD's en ze hebben een groot dynamisch bereik). Met het diafragma kan de amateur de beelduitsnede beperken.

Nog beter is het als zij nabij het brandvlak met di-

afragma ook een veldlens aanbrengt waarmee de *apertuur* of *pupil* (objectieflens, hoofdspiegel) op de kathode wordt afgebeeld. Dan spelen de grootte en de oppervlaktehomogeniteit van de kathode geen rol: elke diafragma-grootte geeft een even grote vlek op de kathode.

Een monochromatisch kleurfilter vlak voor de kathode is ook welkom, eventueel verwisselbaar.

De amateur dient steeds het diafragma voldoende ver dicht te draaien dat alleen een homogeen stukje van het zonsoppervlak, de zonnevlek, de rode Jupitervlek of de Melkweg op de kathode valt, en zij dient de grootte van het diafragma zorgvuldig te meten of te ijken.

Vraag 2.12

In principe kan de amateurastronoom ook de intensiteit van Sirius meten door een voldoende grote telescoop te gebruiken welke Sirius zo ver oplost dat een homogeen stukje Sirius-oppervlak (bijvoorbeeld het midden van de sterschijf) kan worden geselecteerd met het diafragma.

Het hoekscheidend vermogen van een telescoop wordt gegeven door (Rayleigh criterium): $\Delta = 1.22 \lambda/D$ rad met D de diameter van de apertuur, of in boogseconden $\Delta'' = 0.13/D_m$ met D_m in meter voor een golflengte van 520 nm, prettig in het oog.

Sirius A staat op 2.7 pc en is 1.8 maal zo groot als de zon (Allen 1976, paragraaf 114), dus de hoekgrootte van Sirius A is 3×10^{-8} rad of $0.0062''$. Oplossing van de Siriuusschijf in twee resolutie-elementen vereist daarmee een telescoop van 21 m diameter; voldoende resolutie-elementen om het midden-rand verloop over de schijf te meten - *i.e.* de hoekverdeling van de gemiddelde oppervlakte-intensiteit - vraagt een telescoop van minstens 200 m; ondoenlijk derhalve voor een amateur. (En ook voor professionele astronomen; optische interferometrie over 200 m basislijn kan het beste vanaf de maan worden gedaan. Dat duurt nog wel even.)

De schijnbaar grootste sterren aan onze hemel (nabije superreuzen zoals Betelgeuze = α Ori, klasse M2 I, op 200 pc) kunnen in principe wél met bestaande optische telescopen worden opgelost. In de praktijk echter niet, door de onscherpte tengevolge van atmosferische onrust (*seeing*): het trillen en dansen van beelden dat op de beste plekken op aarde (Chili, La Palma, Hawaii) beeldversmering over $0.2-1.0''$ veroorzaakt, en elders (Nederland) over $1-10''$.

Impliciet was bij de intensiteitsmetingen van vraag 2.11 verondersteld dat de lichtstralen een getrouwe één-op-één afbeelding verzorgen van een stukje oppervlak van het object op een stukje beeld in het telescoopbrandvlak, maar als atmosferische *seeing* de stralen onderweg door elkaar husselt gaat dat niet op.

Het *seeing*-versmeerde sterschijfje in het beeldvlak van aardse telescopen is dus wel groter dan de telescoopresolutie, maar het bevat geen hoekafhankelijke intensiteitsinformatie meer - alleen irradiantie.

Vraag 2.13

In de ruimte ontbreekt de atmosferische seeing en worden de sterfotonen op een veel kleiner stukje detectoroppervlak geconcentreerd, bepaald door het intrinsieke scheidend vermogen van de telescoop en de pixelgrootte in hoekmaat. Bij ruimtedetectie is de waargenomen intensiteit (energie geregistreerd per eenheid van ruimtehoek = resolutie-element in hoekmaat) daarom groter dan bij aardse waarneming, ook al wordt de ster niet opgelost.

De HST had 70% van het licht van een niet-opgeloste ster moeten concentreren in een schijfje van 0.1" diameter; de rampzalige "matching error" die Perkin Elmer maakte door het verkeerd positioneren van correctie-optiek tijdens het slijpen resulteert in een 70% schijf van 1", slechter dan wat ESO's NTT te Chili en de Brits-Nederlandse WHT op La Palma presteren bij goede seeing.

Voor uitgebreide objecten zoals nevels is de gevoeligheidswinst van een (goede) ruimtetelescoop veel kleiner. De resolutie speelt daarin niet mee. Het verdwijnen van de extinctie van de dampkring maakt niet veel uit; deze is gering voor zichtbare golflengten zodat de irradiantie van een object in het optische deel van het spectrum nagenoeg gelijk is op de grond en in de ruimte. De voornaamste winst komt door het ontbreken van de hemelachtergrond van in de dampkring verstrooid zonlicht (schemering), maanlicht en kunstlicht.

De hemelachtergrond in de ruimte wordt gegeven door het zodiakale licht, *i.e.* aan interplanetair stof verstrooid zonlicht; deze achtergrond is echter niet significant donkerder dan de allerdonkerste nachten op de allerdonkerste plekken op aarde waar het zodiakale licht ook te zien valt.

Een ruimtetelescoop is echter wel een goede keus om nevels en melkwegstelsels af te beelden als men is geïnteresseerd in hun detailstructuur, zoals sterren en sterhopen in een melkwegstelsel of fijnstructuur van interstellaire wolken. Dan gaat het weer om de intensiteit in plaats van de irradiantie.

QSO's zijn óf puntvormig zodat een ruimtetelescoop veel dieper (zwakker) kan komen dan een aardse telescoop, óf ze zijn uitgebreid en dan zal men graag fijnstructuur zoals jets bestuderen.

Voor een onbedorven HST was er dus veel te doen geweest. Over z'n bederf zal nog veel te doen zijn; is er ook wat aan te doen? In tegenstelling tot de versmering over ongeveer 1" door seeing is de versmering van de HST reproduceerbaar en tamelijk nauwkeurig te meten. Dat maakt *beeldrestoratie* mogelijk: door deconvolutie van het waargenomen beeld met de gemeenten overdrachtsfunctie kan het onbedorven "buigingsbegrensde" beeld tot op zekere hoogte benaderd worden.

In het radiogebied zijn zulke technieken reeds lang

ingeburgerd; bij apertuursynthese en VLBI wordt zeer intensief gerestoreerd. Op radiogolflengten kent men echter de overdrachtsfunctie ("point spread function") van de antenne nauwkeurig, ook tot in de verre vleugels die zeer geringe amplitude hebben en daarom moeilijk te meten zijn, maar in oppervlakte een belangrijke bijdrage geven. Zó goed zal de overdrachtsfunctie van de HST vermoedelijk niet te meten zijn; toch moet apprecieabel aanscherpen van de verwazigde beelden goed haalbaar zijn, zeker voor velden met voornamelijk puntbronnen erin.

Het verlies aan intensiteit per pixel van de HST valt echter met zulke beeldrestoratie niet goed te maken. Bij optische en ultraviolette telescopen vindt, anders dan in het radiogebied, de interferentie tussen de verschillende gehelde golffronten die de uiteindelijke resolutie levert plaats vóór de detectie. De HST is in feite een grote "gevulde" interferometer; net als bij een radiointerferometer zoals de WSRT wordt de maximale beeldscherpte geleverd door interferentie van de stralen door de tegenoverliggende randen van de apertuur; bij een optische telescoop verzorgt het licht zelf echter de interferentie, zo een beeld producerend dat daarna in intensiteit (of eigenlijk irradiantie per detectorpixel) wordt geregistreerd. Bij een radiotelescoop worden zowel de amplitude als de fase van de golfbeweging gedetecteerd (althans de fase van lagere harmonischen die de gezochte beeldinformatie bevatten, door superheterodyne omvorming van hoge naar lage frequenties). De interferentie komt daar pas ná de detectie, in correlatoren tussen verschillende interferometerparen.

De grensmagnitude wordt voor optische detectie bepaald door de ruis, vooral fotonruis. Deze beperkt beeldrestoratie omdat ruis in dat procédé aanzienlijk wordt versterkt: daarin worden de bijdragen op hoge ruimtelijke frequenties vergroot ten opzichte van die op lagere frequenties; ruis bezit hoge ruimtelijke frequenties en wordt dus mee opgeblazen. De HST zal daarom in het visuele deel van het spectrum ook bij geslaagde beeldrestoratie niet "dieper" kijken dan een aardse telescoop van dezelfde grootte bij redelijke seeing; hij heeft dezelfde signaal/ruisverhouding.

In het ultraviolet kijkt hij natuurlijk wel verder dan een aardse telescoop, maar lang niet zo ver als de bedoeling was.

De enige werkelijke remedie is de spiegel vervangen of pre-focus golffrontcorrectie toe te passen. De laatste mogelijkheid is het goedkoopst; op langere termijn zullen beeldcorrectoren tussen de telescoop en

post-focus instrumenten de HST hopelijk maken tot wat hij had moeten zijn: een buigingsbegrensde telescoop waarvan de resolutie volledig wordt benut.

Vraag 2.14

Het halfvlak straalt isotroop I_0 uit. (De straling is niet echt isotroop want vanuit de ruimte komt niets terug;

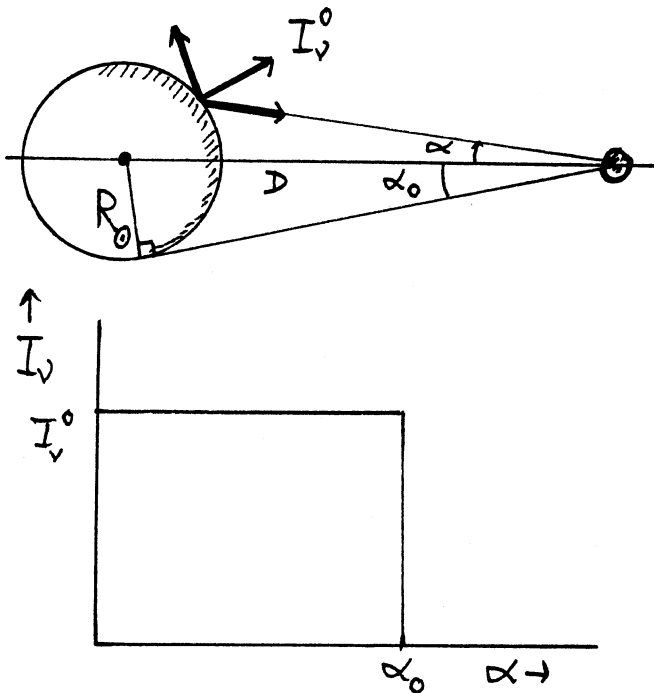
toch wordt voor zo'n Lambertoppervlak vaak de term isotroop gebruikt om aan te geven dat gelijkelijk in alle richtingen van het oppervlak wég wordt gestraald.) In elk punt van het oppervlak geldt:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int I_0 \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_0 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{I_0}{2},$$

en op afstand d van het oppervlak geldt eveneens $J = I_0/2$ want ook van daaruit gezien blijft de halve ruimte met het oppervlak gevuld.

Vraag 2.15

Ook als axiale symmetrie wordt verondersteld kan deze vraag niet precies worden beantwoord: daarvoor moet ook bekend zijn wat de richtingsverdeling van de intensiteit van het zonsoppervlak is of, daarmee equivalent, de intensiteitsverdeling van het centrum van de waargenomen zonnescijf naar de rand.



Figuur C.4: Als het zonsoppervlak isotroop uitstraalt is de intensiteit voor alle stralen uit de zon en alle gezichtsrichtingen naar de zon hetzelfde (boven); de waargenomen zonnescijf toont dan geen randverzwakking of randverheldering (onder).

Neem aan dat het zonsoppervlak als een Lambertoppervlak in alle buitenwaartse richtingen dezelfde intensiteit I_0 uitstraalt, en dat binnenwaartse straling van buiten af verwaarloosd kan worden. De intensiteit verandert niet langs een straal van zonsoppervlak naar aarde; dus wordt de intensiteit nabij de aarde gegeven door $I = I_0$ voor alle gezichtsrichtingen van de aarde naar de zon, met $\alpha \leq \alpha_0$, en door $I = 0$ voor alle gezichtsrichtingen buiten de zon, met $\alpha > \alpha_0$.

Hierin is α de hoek tussen kijkrichting en de richting naar het zonsmidden, en α_0 de grenshoek voor de zonsrand; $\alpha_0 = R_\odot/D = 0.00465$ rad voor $D = 1$ AE (Figuur C.4).

Gevraagd wordt de intensiteit nabij de aarde; de eenheid van ruimtehoek $d\Omega$ waarin deze gemeten wordt is het stukje $d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ van een eenheidsbol rond de aarde. De hoekgemiddelde intensiteit vinden we door integratie over het door de kegel met tophoek $2\alpha_0$ opgespannen deel van de eenheidsbol met de z -as langs de richting aarde-zon:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4\pi} \int I_0 \, d\Omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha_0} I_0 \sin \alpha \, d\alpha \, d\varphi \\ &= \frac{I_0}{2} (1 - \cos \alpha_0) \\ &= \frac{I_0}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{D^2 - R_\odot^2}}{D} \right) \\ &= 1.1 \times 10^{-5} \frac{I_0}{2}. \end{aligned}$$

Voor $D = R_\odot$ volgt weer $J = I_0/2$.

Vraag 2.16

De intensiteit bedraagt $I = I_0$ bij beide planeten voor gezichtsrichtingen van de planeet naar de zon, en $I = 0$ voor gezichtsrichtingen daarbuiten.

Voor kleine α geldt $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, dus: $\alpha \approx \sin \alpha$

$$J(D) \approx \frac{I_0}{2} \alpha_0^2 = \frac{I_0}{4} \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2;$$

bij Saturnus is de gemiddelde intensiteit van de zonstraling honderd maal zo klein als bij de aarde.

Vraag 2.17

De flux op afstand D van de zon is, wederom veronderstellend dat het zonsoppervlak als een Lambertoppervlak de intensiteit $I = I_0$ in alle richtingen uitstraalt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D) &= \int I_0 \cos \theta \, d\Omega \\ &= 2\pi \int_0^{\alpha_0} I_0 \cos \alpha \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \pi I_0 (1 - \cos^2 \alpha_0) \\ &= \pi I_0 \left(\frac{R_\odot}{D} \right)^2. \end{aligned}$$

Op het zonsoppervlak $\mathcal{F}(D = R_\odot) = \pi I_0$; daarbuiten kwadratische afval met de afstand.

De irradiantie van de zonstraling is:

$$\mathcal{R}_\odot \equiv \mathcal{F}(D = 1 \text{ AE})$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi I_0 \left(\frac{R_\odot}{1 \text{ AE}} \right)^2 \\
 &= 6.79 \times 10^{-5} I_0.
 \end{aligned}$$

De gemiddelde intensiteit ($\alpha_0 \ll 1$):

$$\begin{aligned}
 J(D = 1 \text{ AE}) &= \frac{I_0}{4} \left(\frac{R_\odot}{1 \text{ AE}} \right)^2 \\
 &= \frac{\mathcal{R}_\odot}{4\pi}.
 \end{aligned}$$

(NB: de ene R_\odot is de andere \mathcal{R}_\odot niet.)

Vraag 2.18

$$\frac{\mathcal{F}(D = 1 \text{ AE})}{\mathcal{F}(D = 10 \text{ AE})} = 100.$$

Vraag 2.19

Ga uit van

$$dE_\nu = I_\nu (\vec{l} \cdot \vec{n}) dO d\Omega dt d\nu.$$

De foton snelheid is c , dus $dt = ds/c$ met s de afgelegde weg. Derhalve:

$$dE_\nu = (1/c) I_\nu dV d\Omega d\nu$$

per volume-eenheid $dV = (\vec{l} \cdot \vec{n}) dO ds$. Dus geldt:

$$\begin{aligned}
 u_\nu d\nu &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \int_{\Omega} dE_\nu \\
 &= \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega d\nu.
 \end{aligned}$$

Vraag 2.20

Ga weer uit van

$$dE_\nu = I_\nu (\vec{l} \cdot \vec{n}) dO d\Omega dt d\nu.$$

Druk \equiv impulstransport per sec door een cm^2 . Een foton draagt een impuls $h\nu/c$, dus een bundel draagt impuls I_ν/c in de richting van de bundel \vec{l} . In de richting \vec{n} is dat $\cos\theta I_\nu/c$. Het effectieve oppervlak van dO in de bundelrichting is $\cos\theta dO$.

Vraag 2.21

In $1/c$ sec vult isotrope straling een bol van 4π ster.

Vraag 2.22

Voor isotrope straling geldt:

$$\begin{aligned}
 u_\nu &= \frac{I_\nu}{c} \int d\Omega \\
 &= \frac{4\pi}{c} I_\nu \\
 p_\nu &= \frac{I_\nu}{c} \int \cos^2\theta d\Omega \\
 &= \frac{2\pi}{c} I_\nu \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu \\
 &= \frac{4\pi}{3c} I_\nu,
 \end{aligned}$$

dus $p_\nu = u_\nu/3$. Druk geldt voor één van de drie richtingen.

Vraag 2.23

De factor 2 in:

$$p_\nu = \frac{2}{c} \int I_\nu \cos^2\theta d\Omega$$

voor reflectie van fotonen aan een spiegelende wand komt door de dubbele impuls-overdracht der fotonen bij de reflectie.

Er is geen verschil met vergelijking (2.8) omdat de integratie over $d\Omega$ slechts 2π bestrijkt, alleen de richtingen naar achter de wand doen mee.

Binnen de doos geldt isotropie zodat $p_\nu = u_\nu/3$.

C.3 Vragen hoofdstuk 3

Vraag 3.1

De emissiecoëfficiënt beschrijft de lokale toevoeging van stralingsenergie aan de bestaande bundel:

$$I_\nu(s + \Delta s) = I_\nu(s) + j_\nu \Delta s.$$

Dit resultaat geldt ook voor dikke lagen mits aan de condities (homogeen, geen extinctie) blijft voldaan. Realistisch is dat niet: in zeer dikke lagen zal ongetwijfeld wel extinctie optreden.

Vraag 3.2

De intensiteit verandert niet langs een bundel tenzij er fotonen worden toegevoegd of geabsorbeerd; $I_\nu(s + \Delta s)$ verschilt alleen maar van $I_\nu(s)$ door lokale emissie van fotonen de bundel in of extinctie van fotonen de bundel uit. Op deze essentiële eigenschap van de intensiteit

zijn de definities van emissie- en extinctiecoëfficiënt gebaseerd, zie de vergelijking in het antwoord hierboven.

Ook is definitie per intensiteit de meest algemene omdat de intensiteit de meest informatieve stralingsgrootte is, inclusief bundelspecificatie. Als de emissie van nieuwe fotonen isotroop is zou men kunnen volstaan met de emissiviteit $\epsilon_\nu(s) \equiv \int j_\nu(s) d\Omega = 4\pi j_\nu(s)$.

De flux is de netto energiestroom door een gegeven oppervlakje. Ook als $j_\nu(s) = 0$ kan de opvallende flux $\mathcal{F}(s)$ verschillen van de uittrekkende flux $\mathcal{F}(s + \Delta s)$, bijvoorbeeld als de laag met divergente bundels wordt aangestraald. De verandering over de laagdikte wordt dan niet alleen bepaald door de lokale toevoeging van fotonen.

Vraag 3.3

Verstrooiing kan fotonen aan een gegeven bundel onttrekken door ze een andere richting te geven; die gaan uit de bundel verloren en tellen daarom mee in de extinctie ervan. Bij fotonconversie worden ingevangen fotonen niet alleen andere richtingen uitgestuurd, maar ook nog omgezet naar andere golflengten; eveneens extinctie.

Andersom kunnen verstrooiingsprocessen fotonen aan de bundel toevoegen die vanuit een andere richting zijn ingevangen; voor de gegeven bundel zijn dit nieuwe fotonen. Bij fotonconversie kunnen fotonen aan de bundel worden toegevoegd die niet alleen van andere richting stammen, maar ook van andere golflengte.

Fotonverstrooiing en fotonconversie dragen dus zowel bij aan de lokale emissie als aan de lokale extinctie.

Vraag 3.4

De massa-extinctiecoëfficiënt $\kappa_\nu \rho$ wordt het meest gebruikt omdat een gram materie een inhoudelijker maat is dan een cm weglengte: het is de materie die interactie met straling levert. In eerste instantie telt de hoeveelheid en niet de spreiding ervan.

Vraag 3.5

De uittrekkende intensiteit is:

$$I_\nu(s + \Delta s) = I_\nu(s) - I_\nu(s)\alpha_\nu(s)\Delta s.$$

Dit resultaat geldt niet voor dikke lagen ook al zijn ze homogeen; de lineariteit geldt slechts als $|\Delta I_\nu| = I_\nu \alpha_\nu \Delta s$ een fractie van I_ν is — anders zou de intensiteit tot negatieve waarden kunnen afnemen. *Zie ook vraag 3.12.*

Vraag 3.6

Voor voldoende kleine dikte Δs is elke laag homogeen; voor voldoende kleine Δs is de intensiteitsafname door extinctie een fractie van de opvallende intensiteit.

Vraag 3.7

Bij oppervlakken vervalt de weg ds die de bundel door een laag aflegt en treedt spiegeling op van de bundelrichting. Als een wand goed reflecteert komt er veel in de gespiegelde bundel terecht; bij diffuse verstrooiing weinig. Ook kan de wand zelf straling absorberen en emitteren.

Gaan we weer uit van intensiteit (en niet van opvallende en geëmitteerde flux) dan kunnen we oppervlakcoëfficiënten definiëren analoog aan de volumecoëfficiënten van vergelijkingen (3.2) en (3.4) volgens:

$$dI_\nu = j_\nu^{\text{opp}} \quad dI_\nu = -\alpha_\nu^{\text{opp}} I_\nu.$$

De emissiecoëfficiënt j_ν^{opp} heeft de dimensie van intensiteit en bevat de eigen emissie van de wand in de gespiegelde bundelrichting en ook alle daarin verstrooide straling die uit andere richtingen dan de invallende bundel kwam, maar niet de gereflecteerde straling die nog steeds deel van dezelfde (gereflecteerde) bundel is.

De extinctiecoëfficiënt α_ν^{opp} is dimensieloos en specificeert de fractie straling die uit de invallende bundel is geabsorbeerd door de wand of in andere richtingen dan de spiegelrichting is verstrooid.

Vraag 3.8

Bij I_ν en j_ν markeert de index ν dat deze grootheden worden gemeten per eenheid van bandbreedte (per Hz, of cm, of cm^{-1} , etc.). De extinctiecoëfficiënt α_ν heeft dimensie cm^{-1} en is onafhankelijk van de bandbreedte (mits α over de breedte ervan maar constant is); de index dient om aan te geven dat α een frequentieafhankelijke grootheid is. Derhalve geldt $\alpha_\nu = \alpha_\lambda$ en evenzo $\kappa_\nu = \kappa_\lambda$.

Het heeft geen zin om een totale extinctiecoëfficiënt $\alpha \equiv \int \alpha_\nu d\nu$ in te voeren omdat die niets interessants beschrijft. Wel interessant is de afname van de totale intensiteit:

$$dI = - \left[\int_0^\infty I_\nu \alpha_\nu d\nu \right] ds.$$

Vraag 3.9

De extinctiecoëfficiënt α_ν meet de fractie straling die over ds wordt geëxtingeerd, dus $\alpha_\nu ds < 1$. Als er in het geheel geen extinctie is geldt $\alpha_\nu = 0$.

Negatieve extinctie betekent dat de intensiteit toeneemt, maar niet dat $-\alpha_\nu ds = j_\nu ds$; de term $-\alpha_\nu$ is dan een versterkingsfactor per cm, niet een energiestroom per cm^3 .

Vraag 3.10

In ongeordende gassen zal de mate van extinctie niet afhangen van de richting van aanstraling, maar bij ordening kan dat wel het geval zijn.

Bij aanwezigheid van een magnetveld is de extinctie van een Zeemanlijn bijvoorbeeld wel richtingsafhankelijk zodat in plaats van definitie als $\alpha_\nu(\vec{r}, t)$ definitie als $\alpha_\nu(\vec{r}, \vec{l}, t)$ of $\alpha_\nu(x, y, z, \theta, \varphi, t)$ noodzakelijk is, net zoals voor I_ν zelf (vergelijking 2.2).

Nog algemener moet de extinctiecoëfficiënt worden gedefinieerd bij niet-isotrope verstrooiing. Een aardappel verstrooit niet isotroop, en allerlei andere deeltjes in de kosmos evenmin. Voorbeeld: door de zwaartekracht georiënteerde ijsnaaldjes in de aardse dampkring. Volledige beschrijving van de extinctie vereist dan specificatie van invalrichting en uitrederichting, dus een matrix in plaats van een scalar.

Vraag 3.11

De stralingstransportvergelijking berust op de *aanname* van lineariteit in vergelijkingen (3.2) en (3.4); experimenteel bewijs dat deze altijd en overal opgaat valt moeilijk te geven. In een laboratoriumopstelling zou men kunnen meten of de intensiteit wel evenredig toe- of afneemt met de dikte van een extingerende dan wel emitterende laag; voor voldoende lage materieconcentratie moet dat volmaakt lineair gaan. Wederom dient de limiet $d = \Delta \rightarrow 0$ om zeker te zijn dat dit lineariteitsdomein wordt gehaald.

De transportvergelijking is een behoudswet die aangeeft dat fotonen niet vergaan of spontaan ontstaan, alleen maar verdwijnen of vermeerderen door lokale extinctie en emissie. Dat karakter ontleent hij aan het gebruik van intensiteit, de enige stralingsgrootte die onderweg evenmin vervalt als fotonen. Het is dus een wet van fotonbehoud, macroscopisch geformuleerd.

Vraag 3.12

In het geval van pure emissie ($\alpha_\nu(s) = 0$) geldt:

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) + \int_0^D j_\nu(s) ds.$$

Voor pure extinctie ($j_\nu(s) = 0$) geldt onderweg

$$\frac{dI_\nu(s)}{I_\nu(s)} = -\alpha_\nu(s) ds$$

zodat:

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) \exp \left[- \int_0^D \alpha_\nu(s) ds \right].$$

Vraag 3.13

De optische weglengte τ_ν is dimensieloos.

Vraag 3.14

Voor de extinctiecoëfficiënt σ per deeltje

$$dI_\nu = -I_\nu \sigma_\nu n ds$$

wordt de bijbehorende optische weglengte:

$$d\tau_\nu = \sigma_\nu n ds.$$

Voor de extinctiecoëfficiënt κ per gram

$$dI_\nu = -I_\nu \kappa_\nu \rho ds$$

wordt de bijbehorende optische weglengte:

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu \rho ds.$$

Vraag 3.15

De optische weglengte $d\tau_\nu$ en de optische dikte τ_ν zijn dimensieloos; de index ν geeft aan dat het frequentieafhankelijke grootheden betreft.

Feitelijk is de notatie incompleet; volledige specificatie vereist ook de tijdsafhankelijkheid en de afhankelijkheid van de bundel:

$$d\tau_\nu = d\tau(\vec{r}, \vec{l}, t, \nu) = d\tau(x, y, z, \theta, \varphi, t, \nu).$$

Voor de de optische dikte komt daar de doorlopen laag nog bij:

$$\tau = \tau(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{l}_1, \vec{l}_2, t, \nu)$$

en moet in feite de precieze weg die de bundel heeft afgelegd tussen \vec{r}_1 en \vec{r}_2 worden gegeven.

Verder: $\tau_\nu = \tau_\lambda$; integratie volgens $\int \tau_\nu, d\nu$ is zinloos.

Vraag 3.16

De waarschijnlijkheid $p(s)$ dat een foton een geometrische weglengte s haalt, dus tussen s en $s + ds$ uit de bundel verdwijnt, wordt gegeven door:

$$p(s) = e^{-\alpha_\nu s} \alpha_\nu ds,$$

waarin $e^{-\alpha_\nu s}$ de fractie fotonen is die ter plekke s nog voor extinctie beschikbaar is. Daarmee (partieel integreren,

$$l_\nu \equiv \frac{\int_0^\infty s p(s) ds}{\int_0^\infty p(s) ds} = \int_0^\infty \alpha_\nu s e^{-\alpha_\nu s} \frac{d\alpha_\nu s}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_\nu}.$$

Vraag 3.17

Formules 3.9 en 3.10 voor de gemiddelde optische en geometrische weglengten gelden voor de fractionele afname ten gevolge van extinctie van een gegeven opvallende intensiteit. Of er door lokale emissie onderweg nieuwe fotonen aan de bundel worden toegevoegd doet niet ter zake. Ook maakt het niet uit of de betreffende extinctie wordt geleverd door verstrooiingsprocessen dan wel door ("ware") absorptie.

Vraag 3.18

Een volstrekt doorzichtige laag heeft optische dikte $\tau_\nu(D) = 0$. De optische diepte meet de totale extinctie langs de kijkrichting, *i.e.* van de waarnemer tot op de betreffende locatie, en is gelijk aan de optische weglengte langs de bundel van daar tot de waarnemer. Dus is de optische diepte aan de basis van de doorzichtige corona $\tau'_\nu = 0$.

In principe begint de integratie al bij de waarnemer, met inbegrip van de aardatmosfeer en de interplanetaire ruimte. Als die niet volkomen doorzichtig zijn is dat een ongelukkig begin; als men in de optische diepte in en van de zon zelf is geïnteresseerd dient men de integratie dus zo ver buiten de zon te beginnen dat $\tau'_\nu \approx 0$ geldt voor wat daar nog aan zonnematerie buiten ligt.

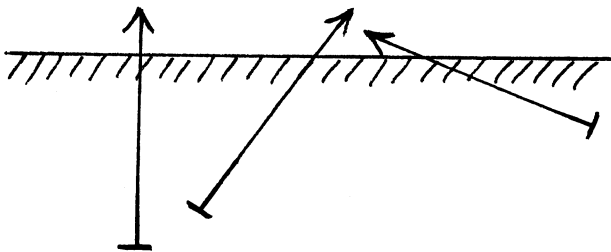
Vraag 3.19

De optische dikte van de laag wordt gegeven door:

$$\tau_\nu(D) = \frac{D}{l_\nu}.$$

Vraag 3.20

De gemiddelde optische vrije weglengte van een foton is $\langle \tau_\nu \rangle = 1$, dus fotonen kunnen ontsnappen uit een deellaag met een optische dikte van ongeveer $\tau_\nu = 1$ vanaf het oppervlak, gemeten langs de bundel. Voor radieel ontsnappende fotonen ($\mu = 1$) ligt de onderkant van die laag op radiële optische diepte $\tau'_\nu = 1$. Voor



Figuur C.5: Ontsnappingsdiepte van fotonen langs radiële en scheve kijkrichtingen.

de scheve gezichtsrichting met $\mu = 0.25$ is de optische weglengte langs de bundel al $\tau_\nu = 1$ voor de deellaag die van het oppervlak reikt tot radiële optische diepte $\tau'_\nu = 0.25$.

Vraag 3.21

Kies de diepte d tegengesteld gericht aan de hoogte z , dan wordt de radiële optische diepte τ'_ν van een laag met geometrische diepte $d = d_0$:

$$\tau'_\nu = \int_0^{d_0} \alpha_\nu dd.$$

Wederom moet de begindiepte $d = 0$ buiten de zon liggen.

De zon is een gasbol en bezit geen fase-overgangen tussen gasvormige, vloeibare en vaste materie zoals die op planeten scherp-bepaalde oppervlakken geven. Het begrip zonsoppervlak dient nader gedefinieerd te worden; in principe is de keus vrij.

Bij een aards wateroppervlak begint de integraal juist waar men het oppervlak ziet, *i.e.* waar het water ophoudt. In navolging daarvan zal men het zonsoppervlak dáár leggen waar $\tau'_\nu = 0$ nog net geldt, dus net buiten de zon. De fotonen die we waarnemen komen echter uit diepere lagen; als we het oppervlak definiëren als de plek waar de zon ophoudt dan zullen we vandaar geen ter plekke aangemaakte of verstrooide fotonen aanschouwen.

Het zonsoppervlak dat we op een foto zien ligt dieper. We ontvangen fotonen uit een laag die tot ongeveer $\tau'_\nu = 1$ steekt (voor het midden van de waargenomen zonschijf); derhalve is de laag met radiële optische diepte $\tau'_\nu = 1$ een geschiktere kandidaat voor de titel "zonsoppervlak" dan een laag buiten de zon.

Naar de rand toe is die laag echter ook niet meer te zien omdat de fotonen van $\tau'_\nu = 1$ in scheve richtingen de zon *niet* kunnen verlaten; degenen die wel ontsnappen komen uit de oppervlaktelaag die steekt tot op $\tau'_\nu \approx \mu$. De zonsrand zelf (de rand van de schijf die we zien) ligt zeker niet op radiële optische diepte $\tau'_\nu = 1$. Het is dus niet *a priori* duidelijk waar we het oppervlak van de zon moeten leggen

Vraag 3.22

Voor de extinctiecoëfficiënt σ per deeltje:

$$dI_\nu = -I_\nu \sigma_\nu n ds$$

wordt de bijbehorende bronfunctie:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\sigma_\nu n}.$$

Voor de extinctiecoëfficiënt κ per gram

$$dI_\nu = -I_\nu \kappa_\nu \rho ds$$

wordt de bijbehorende bronfunctie:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu \rho}.$$

Vraag 3.23

De bronfunctie is niet een dimensieloze grootte dus heeft $S_\nu = 1$ geen speciale betekenis.

Als $S_\nu/I_\nu = 1$ volgt uit de transportvergelijking dat I_ν niet verandert met de optische weglengte. De bronfunctie voegt dan precies toe hetgeen zonder bronterm

door extinctie verloren zou gaan. Een stralingsveld dat onderweg niet van intensiteit verandert heeft óf $S_\nu = I_\nu$ (bron = extinctieverlies: $j_\nu = \alpha_\nu I_\nu$) óf $j_\nu = 0$ en $\alpha_\nu = 0$ (zie vergelijking 3.6).

$S_\nu > I_\nu$ is best mogelijk, dan komt er straling bij.

$S_\nu < 0$ impliceert negatieve extinctie, i.e. versterking van de opvallende straling onderweg. Dan zijn ook de optische weglengte en de optische dikte negatief; dat gebeurt in masers.

Vraag 3.24

Bij gebruik van radiële optische diepte τ'_ν wordt de stralingstransportvergelijking:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau'_\nu} = I_\nu - S_\nu.$$

Hierbij is axiale symmetrie verondersteld.

Vraag 3.25

De stralingswet van Planck (hoofdstuk 4) beschrijft de intensiteit van "zwart-lichaamsstraling" $B_\nu(T)$; deze hangt alleen af van frequentie en temperatuur. De dimensie ervan is die van intensiteit: $[\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ ster}^{-1}]$.

Bij veel fotoncreatie en fotondestructie wordt het lokale stralingsveld gekoppeld aan de plaatselijke bewegingsenergie en middels de Maxwellverdeling aan de temperatuur. Bij voldoende sterke koppeling wordt evenwicht bereikt: $I_\nu \approx B_\nu(T)$. Voor een isotherme laag impliceert dat ook evenwicht tussen emissie en extinctie, met evenveel nieuwe als vernietigde fotonen op elke plek langs elke bundel, dus $j_\nu = \alpha_\nu I_\nu$, dus $S_\nu = I_\nu$.

Dit doet vermoeden dat bij voldoende grote botsingsfrequentie de bronfunctie zich zal gedragen als de Planckfunctie: $S_\nu = B_\nu(T)$. We leiden dit af in hoofdstuk 5 voor thermodynamisch evenwicht; meer realistische situaties waarin deze gelijkheid ongeveer geldt worden besproken in hoofdstuk 7.

De emissiecoëfficiënt en de extinctiecoëfficiënt hebben andere dimensies dan de Planckfunctie en kunnen daar dus niet mee worden vergeleken.

Vraag 3.26

Neem aan dat de verstrooiing isotroop is en elastisch (monochromatisch, "coherent"). Bij pure verstrooiing veranderen de fotonen dan in ieder extinctieproces alleen maar van richting; verder gebeurt er niets mee.

De afname van een bundel $dI_\nu = \alpha_\nu I_\nu ds$ is dan alleen het gevolg van het verlies aan fotonen die de bundel uit verstrooid worden; evenzo bestaat de winst $dI_\nu = j_\nu ds$ alleen maar uit fotonen uit andere richtingen die de bundel in worden verstrooid.

Elk nieuw foton in de bundel is dan een oud foton uit het omringende stralingsveld; tijdsafhankelijkheid veronderstellend moet de totale emissie in alle richtingen dan gelijk zijn aan de totale extinctie uit alle

bundels:

$$\int j_\nu d\Omega = \int \alpha_\nu I_\nu d\Omega.$$

Met de definitie van de gemiddelde intensiteit

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

volgt

$$j_\nu = \alpha_\nu J_\nu,$$

dus geldt:

$$S_\nu = J_\nu.$$

Vraag 3.27

De eigenschappen van het medium zitten in de extinctiecoëfficiënt α_ν die doorwerkt in de optische weglengte (t_ν en τ_ν) en in de bronfunctie S_ν , en in de emissiecoëfficiënt j_ν die alleen doorwerkt in de bronfunctie S_ν .

Vraag 3.28

De intensiteit die uit een homogene halfruimte treedt wordt gegeven door $I_\nu = S_\nu$.

Vraag 3.29

De intensiteit binnen een homogeen, oneindig uitgebreid medium wordt gegeven door $I_\nu = S_\nu$.

Vraag 3.30

De vergelijkingen veranderen niet omdat de optische dikte $\tau_\nu(D)$ langs de bundel wordt gemeten, ook als die scheef door de laag loopt.

Wel zal de optische dikte $\tau_\nu(D)$ van een laag ter dikte D groter zijn voor scheve dan voor loodrechte doorloop; de verhouding bedraagt $1/\mu$.

Vraag 3.31

De laag is homogeen dus aan axiale symmetrie is voldaan. Kies het nulpunt van de τ'_ν schaal bij het rechter oppervlak: $\tau'_\nu(s = D) = 0$.

Voor een loodrecht uittredende bundel geldt dan $\tau'_\nu(s = 0) = \tau_\nu(D)$, dus:

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) e^{-\tau'_\nu(0)} + S_\nu (1 - e^{-\tau'_\nu(0)}).$$

Langs een scheve gezichtslijn is de optische weglengte per radiële eenheid $1/\mu$ groter, dus:

$$I_\nu(D, \mu) = I_\nu(0, \mu) e^{-\tau'_\nu(0)/\mu} + S_\nu (1 - e^{-\tau'_\nu(0)/\mu}).$$

Vraag 3.32

Zij veronderstelt dat:

- haar telescoop de wolk oplost;
- de wolk optisch dun is;
- de wolk homogeen is;
- de wolk net zo dik is als breed;
- de wolk niet van achteren wordt aangestraald.

Vraag 3.33

Als de monochromatische verstrooiing in de laag toeneemt neemt de extinctie α_ν toe omdat er extra processen bij komen die fotonen uit de bundel verwijderen. De optische dikte van de laag τ_ν neemt toe; de opvallende intensiteit wordt meer verzwakt ($I_\nu(0)e^{-\tau_\nu}$).

De emissie j_ν in de laag neemt echter ook toe als fotonen de bundel in worden verstrooid; dat kunnen er veel of weinig zijn afhankelijk van de hoeveelheid invalende straling uit andere richtingen. Hoe de bronfunctie $S_\nu = j_\nu/\alpha_\nu$ verandert valt dus niet te zeggen.

Hoe de uittredende intensiteit

$$I_\nu(D) = I_\nu(0) + [S_\nu - I_\nu(0)]\tau_\nu(D)$$

verandert valt al helemaal niet te zeggen aangezien het teken van $S_\nu - I_\nu(0)$ niet bekend is, nog afgezien van de onbekende verandering in S_ν .

Vraag 3.34

Voor een homogene laag is de loodrecht uittredende intensiteit

$$I_\nu^+ = S_\nu \int_0^\infty e^{-\tau'_\nu} d\tau'_\nu = S_\nu,$$

dus de Eddington-Barbier benadering gaat op.

De integrand $S_\nu e^{-\tau'_\nu/\mu}$ beschrijft de verdeling van de ontsnappende fotonen met τ'_ν/μ , dus ze ontsnappen gemiddeld op:

$$\langle \tau'_\nu/\mu \rangle = \frac{\int (\tau'_\nu/\mu) S_\nu e^{-\tau'_\nu/\mu} d(\tau'_\nu/\mu)}{\int S_\nu e^{-\tau'_\nu/\mu} d(\tau'_\nu/\mu)} = 1.$$

Dit is de gemiddelde optische ontsnappingsdiepte langs de gezichtslijn; de gemiddelde radiële optische diepte van ontsnapping is:

$$\langle \tau'_\nu \rangle = \mu.$$

Vraag 3.35

Van het midden van de zonneschijf naar de rand kijken we steeds schever de zon in. Hoe schever, hoe meer naar buiten ligt de representatieve Eddington-Barbier diepte, zie vergelijking (3.18). Dichter bij de rand zien we derhalve de bronfunctie in meer naar buiten gelegen lagen. De waargenomen randverzwakking impliceert dat de bronfunctie naar buiten afneemt.

Vraag 3.36

Dunne homogene laag: meer extinctie levert *grotere* uittredende intensiteit volgens

$$\frac{I_{\nu_1}}{I_{\nu_2}} = \frac{\alpha_{\nu_1}}{\alpha_{\nu_2}} = 10.$$

Homogene halfruimte:

$$I_{\nu_1} = I_{\nu_2} = S.$$

Dikke laag met $S(\tau_{\nu_1}) = S_0 + \tau'_{\nu_1}$: grotere extinctie levert een geringere Eddington-Barbier vormingsdiepte, en daarmee *kleinere* uittredende intensiteit volgens

$$I_{\nu_1}^+ \approx S(\tau'_{\nu_1} = \mu) = S_0 + \mu$$

en

$$I_{\nu_2}^+ \approx S(\tau'_{\nu_2} = \mu) = S(\tau'_{\nu_1} = 10\mu) = S_0 + 10\mu;$$

dus:

$$\frac{I_{\nu_1}}{I_{\nu_2}} = \frac{S_0 + \mu}{S_0 + 10\mu}.$$

Vraag 3.37

Voor axiale symmetrie geldt (vergelijking 2.6):

$$\mathcal{F}_\nu^+(0) = 2\pi \int_0^1 I_\nu \mu d\mu.$$

Stel

$$S_\nu(\tau'_\nu) = a_0 + a_1 \tau'_\nu$$

dan geldt (vergelijking 3.18)

$$I_\nu(0, \mu) = a_0 + a_1 \mu$$

en dus:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu^+(0) &= 2\pi \left(\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} \right) \\ &= \pi \left(a_0 + \frac{2}{3} a_1 \right) \\ &= \pi S_\nu(\tau'_\nu = 2/3). \end{aligned}$$

Vraag 3.38

Uit de definities van emissiecoëfficiënt (vergelijking 3.2) en extinctiecoëfficiënt (vergelijking 3.4) volgt dat de verandering van de intensiteit lineair is in deze coëfficiënten. Intensiteiten (energiestroom in bepaalde richting *etc.*) mag je optellen dus deze coëfficiënten ook. Als allerlei verschillende soorten processen op frequentie ν extinctie en emissie leveren geldt derhalve:

$$j_\nu^{\text{tot}} = \sum j_\nu \quad \alpha_\nu^{\text{tot}} = \sum \alpha_\nu.$$

Op pag. 3.8 wordt alleen onderscheid gemaakt tussen continuumprocessen en lijnprocessen (j_ν^{cont} en α_ν^{cont} , j_ν^{lijn} en α_ν^{lijn}), maar elk van deze kunnen ook weer een som zijn over verschillende soorten processen: respectievelijk alle continue processen die tot de extinctie en emissie op de betreffende frequentie bijdragen en de bijdragen van alle op de betreffende frequentie overlappende spectraallijnen.

Optische diepten kun je optellen, zowel als het gaat over de bijdrage van verschillende lagen die achtereenvolgens doorlopen worden (vergelijking 3.11) als wanneer het gaat om de bijdragen op één lokatie tengevolge van verschillende processen (vergelijking 3.19).

De bronfunctie voor een specifiek proces is gedefinieerd als

$$S_\nu^{\text{proces}} = \frac{j_\nu^{\text{proces}}}{\alpha_\nu^{\text{proces}}}$$

dus niet lineair in α_ν . Ook deze verhouding kan van proces tot proces verschillen. Deelbronfuncties kun je niet optellen; de samengestelde bronfunctie volgt uit:

$$S_\nu^{\text{tot}} = \frac{\sum j_\nu^{\text{proces}}}{\sum \alpha_\nu^{\text{proces}}}$$

Vraag 3.39

Met $\eta \equiv \alpha_\nu^{\text{lijn}} / \alpha_\nu^{\text{cont}}$ bekomen wij:

$$\begin{aligned} S_\nu^{\text{tot}} &= \frac{\sum j_\nu^{\text{proces}}}{\sum \alpha_\nu^{\text{proces}}} \\ &= \frac{j_\nu^{\text{cont}} + j_\nu^{\text{lijn}}}{\alpha_\nu^{\text{cont}} + \alpha_\nu^{\text{lijn}}} \\ &= \frac{\alpha_\nu^{\text{cont}} S_\nu^c + \alpha_\nu^{\text{lijn}} S_\nu^l}{\alpha_\nu^{\text{cont}} + \alpha_\nu^{\text{lijn}}} \\ &= \frac{S_\nu^c + \eta S_\nu^l}{1 + \eta} \end{aligned}$$

Het is heel goed mogelijk dat S_ν^l verschilt van S_ν^c . In een spectraallijn kan bijvoorbeeld sterke elastische verstrooiing optreden ten gevolge van de bb overgang (stralingsexcitatie gevolgd door spontane of geïnduceerde deëxcitatie) terwijl het continuum op die golflengte vooral door fotoncreatie en fotondestructie wordt geleverd. In dit veel voorkomende geval zal $S_\nu^l \approx J_\nu$ gelden terwijl $S_\nu^c \approx B_\nu$. We komen hier in hoofdstuk 7 uitgebreid op terug, en hoofdstuk 8 bevat diverse voorbeelden uit de praktijk.

Vraag 3.40

Bij verdubbeling van de extinctie verdubbelt de emissie ter plekke alleen als de lokale bronfunctie niet verandert.

Vraag 3.41

De proef van vraag 1.21 betreft het geval van een optisch dunne onverlichte laag, i.e. het tweede geval van Tabel 3.1. De lijnen verschijnen in emissie en nemen in intensiteit toe als er meer zout in de vlam wordt gestrooid.

De proef van vraag 1.22 komt overeen met het vierde geval: een optisch dunne laag met felle achtergrondstraling. De lijnen verschijnen in absorptie op het sterke achtergrondcontinuum en zakken des te dieper naarmate er meer zout in de vlam wordt gestrooid.

Let wel — dit is een formele interpretatie. We weten nog niet door welke processen de bronfunctie S_ν wordt bepaald. Als we die niet kennen kunnen we geen homogeniteit van S_ν aannemen, noch dat $S_\nu^l = S_\nu^c$ zoals in Tabel 3.1.

Vraag 3.42 *en dat $I_\nu(0)$ geen lijnen bevat*

Neem aan dat $\alpha_\nu^{\text{cont}} \ll \alpha_\nu^{\text{lijn}}$. Dan schelen de waargenomen lijnen niets voor het eerste geval in Tabel 3.1 (optisch dik, je krijgt de bronfunctie ongeacht de extinctie, er zijn helemaal geen lijnen).

Voor het tweede geval schelen de emissielijnen een factor twee in intensiteit; in het derde geval schelen de lijnen een factor twee in hun sterkte boven het continuum $I_\nu(0)$, en in het vierde geval schelen ze een factor twee in inzakking.

Als de continue extinctie in de laag wel mee doet worden deze verhoudingen kleiner.

Vraag 3.43

De zon is ontegenzeggelijk optisch dik, dus volgens het schema van Tabel 3.1 vertoont hij helemaal geen spectraallijnen, ook geen Na I D lijnen. *

Vraag 3.44

In een inhomogene laag treden plaatselijke variaties op van α_ν en S_ν . Zolang $S_\nu^l = S_\nu^c$ leidt de aanwezigheid van extra bb extinctie op de lijngolflengte, gesuperponeerd op de continue extinctie, altijd tot extra emissie uit een dunne laag.

Een laag die optisch dik is op de lijngolflengte straalt $I_\nu = S_\nu$ uit op de lijngolflengte en slechts een fractie daarvan in het aangrenzende continuum zolang de laag daarin optisch dun is ($\alpha_\nu^{\text{cont}} D < 1$).

Andersom, optisch dun op de lijngolflengte en optisch dik in het continuum, kan helemaal niet omdat de toevoeging van bb extinctie aan de continue extinctie grotere optische laagdikte impliceert (tenzij we maser-werking veronderstellen, met negatieve lijnextinctie; ook dan krijgen we emissielijnen te zien).

Vraag 3.45

Emissielijnen.

* in werkelijkheid wel omdat hij inhomogeen is. de bronfunctie neemt naar binnen toe.

Vraag 3.46

Blijkbaar neemt de bronfunctie in de zon naar buiten toe af. Dat is nog geen verklaring, maar wel een stap in de goede richting.

Vraag 3.47

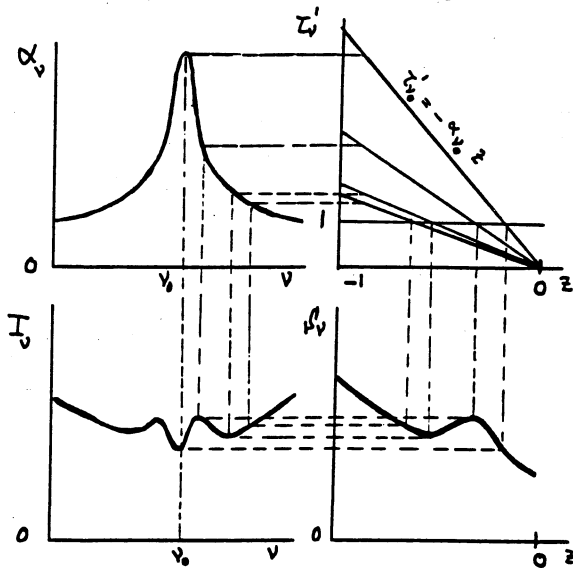
De waargenomen Na I D lijnprofielen weerspiegelen het verloop van de totale bronfunctie (samengestelde continuumbronfunctie en lijnbronfunctie), bemonsterd door de totale extinctiecoëfficiënt. Verschil van een factor twee in de lijnextinctie hoeft helemaal niet weerspiegeld te worden in een factor twee in inzakking.

Vraag 3.48

Als de lijnbronfuncties van de Ca II en de Na I lijnen gelijk zijn moet het verschil in waargenomen lijnsterkte liggen aan verschil in extinctie. Hoe groter de extinctie, hoe hoger in de zonneatmosfeer de ontsappingslokatie van de uitredende fotonen ligt. Het feit dat deze lijnen alle absorptielijnen zijn impliceert dat de gezamenlijke bronfunctie naar buiten afneemt; blijkbaar bemonsteren de diepere en bredere Ca II lijnen die afval tot op grotere hoogte in de atmosfeer dan de Na I D lijnen.

Vraag 3.49

De bobbel van de Ca II K lijn in het zonnenspectrum vereisen een overeenkomstige bobbel in de bronfunctie. De lijnextinctie valt altijd klokvormig af, dus de bronfunctie wordt voor toenemende golflengte-afstand van het lijncentrum steeds dieper in de atmosfeer bemonsterd; een omkering in het verloop van de uitredende intensiteit met toenemende golflengte-afstand resulteert als de bronfunctie op de betreffende dieptes overeenkomstige structuur bezit. Zie Figuur C.6.



Figuur C.6: De bobbel van de Ca II K lijn.

Vraag 3.50

De rechte lijnen in het paneel rechtsboven van het vierluik in Figuur 3.3 tonen dat de extinctiecoëfficiënten invariant zijn verondersteld. Dat is verre van realistisch. De extinctiecoëfficiënt zal ongetwijfeld toenemen als de deeltjesdichtheid toeneemt. In optisch dikke objecten zoals sterren of interstellare wolken mag je steile gradiënten in de deeltjesdichtheid verwachten; de exponentiële drukafval waarmee de aardatmosfeer zichzelf in hydrostatisch evenwicht houdt valt ook te verwachten bij andere atmosferen in het heelal. Dus zal de extinctiecoëfficiënt in optisch dikke objecten in het algemeen sterk met de optische diepte toenemen.

De vorm van de lijnextinctiecoëfficiënt wordt bepaald door de lijnverbredingsprocessen van pagina 5. De botsingsdemping neemt toe met de deeltjesdichtheid; de Dopplerverbreiding met de temperatuur (thermische deeltjesnelheden) en met eventuele grote-schaal bewegingen. Ook de aard en mate van de lijnverbreding, en daarmee de profielvorm van de lijnextinctiecoëfficiënt, zullen in het algemeen met de diepte variëren.

4.4 Antwoorden Hoofdstuk 4

Vraag 4.1

De straling uit twee TE-doozjes van dezelfde temperatuur T wordt gegeven door $I_\nu = B_\nu(T)$, ongeacht de aard van het materiaal waarvan de wanden van het doosje zijn gemaakt. De absorptiecoëfficiënt van het gaatje wordt gegeven door $\kappa_\nu^{\text{opp}} = 1$ als het maar klein genoeg is; daar zit de materiaalkeuze niet in (letterlijk).

Vraag 4.2

Je kunt niet via het gaatje van een TE-doozje door het doosje heen kijken, dus is het een optisch dikke bron. De Eddington-Barbier relatie geldt voor het gaatje want de er doorheen ontsnappende fotonen komen uit een isotherme optisch dikke laag met bronfunctie $S_\nu = B_\nu(T)$. Die is konstant met de optische diepte.

Vraag 4.3

In vraag 3.7 werden al extinctie- en emissiecoëfficiënten voor oppervlakken ingevoerd met:

$$dI_\nu = j_\nu^{\text{opp}} - \alpha_\nu^{\text{opp}} I_\nu.$$

De emissiecoëfficiënt j_ν^{opp} heeft de dimensie van intensiteit en bevat de eigen emissie van de wand in de gespiegelde bundelrichting ($\epsilon_\nu^{\text{opp}} = \kappa_\nu^{\text{opp}} B_\nu$) en daarnaast alle in de gespiegelde bundelrichting verstrooide straling die afkomstig is uit andere richtingen dan de invallende bundel.

De extinctiecoëfficiënt α_ν^{opp} is dimensieloos en specificceert de fractie straling die uit de invallende bundel wordt geabsorbeerd door de wand ($\kappa_\nu^{\text{opp}} B_\nu$) of in andere richtingen dan de spiegelrichting wordt verstrooid.

Voer voor de fractie extinctie ten gevolge van verstrooiing de verstrooiingsextingtiecoëfficiënt s_ν^{opp} in:

$$dI_\nu^{\text{verstr}} \equiv -s_\nu^{\text{opp}} I_\nu$$

dan geldt dat de wand in de gespiegelde bundelrichting straalt:

$$I_\nu = B_\nu(1 - \kappa_\nu^{\text{opp}} - s_\nu^{\text{opp}}) + \kappa_\nu^{\text{opp}} B_\nu + s_\nu^{\text{opp}} B_\nu = B_\nu.$$

De eerste term in het middendeel is het gereflecteerde deel dat de bundel niet heeft verlaten: de opvallende intensiteit min het geabsorbeerde en wegverstrooide deel daarvan. De tweede term is de eigen emissie van de wand. De derde term is de bijdrage door verstrooiing.

Die is gelijk aan het uit de bundel verstrooide deel omdat gedetailleerd evenwicht vereist dat evenveel fotonen de bundel in als uit worden verstrooid. De bronfunctie van het verstrooiingsproces is daarom ook B_ν .

Vraag 4.4

De bronfunctie kan per proces worden gedefinieerd, apart voor de ware absorptie en eigen emissie ($S_\nu^{\text{abs}} \equiv \epsilon_\nu^{\text{opp}}/\kappa_\nu^{\text{opp}}$), de verstrooiing en de reflectie. De totale bronfunctie is:

$$S_\nu^{\text{opp}} = \frac{j_\nu^{\text{opp}}}{\alpha_\nu^{\text{opp}}} = \frac{\sum j_\nu^{\text{proces}}}{\sum \alpha_\nu^{\text{proces}}} = \frac{\sum \alpha_\nu^{\text{proces}} S_\nu^{\text{proces}}}{\sum \alpha_\nu^{\text{proces}}}.$$

Alle deelbronfuncties S_ν^{proces} zijn in TE gelijk aan B_ν , dus ook $S_\nu^{\text{opp}} = B_\nu$. De aard van de wand doet er niet toe.

Vraag 4.5

B_ν is een grootte per eenheid van bandbreedte; de omrekeningsfactor is $d\nu = (c/\lambda^2) d\lambda$ (zie vraag 2.2).

Vraag 4.6

Hetere voorwerpen stralen sterker dan koudere. (Zirin, professor te Caltech, is het daar niet mee eens; hij laat $B_\nu \downarrow 0$ voor $T \uparrow \infty$; zie vraag 4.8).

Vraag 4.7. Vergeten. Zie voetnoot

Vraag 4.8

Dit is een sterk staaltje Zirin! In de formule voor B_ν $d\nu$ staat ν^2 in plaats van ν^3 ; in $B_\lambda d\lambda$ staat een π teveel; de noemer van deze vergelijking wordt niet $h\nu$ maar $h\nu/kT$ voor $h\nu \ll kT$; de Wien benadering heeft c^2 in plaats van kT in de noemer van de voorfactor en gaat niet naar nul voor grote T .

Zijn Rayleigh-Jeans benadering voor B_ν drukt hij uit in golflengte; dat mag, maar het verduidelijkt de zin eronder ("when energy is not a factor, the radiation is proportional to the possible density of photons") niet bijster. De laatste zin van het citaat is even onbegrijpelijk.

Helaas is dit staaltje tekenend voor Zirin's hele boek¹. Veel van wat er in staat dient gewantrouwd te worden, of tenminste met grote korrels zout genuttigd.

¹ het moge echter inspireren tot waardering voor de immense zorg die aan dit dictaat is besteed.

Dat is jammer; het boek verschaft meer waarnemingsgegevens dan enig ander boek over zonnefysica en zou zonder Zirin's slordigheden, aanmatigheden en aperte nonsens een waardevolle introductie in de observationele zonnefysica zijn. Lees het niet dan met argwaan; een degelijker introductie in de zonnefysica is het boek van Stix (1989).

en het boek van Forkal (1990)

Vraag 4.9

Voor de golflengte waarop B_ν piekt geldt:

$$\lambda(B_\nu^{\max}) = c/\nu_{\max} = \frac{3 \times 10^{10}}{5.88 \times 10^{10} T} \text{ cm}$$

dus

$$\lambda(B_\nu^{\max}) T = 0.51 \text{ cm K,}$$

terwijl

$$\lambda(B_\lambda^{\max}) T = 0.29 \text{ cm K.}$$

Het verschil komt wederom door de $d\nu = (c/\lambda^2) d\lambda$ conversiefactor tussen B_ν en B_λ .

Vraag 4.10

Helderheidstemperatuur per eenheid van golflengte:
 $B_\lambda(T_b) = I_\lambda^{\text{obs}} = (\lambda^2/c) I_\nu^{\text{obs}}$.

Vraag 4.11

De intensiteit verandert niet met de afgelegde weg (mits er onderweg geen extinctie of emissie optreedt), dus is ook de helderheidstemperatuur onafhankelijk van de afstand van de bron.

Vraag 4.12

De helderheidstemperatuur is een maat voor de intensiteit, *i.e.* energie per eenheid van ruimtehoek. Van een niet-opgelost object met $d\Omega = 0$ kan geen intensiteit gemeten worden. Van een uitgebreid object kan de intensiteit wel worden gemeten, per resolutie-element; die gemeten intensiteit definieert de bijbehorende helderheidstemperatuur ongeacht het stralingsmechanisme of de omstandigheden in de bron.

Vraag 4.13

Voor een optisch dikke bron geldt $I_\nu \approx S_\nu(\tau'_\nu = \mu)$ en is de helderheidstemperatuur T_b in Eddington-Barbier benadering gelijk aan de brontemperatuur $T_{\text{bron}}(\tau'_\nu = \mu)$, mits:

- de Rayleigh-Jeans limiet geldt ($h\nu \ll kT$; dat is in het radiogebied doorgaans het geval);
- de bronfunctie in de bron wordt gegeven door de Planckfunctie;
- ~~- de kijkrichting loodrecht op het oppervlak is;~~
- de bron binnen het resolutie-element als axiaal-symmetrisch kan worden beschouwd.

Als de temperatuur lineair met de optische diepte τ'_ν varieert is de helderheidstemperatuur dan exact gelijk aan de temperatuur op diepte $\tau'_\nu = \mu$.

Voor een optisch dunne bron met geometrische dikte D_{bron} is T_b een lineaire maat voor de brontemperatuur T_{bron} als de Rayleigh-Jeans limiet geldt, de bronfunctie gegeven wordt door de Planckfunctie en de temperatuur niet door de bron varieert:

$$T_b = T_{\text{bron}} \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - t_\nu)} dt_\nu \approx T_{\text{bron}} \tau_\nu.$$

Voor evaluatie van de brontemperatuur moet dan de optische dikte van de bron $\tau_\nu = \int_0^{D_{\text{bron}}} \alpha_\nu ds$ bekend zijn.

Vraag 4.14

Op radiogolflengten geldt de Rayleigh-Jeans limiet en dus $I_\nu \sim \nu^2$. Voor de helderheidstemperatuur geldt $T_b \sim \nu^0$, ook als de Rayleigh-Jeans limiet niet zou gelden. De bron is optisch dik want anders zal niet gelden dat $I_\nu = B_\nu$. (Een optisch dunne bron met $I_\nu = B_\nu$ is in principe mogelijk middels $S_\nu = B_\nu/\tau_\nu$ maar dat is niet erg waarschijnlijk).

Vraag 4.15

Van een onopgeloste bron wordt niet de intensiteit gemeten maar de irradiantie

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\nu &= \mathcal{F}_\nu^+(\text{aarde}) \\ &= \int I_\nu \cos \theta d\Omega \\ &\approx I_\nu \Omega_{\text{bron}} \end{aligned}$$

met de aannames dat de bron homogeen is en klein in hoekmaat. De definitie van antenntemperatuur veronderstelt dat Ω_{antenne} homogeen met intensiteit is ge-

vuld. Dus (in de Rayleigh-Jeans limiet):

$$T_A = \eta_A T_b \frac{\Omega_{\text{bron}}}{\Omega_{\text{antenne}}}.$$

Vraag 4.16

Bij een onopgeloste bron wordt geen intensiteit maar irradiantie gemeten. Omwerkend naar de aan het oppervlak van een ster met straal R op afstand D uittrekkende flux \mathcal{F}^+ geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2} &= \frac{\mathcal{F}_1^+ R_1^2 / D^2}{\mathcal{F}_2^+ R_2^2 / D^2} \\ &= \frac{\pi S_1(\tau'_1 = 2/3)}{\pi S_2(\tau'_2 = 2/3)} \\ &= \frac{I_1^+(\tau'_1 = 0, \mu = 2/3)}{I_2^+(\tau'_2 = 0, \mu = 2/3)}, \end{aligned}$$

mits $R_1 = R_2$ en de Eddington-Barbier benadering op beide frequenties geldt. De waargenomen irradiantie-verhouding geeft dan de intensiteitsverhouding van de ster op de twee frequenties.

De uit de irradiantie-verhouding volgende kleurtemperatuur

$$\frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2} = \frac{B_{\nu_1}(T_c)}{B_{\nu_2}(T_c)}$$

biedt het voordeel dat de afstand en de grootte van de bron niet bekend hoeven te zijn, en is daarmee een goede vervanger van helderheidstemperatuur voor onopgeloste objecten.

Vraag 4.17

Twee-kleuren fotometrie levert de temperatuur van een ster als de bronfunctie gegeven wordt door de Planckfunctie en de straling op de twee meetfrequenties uit dezelfde laag afkomstig is. In Eddington-Barbier benadering is dat dan de temperatuur op radiële optische diepte $\tau'_1 = \tau'_2 = 2/3$.

Vraag 4.18

De helling van I_ν kan op verschillende frequenties corresponderen met verschillende Planckfunctiehellingen, dus $T_c = T_c(\nu)$. Sterk voorbeeld: meet de kleurtemperatuur van de fotosfeer van een hete ster in het ultraviolet en van de koele omringende stofschild in het infrarood. Zulke verschillen kunnen ontstaan door:

– verschil in vormingsdiepte: $\tau'_1 \neq \tau'_2$.

Dat is in het voorbeeld hierboven het geval: de fotosfeer is veel heter dan de schil; als op beide frequenties geldt dat $S_\nu = B_\nu$ zijn de bijbehorende kleurtemperaturen ongelijk;

– verschil in bronfunctie:

$$\frac{S_1(\tau'_1 = 2/3)}{B_1(\tau'_1 = 2/3)} \neq \frac{S_2(\tau'_2 = 2/3)}{B_1(\tau'_2 = 2/3)}$$

voor meting van irradiantie, en idem met $\tau_\nu = 1$ voor meting van intensiteit. Precieser: de helling van de bronfunctie $dS/d\nu$ kan op de twee frequenties verschillend afwijken van wat de Planckfunctie voor één temperatuur zou geven, ook als de straling uit dezelfde laag afkomstig is. In het voorbeeld is het laatste niet het geval, maar je kunt je ook een schil voorstellen waarin de infrarode straling thermisch is, met $I_\nu = B_\nu$, en de ultraviolette straling ook uit de schil komt maar bestaat uit verstrooide straling die oorspronkelijk uit de ster afkomstig is. Zie planetaire nevels, hoofdstuk 8.

– verschil in extinctie tussen de bron en de aarde. Ook dit is het geval in het voorbeeld: hete sterren staan ver weg en lijden aan interstellair roodverkleuring.

Vraag 4.19

$$\begin{aligned} T_{\text{eff}} &= \left[\frac{1}{\sigma} \mathcal{F}_{\text{bron}}^+ \right]^{1/4} \\ &= \left[\frac{2\pi}{\sigma} \int_0^\infty \int_0^1 \mu I_\lambda d\mu d\lambda \right]^{1/4}. \end{aligned}$$

Vraag 4.20

De fractie deeltjes met snelheidscomponenten tussen v_x en $v_x + dv_x$, v_y en $v_y + dv_y$ en v_z en $v_z + dv_z$ wordt gegeven door het product van de drie onafhankelijke verdelingen per snelheidscomponent (het is de fractie met v_x van de fractie met v_y van de fractie met v_z):

$$\frac{n(v)}{N} dv = \frac{1}{a^3 \pi^{3/2}} e^{-(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/a^2} dv_x dv_y dv_z$$

met $a^2 = 2kT/m$. De snelheids grootte v is $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$; met de aanname van isotropie geldt $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$ (zie vraag 2.5). Derhalve:

$$\frac{n(v)}{N} dv = \frac{1}{a^3 \pi^{3/2}} e^{-v^2/a^2} 4\pi v^2 dv.$$

Vraag 4.21

De oppervlakte van de Gaussverdeling $\exp(-x^2/a^2)$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} dx = a\sqrt{\pi},$$

dus met $a^2 = 2kT/m$ volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n(v_x)}{N} dv_x = 1.$$

De snelheidsgruotteverdeling is het product van de drie Gaussverdelingen voor v_x , v_y en v_z , en is dus ook genormeerd. Direct volgt dat uit $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-x^2/a^2) dx = a^3\sqrt{\pi}/4$.

Vraag 4.22

Schrijf de Maxwellverdeling weer als

$$\frac{n(v)}{N} = \frac{1}{a^3\pi^{3/2}} e^{-v^2/a^2} 4\pi v^2$$

met $a^2 = 2kT/m$, dan is de afgeleide ervan:

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{n(v)}{N} \right) = \frac{4\pi}{a^3\pi^{3/2}} e^{-v^2/a^2} \left[2v - 2\frac{v^3}{a^2} \right].$$

Deze is nul voor $1 - v^2/a^2 = 0$, dus als $v = a$. De piek van de Maxwellverdeling ligt derhalve bij $v = \sqrt{2kT/m}$; dat is de meest waarschijnlijke snelheidsgruotte.

De meest waarschijnlijke snelheidscomponent is $v_x = 0$, $v_y = 0$, $v_z = 0$, respectievelijk.

De gemiddelde deeltjesenergie wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle &= \frac{1}{2}m \frac{\int_0^{\infty} v^2 N(v) dv}{\int_0^{\infty} N(v) dv} \\ &= \frac{2\pi m}{a^3\pi^{3/2}} \frac{N \int_0^{\infty} v^4 e^{-v^2/a^2} dv}{N} \\ &= \frac{3}{2}kT, \end{aligned}$$

met gebruik van

$$\int_0^{\infty} v^4 e^{-v^2/a^2} dv = \frac{3}{8}a^5\sqrt{\pi}.$$

De middelbare snelheid in een bepaalde richting zoals de gezichtsrichting wordt gegeven door:

$$\left\langle v_x^2 \right\rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Vraag 4.23

De omrekeningsfactor van verschil in excitatie-energie in eV naar golflengte in nm is:

$$\Delta\chi \text{ (eV)} = \frac{1.24 \times 10^3}{\lambda \text{ (nm)}}.$$

Een spectraallijn bij 500 nm is het gevolg van een bb overgang van ongeveer 2.5 eV. Zie ook Figuur 1.1.

NB: deze omrekeningsfactor is niet exact omdat voor golflengtes de waarde in lucht wordt gebruikt, niet in vacuum.

Vraag 4.24

In de Boltzmannverhouding

$$\log(n_2/n_1) = \log(g_2/g_1) - \chi_{12}\theta$$

met χ_{12} in eV is gebruik gemaakt van de populaire notatie $\theta \equiv 5040/T$ met T in K.

Vraag 4.25

Ook de ionisatietrap E IV is al wat bevolkt, $\sum_s n_{3,s} \approx 0.38$.

Vraag 4.26

De Ca II K lijn is de overgang tussen het grondniveau en het eerste aangeslagen niveau van éénmaal geïoniseerd calcium (Appendix A). $H\alpha$ is de overgang tussen de niveaus $n = 2$ en $n = 3$ van waterstof (Figuur 1.4). De ionisatie-energie van Ca I bedraagt 6.1 eV (Appendix A) en de excitatie-energie van H I $n = 2$ is 10.2 eV (Figuur 1.4). Blijkbaar zijn de temperatuur en druk in de zonnefotosfeer zodanig dat Ca I grotendeels is geïoniseerd (Saha) en de meeste calciumdeeltjes zich in de grondtoestand van Ca^+ bevinden (Boltzmann). Waterstof is dan met z'n 13.6 eV ionisatie-energie nog grotendeels neutraal; niettemin is de Boltzmannbezetting van H I $n = 2$ gering omdat de excitatie-energie van dit niveau zo groot is. De grotere abundantie van waterstof wordt dus teniet gedaan door de geringe excitatie van het onderniveau van $H\alpha$.

Vraag 4.27

Appendix A levert de ionisatie-energieën van Ti I (6.8 eV), Ti II (13.6 eV) en Ti III (27.5 eV). Omdat H I en Ti II dezelfde ionisatie-energie van 13.6 eV hebben en waterstof voor de helft is geïoniseerd is ook Ti II voor de helft geïoniseerd. Omdat er maar twee ionisatietrappen tegelijk goed bevolkt kunnen zijn volgt hieruit als ruwe schatting:

$$\frac{N_{\text{TiII}}}{N_{\text{Ti}}} = \frac{N_{\text{TiIII}}}{N_{\text{Ti}}} \approx 0.5 \quad N_{\text{TiI}} = N_{\text{TiIV}} \approx 0.$$

Daarmee wordt de electronendichtheid N_e :

$$\begin{aligned} N_e &= N_{\text{HII}} + N_{\text{TiII}} + 2N_{\text{TiIII}} + 3N_{\text{TiIV}} \\ &\approx 0.9 \times 0.5 N_{\text{atk}} + 0.1 \times (0.5 + 2 \cdot 0.5) N_{\text{atk}} \\ &\approx 0.6 N_{\text{atk}} \end{aligned}$$

waarin N_{atk} staat voor de atoomkerndichtheid, *i.e.* alle vrije deeltjes per cm^3 met tenminste 1 proton erin. De totale deeltjesdichtheid N wordt gegeven door $N = N_e + N_{\text{atk}} \approx 1.6 N_{\text{atk}}$, dus $N_e/N \approx 0.4$. (Neutrino's worden bij dit soort vragen immer verwaarloosd; sterren bestaan hier slechts uit neutrale atomen, ionen en de daaruit vrijgekomen electronen, eventueel moleculen. In deze steratmosfeer, met waterstof al half geïoniseerd, komen geen moleculen voor. Het molecuul met de hoogste dissociatie-energie is CO, met $\chi_{\text{diss}} = 11.1 \text{ eV}$.)

C.5 Antwoorden Hoofdstuk 5

Vraag 5.1

De fractie overblijvende deeltjes in toestand u is:

$$\frac{n_u(t)}{n_u(0)} = e^{-\Gamma_u t}$$

dus de kans dat een gegeven deeltje t seconden in toestand u verblijft bedraagt $e^{-\Gamma_u t}$. Daarmee is de gemiddelde verblijfsduur (met gebruik van partiële integratie, zie ook vergelijking 3.9):

$$\begin{aligned} \langle t \rangle &= \frac{\int_0^\infty t e^{-\Gamma_u t} dt}{\int_0^\infty e^{-\Gamma_u t} dt} \\ &= \frac{-(t/\Gamma_u)e^{-\Gamma_u t} / \infty + (1/\Gamma_u) \int_0^\infty e^{-\Gamma_u t} dt}{\int_0^\infty e^{-\Gamma_u t} dt} \\ &= \frac{(1/\Gamma_u) \int_0^\infty e^{-\Gamma_u t} dt}{\int_0^\infty e^{-\Gamma_u t} dt} \\ &= \frac{1}{\Gamma_u}. \end{aligned}$$

Vraag 5.2

De integrand in $\int 1/(ax^2 + bx + c) dx$ heeft als primitieve $(2/\sqrt{-D}) \arctan[(2ax + b)/\sqrt{-D}]$ voor negatieve determinant ($D = b^2 - 4ac < 0$). Daarmee:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \psi(\nu - \nu_0) d\nu &= \int_0^\infty \frac{\Gamma_u/(4\pi^2)}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_u/4\pi)^2} d\nu \\ &= \frac{\Gamma_u}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{d(\nu - \nu_0)}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma_u/4\pi)^2} \\ &= \frac{\Gamma_u}{4\pi^2} \left(\frac{4\pi}{\Gamma_u} \arctan \frac{4\pi}{\Gamma_u} x \right)_{x=-\infty}^{x=\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De profiel functies gelden per eenheid van bandbreedte, dus de dimensie van $\psi(\nu - \nu_0)$ is $[\text{Hz}^{-1}]$ (ν en Γ_u zijn beide in $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$).

Vraag 5.3

Vergelijking (5.2) levert dat $\psi(\nu_{0.5} - \nu_0) = \psi(0)/2 = 2\pi/\Gamma_u$ voor $|\nu - \nu_0| = \Gamma_u/(4\pi)$, dus de hele halfwaardebreedte (FWHM = Full Width at Half Maximum) bedraagt:

$$\text{FWHM}_\nu = \frac{\Gamma_u}{2\pi}.$$

De omrekeningsfactor van bandbreedte in frequentie naar golflengte bedraagt $d\lambda = (\lambda^2/c) d\nu$, dus de hele

halfwaardebreedte in λ is:

$$\text{FWHM}_\lambda = \frac{\lambda^2 \Gamma_u}{2\pi c}.$$

NB: vaak wordt het Lorentzprofiel in cirkelfrequentie $\omega = 2\pi\nu$ gegeven; daarvoor geldt $\text{FWHM}_\omega = \Gamma_u$. Soms wordt Γ gedefinieerd als halve halfwaardebreedte. Derhalve oppassen voor discrepanties met factoren 2 en 2π .

Vraag 5.4

Bij middeling van een grootheid $g(x)$ over een kansverdeling $f(x)$ volgens

$$\langle g \rangle = \frac{\int_0^\infty g(x) f(x) dx}{\int_0^\infty f(x) dx}$$

verandert de dimensie van die grootheid niet. De kansverdeling wordt zelf al per interval gemeten; in het geval van vergelijking (5.3) heeft ook de extinctieprofielfunctie $\varphi(\nu - \nu_0)$ de dimensie Hz^{-1} zodat bij de integratie over ν één Hz^{-1} overblijft.

Vraag 5.5

Dimensie B_{lu} : $[\text{erg}^{-1} \text{cm}^2 \text{Hz ster}]$.

Vraag 5.6

De beide breuken in $B_{lu}/B_{ul} = g_u/g_l$ zijn dimensieloos. Voor $A_{ul}/B_{ul} = 2h\nu^3/c^2$ geldt:

$$\begin{aligned} [A_{ul}/B_{ul}] &= \frac{[\text{s}^{-1}]}{[\text{erg}^{-1} \text{cm}^2 \text{Hz ster}]} \\ &= [\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{ster}^{-1}], \end{aligned}$$

net als voor I_ν en B_ν en voor de dimensie-bepalende voorfactor $2h\nu^3/c^2$ in de formule van Planck.

Vraag 5.7

In de lijnextinctiecoëfficiënt

$$\alpha_\nu^l = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0) \left[1 - \frac{n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)}{n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0)} \right]$$

is de correctiefactor voor geïnduceerde emissie

$$1 - \frac{n_u B_{ul} \chi(\nu - \nu_0)}{n_l B_{lu} \varphi(\nu - \nu_0)} = 1 - \frac{n_u g_l \chi(\nu - \nu_0)}{n_l g_u \varphi(\nu - \nu_0)}$$

dimensieloos. De voorfactor bevat $h\nu_0$ in [erg], $1/4\pi$ in [ster⁻¹], n_l in [cm⁻³], B_{lu} in [erg⁻¹ cm² Hz ster], $\varphi(\nu-\nu_0)$ in Hz⁻¹. Tezamen levert dat [cm⁻¹], overeenkomstig de definitie van extinctiecoëfficiënt.

De lijnmissiecoëfficiënt

$$j_\nu^l = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_u A_{ul} \psi(\nu-\nu_0)$$

bevat $h\nu_0$ in [erg], $1/4\pi$ in [ster⁻¹], n_u in [cm⁻³], A_{ul} in [s⁻¹], $\psi(\nu-\nu_0)$ in Hz⁻¹. Tezamen levert dat [erg s⁻¹ cm⁻³ Hz⁻¹ ster⁻¹], overeenkomstig de definitie van emissiecoëfficiënt.

De oscillatorsterkte f_{lu} is dimensieloos, evenals het product $g_l f_{lu}$.

Vraag 5.8

De foto-excitatie rate R_{lu} is bij axiale symmetrie:

$$\begin{aligned} R_{lu} &= n_l B_{lu} \bar{J}_{\nu_0} \\ &= \frac{4\pi \alpha_\nu^{\text{excitatie}}}{h\nu_0 \varphi(\nu-\nu_0)} \bar{J}_{\nu_0} \\ &= \int_0^\infty \frac{4\pi}{h\nu_0} \alpha_\nu^{\text{excitatie}} J_\nu d\nu \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \frac{4\pi}{h\nu_0} \alpha_\nu^{\text{excitatie}} I_\nu d\nu d\mu \end{aligned}$$

excitatie per seconde per cm³.

C.6 Hoofdstuk 6

Vraag 6.1

De bf extinctiecoëfficiënt is $\alpha_{\nu}^{\text{bf}} = n_i \sigma_{ik}(\nu)$, met σ_{ik} de extinctiecoëfficiënt per deeltje in toestand i voor ionisatie uit niveau i naar grenscontinuum k en met n_i de populatie van niveau i (aantal deeltjes per cm^3 in toestand i). Voor waterstofachtige spectra hangt σ_{ik} niet af van de temperatuur of de dichtheid:

$$\sigma_{ik}^{\text{H}} \sim g_{ik} Z^4 n^{-5} \nu^{-3}$$

met Z het ionladingsgetal en n het hoofdquantumgetal van niveau i . De TE bezetting n_i^{TE} van dat niveau volgt uit de wetten van Saha en Boltzmann; deze is wel afhankelijk van de temperatuur (beide wetten) en de dichtheid (Saha).

De verhoudingen van de verschillende bf extinctiekanten schalen met de bezetting van de respectievelijke onderniveau's, dus met Boltzmann, en variëren met de temperatuur maar niet met de dichtheid, althans in TE.

Vraag 6.2

De algemene uitdrukking voor de bronfunctie (vergelijking 5.12) is:

$$S_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\psi/\varphi}{\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - \frac{\chi}{\varphi}}$$

Deze geldt ook voor bf overgangen mits toepasselijke statistische gewichten g_i en $g_k g_e$ worden gebruikt in plaats van g_l en g_u . Bij bf overgangen komt de afval van het seriegrenscontinuum met ν in de plaats van het bb lijnprofiel; voor waterstofachtige spectra is dat $\sigma(\nu - \nu_0)^{\text{H}} \sim (\nu - \nu_0)^{-3}$ met ν_0 de ionisatiegrens. Over de ionisatiekant treedt volledige redistributie op omdat in elke bf overgang het vrijkomen of invangen van een electron uitwisseling met de kinetische energieverdeling impliceert; de drie vormfuncties voor extinctie en spontane en geïnduceerde emissie $\varphi(\nu - \nu_0)$, $\psi(\nu - \nu_0)$ en $\chi(\nu - \nu_0)$ zijn daarom aan elkaar gelijk. Daarmee:

$$S_{\nu}^{\text{ik}} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{g_k g_e n_i}{g_i n_k} - 1}$$

Deze bronfunctie kan heel wel afhangen van het plaatselijk stralingsveld J_{ν} , via de invloed daarvan op de populaties n_i en n_k . Als er bijvoorbeeld sterke straling is over de ionisatiekant, *i.e.* straling met $J_{\nu} \gg B_{\nu}$ voor $\nu \geq \nu_0$, valt *overionisatie* te verwachten: meer ionisatie

vanuit niveau i dan in TE het geval zou zijn, met als resultaat $n_i/n_k < (n_i/n_k)^{\text{TE}}$. Als $n_i/n_k = (n_i/n_k)^{\text{TE}}$ geldt $S_{\nu}^{\text{ik}} = B_{\nu}$; dit houdt in, middels de wet van Saha, dat moet gelden (*Milne-relaties*):

$$\frac{g_i}{g_k g_e} = \frac{1}{N_e} \left[\frac{n_i}{n_k} \right]^{\text{TE}} \left(\frac{2\pi m_e k T}{h^2} \right)^{-3/2} e^{(E_{\infty} - E_i)/kT}$$

Vraag 6.3

De ff extinctiecoëfficiënt in Figuur 6.3 loopt naar rechts op $\sim \lambda^2$ dus daarin is blijkbaar de geïnduceerde emissie meegenomen als negatieve correctie op de extinctie, zodat de λ^3 toename van $\sigma_{\lambda}^{\text{ff}}$ één λ heeft verloren aan de correctiefactor $[1 - \exp(-hc/\lambda kT)]$, in Rayleigh-Jeans benadering. Blijkbaar is deze figuur voor α_{λ} , niet voor σ_{λ} , en voor een temperatuur waarvoor $hc/\lambda \ll kT$ geldt.

Figuur 6.2 is voor α_{ν}^{ff} en $T = 25000$ K want dat staat erbij. Geldt Rayleigh-Jeans? In $hc/\lambda kT$ is $hc/k = 0.0144$ mK, dus aan de rechterkant, voor $\lambda = 2000$ nm = $2 \mu\text{m}$, geldt $hc/\lambda kT = 0.3$. Daar moet de stippellijn voor α_{ν}^{bf} dus al van de 1:3 helling gaan afwijken, tenzij Zwaan de geïnduceerde emissie niet in de extinctiecoëfficiënt maar in de emissiecoëfficiënt heeft meegenomen.

Vraag 6.4

Ten eerste is de H^- ionisatie-energie van 0.75 eV gering. Voor de zon levert de eenvoudige schatting $m\nu^2/2 = 3kT/2$ met $T_{\text{eff}} = 5800$ K en $1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-12}$ erg dat de gemiddelde deeltjesenergie in de fotosfeer óók 0.75 eV bedraagt. Het inwendige deel van de bf sprongen dat het "geheugen" kan verzorgen in opeenvolgende verstrooiingsprocessen is dus niet groot ten opzichte van het deel boven de grensgolflengte waarin voortdurend een nieuwe greep uit de snelheidsverdeling wordt gedaan.

Daarnaast levert de brede piek van de H^- bf extinctiekromme versmering over een aanzienlijk spectraal bereik; deze ionisatie"kant" lijkt niet erg op een bb spectraallijn.

Vraag 6.5

Waterstofachtige spectra zijn die waarin de structuur van de electronenschillen lijkt op die van het neutrale waterstofatoom: één vrij electron in een centraal krachtveld. Dat is het geval voor de atomen en ionen met één vrij electron buiten gevulde schillen, dus de

spectra He II, Li III, Na I, Mg II, Al I, K I, Ca II, Ba II etc.

De structuur van het H^- ion lijkt daar helemaal niet op; de binding van het tweede electron berust op de grote polariseerbaarheid van het neutrale waterstofatoom waarin de positieve lading van het proton niet goed wordt afgeschermd door het enkele electron. Tenzamen vormen deze geen net centraal krachtveld.

Vraag 6.6

De blauwe kleur van de hemel ontstaat door Rayleighverstrooiing aan gebonden electronen in de moleculen van de dampkring. In het visuele deel van het spectrum is de energie van de opvallende straling 1–3 eV, dat is kleiner dan de karakteristieke resonantiefrequenties van de valentie-electronen in atomen (bijvoorbeeld de frequenties van de Lymanlijnen), zodat de elastische verstrooiing in het zichtbaar in het Rayleighdomein ligt, met $\omega \ll \omega_0$. Over het zichtbare kleurbereik, in golflengte van 800 nm (rood) naar 400 nm (violet), neemt de extinctiecoëfficiënt voor Rayleighverstrooiing een factor $2^4 = 16$ toe, dus blauwe fotonen worden aanzienlijk *vaker* verstrooid dan rode fotonen. De fasefunctie is onafhankelijk van de golflengte en verschilt niet sterk van isotroop (vergelijking 6.12), dus is de kans dat blauw licht uit de richting zon-aarde wordt weggestrooid veel groter dan voor rood licht.

Van het licht van zon, maan of sterren bereikt een grotere onverstrooide fractie ons direct in het rood dan in het blauw; in het blauw wordt een grotere fractie uit de gezichtsrichting weggestrooid dan in het rood. Dat maakt de ondergaande zon, maan en sterren rood. Deze verkleuring heeft dus niets te maken met absorptie, inelastische verstrooiing of verschil in fasefunctie, alleen met de grotere kans op elastische verstrooiing in het blauw: de moleculen zijn groter voor blauw licht dan voor rood, gemeten in werkzame doorsnede. De uit de richting zon-aarde weggestrooide blauwe fotonen kunnen middels volgende verstrooiingen ons oog bereiken uit willekeurige richting; dat maakt de hemel blauw.

Omdat Rayleighverstrooiing elastisch is blijven de spectraallijnen in het zonnespectrum behouden; er gebeurt niets met de fotonen als ze in opeenvolgende verstrooiingen van richting worden veranderd, afgezien van de richtingsverandering zelf. Het spectrum van de blauwe hemel vertoont dus spectraallijnen gelijk aan die in het over de zonneschijf gemiddelde zonnespectrum, *i.e.* in de irradiantie van de zon. Daarnaast zijn er ook spectraallijnen op die golflengten waarop de moleculen van de dampkring zelf bb extinctie leveren; in het zichtbare deel van het spectrum zijn dat vooral H_2O lijnen (*e.g.* Figuur 1.2). Hun extinctie bestaat vooral uit bb verstrooiing, wederom elastisch.

Vraag 6.7

De extinctiecoëfficiënt per vrij electron voor Thomsonverstrooiing is $\sigma_e^T = \sigma_T$ met σ_T de Thomsonsdoorsnede. Voor Rayleighverstrooiing is de extinctiecoëfficiënt per valentie-electron en resonantielijn $\sigma_e^R = f_{lu} \sigma_T (\omega/\omega_0)^4$. Voor $\omega \ll \omega_0$ geldt derhalve $\sigma_e^T \gg \sigma_e^R$; Rayleighverstrooiing zal daarom alleen meetellen in de totale extinctiecoëfficiënt als het medium nauwelijks vrije electronen bevat.

Dit is het bijvoorbeeld het geval in de aardse dampkring en in de atmosferen van koele sterren met kleine "metallicity", *i.e.* geringe abundanties van elementen zoals Mg, Si, Fe en Na. Deze "metalen" hebben kleinere ionisatiepotentiaal dan waterstof (zie Appendix A) en leveren daarom bij lage temperatuur al vrije electronen, terwijl waterstof alleen in neutrale vorm bestaat (Saha). Een tekort aan deze electrondonormetalen levert dus een tekort aan vrije electronen.

Vraag 6.8

De extinctiecoëfficiënt per cm voor Thomsonverstrooiing is $\alpha_T = N_e \sigma_T$, met N_e de electronendichtheid in cm^{-3} . Deze is frequentie-onafhankelijk.

Vraag 6.9

Thomsonverstrooiing is elastische verstrooiing; er gebeurt niets anders dan dat de fotonen van richting worden veranderd. De richtingverandering is niet precies maar wel grofweg isotroop, volgens vergelijking (6.15). De redenering van vraag 3.26 gaat derhalve op; er geldt (in goede benadering) $S_T(\nu) = J_\nu$.

C.7 Hoofdstuk 7

Vraag 7.1

De botsingsprocessen en stralingsprocessen bepalen hoe de populaties tot stand komen; als deze gelijk zijn aan de Saha-Boltzmann TE waardes geldt LTE. Als *botsingsprocessen* overheersen in de excitatie en deëxcitatie, ionisatie en recombinatie, dissociatie en associatie *etc.* boven de overeenkomstige stralingsprocessen zullen de populaties middels de frequente botsingen gekoppeld zijn aan de lokale kinetische energieverdeling. Als die gegeven wordt door de Maxwellverdeling volgen de populaties inderdaad de lokale temperatuur. Er is dan veel destructie en creatie van fotonen, en er treedt relatief weinig verstrooiing en conversie van fotonen op. Het stralingsveld wordt dan *ter plaatse* gemaakt, of tenminste sterk beïnvloed, en zal niet veel afwijken van de lokale temperatuur. Ook geldt $\psi = \varphi = \chi$ als verstrooiing en conversie relatief onbelangrijk zijn; het geheugen van een atoom voor hoe het werd aangeslagen wordt dan te vaak door botsingsdeëxcitatie gewist.

Als daarentegen de *stralingsprocessen* overheersen in excitatie en deëxcitatie *etc.* is er wel veel fotonverstrooiing en fotonconversie. De populaties zullen dan sterk beïnvloed worden door het stralingsveld. Dat komt, al verstrooid wordend, van elders. Als het daar bij een heel andere temperatuur is gemaakt zullen de populaties die temperatuur deels kunnen weerspiegelen en afwijken van de plaatselijke temperatuur, ook al wordt die netjes gevolgd door de deeltjesbewegingen middels de Maxwellverdeling. Dan geldt LTE niet en de kunnen de profiel functies van elkaar verschillen. Als het van elders komende stralingsveld echter niet verschilt van de lokale Planckfunctie zal LTE weer wel gelden. Kwantitatief: zie vergelijking (7.11).

Vraag 7.2

LTE geldt als de straling geen informatie van elders aanvoert die er toe leidt dat populaties van de lokale Saha-Boltzmann waardes afwijken. Dat zal in het algemeen geval het geval zijn in media waarin Maxwell geldt en de vrije weglengte van zowel deeltjes als fotonen veel kleiner is dan de schaal waarover de systeemparameters (druk, temperatuur) veranderen. Dat is ondermeer het geval binnen in sterren.

Waar geldt LTE zeker niet? In omstandigheden waar het stralingsveld de bronfunctie beïnvloedt en van een plek komt waar de omstandigheden anders zijn. Bijvoorbeeld de aardatmosfeer. Het zonlicht wordt verstrooid (vooral Rayleighverstrooiing) en de

lokale bronfunctie (waarin Rayleighverstrooiing zowel aan de extinctie als de emissie bijdraagt) voelt dus de helderheidstemperatuur van het zonlicht. Deze verschilt sterk van de lokale kinetische temperatuur, dus LTE gaat niet op.

Een andere plaats waar LTE zeker niet opgaat is in media waar de temperatuur een slechte beschrijving is voor de deeltjesbewegingen, dus overal waar niet-thermische deeltjesversnelling optreedt. Dan geldt de Maxwellverdeling niet en hangt de evenwichtsbeschrijving niet meer alleen van de temperatuur af.

Vraag 7.3

Met de definitie van de populatieafwijkingcoëfficiënten

$$b_l = n_l/n_l^{\text{LTE}} \quad \text{en} \quad b_u = n_u/n_u^{\text{LTE}}$$

geldt LTE voor een gegeven overgang $l - u$ (eventueel een continuum k) als $b_l = 1$ en $b_u = 1$; dan zijn de populaties van onder- en bovenniveau beide gelijk aan de Saha-Boltzmann waardes.

De algemene lijnbronfunctie is

$$S_\nu^l = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{\psi/\varphi}{\frac{b_l}{b_u} e^{h\nu/kT} - \chi/\varphi}$$

en de lijnextinctiecoëfficiënt wordt

$$\begin{aligned} \alpha_\nu^l &= \frac{h\nu_0}{4\pi} b_l n_l^{\text{LTE}} B_{lu} \varphi \left[1 - \frac{b_u n_u^{\text{TE}} B_{ul} \chi}{b_l n_l^{\text{TE}} B_{lu} \varphi} \right] \\ &= \frac{h\nu_0}{4\pi} b_l n_l^{\text{LTE}} B_{lu} \varphi \left[1 - \frac{b_u}{b_l} \left(\frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right)^{\text{TE}} \frac{\chi}{\varphi} \right] \\ &= \frac{h\nu_0}{4\pi} b_l n_l^{\text{LTE}} B_{lu} \varphi \left[1 - \frac{b_u \chi}{b_l \varphi} e^{-h\nu/kT} \right]. \end{aligned}$$

Als de Wienbenadering geldt is de correctiefactor tussen $[\]$ in α_ν^l verwaarloosbaar en schaal de lijnextinctie lineair met b_l volgens:

$$\alpha_\nu^l \approx b_l (\alpha_\nu^l)^{\text{LTE}}$$

met $(\alpha_\nu^l)^{\text{LTE}}$ de Saha-Boltzmannwaarde die in LTE zou gelden.

In de Wienbenadering is evenzo de negatieve correctie in de noemer van de bronfunctie verwaarloosbaar zodat deze lineair schaal met de verhouding b_u/b_l volgens:

$$S_\nu^l \approx \frac{b_u}{b_l} S_\nu^{\text{LTE}} = \frac{b_u}{b_l} B_\nu.$$

Vraag 7.4

Aan $S_\nu = B_\nu$ is voldaan als de verhouding $b_u/b_l = 1$. Dit is mogelijk met $b_u = b_l \neq 1$; in dat geval zijn de

populaties niet gelijk aan de Saha-Boltzmann waarden en geldt LTE niet. Dat komt dan tot uitdrukking in de extinctiecoëfficiënt omdat die schaal met de afwijkingcoëfficiënt van het onderniveau.

Vraag 7.5

In Figuur 7.1 is de intensiteit gelijk genomen aan de waarde van de Planckfunctie op optische diepte $\tau'_\nu = 1$ (rechtsboven), in overeenstemming met de Eddington-Barbier benadering onder de aanname van LTE. Exact juist is dit zeker niet want B_ν is niet lineair in T getekend (dat zou zo zijn in het Rayleigh-Jeans bereik) en T is niet lineair in τ'_ν getekend. De twee getekende τ'_ν schalen hangen niet lineair samen dus Eddington-Barbier kan nooit op beide tegelijk exact gelden.

Vraag 7.6

Het vierluik in Figuur 7.1 toont hoe de uittredende intensiteit varieert tengevolge van variaties in de totale extinctiecoëfficiënt met de frequentie en met de plaats, gewogen met het $T(z)$ -verloop en het $B_\nu(T)$ -verloop. Het enige dat hierin karakteristiek is voor een spectraallijn is de aanwezigheid van grote variatie in het verloop van $\tau'_\nu(z)$ met de frequentie over een smal frequentiebandje, smal genoeg dat met één Planckfunctie kan worden volstaan.

Als LTE voor de vorming van uiteenlopende continua mag worden aangenomen geldt een analoog vierluik. Voor elke frequentie is er dan eveneens een specifiek $\tau'_\nu(z)$ verloop; voor uiteenliggende continua kan dat eveneens sterk verschillen. Elk van deze τ'_ν schalen bemonstert dan weer met zijn $\tau'_\nu = 1$ vormingsdiepte het $T(z)$ verloop. De uittredende intensiteit volgt weer uit de Planckfunctie. Voor de verschillende continua moet nu echter ook de frequentieafhankelijkheid van de Planckfunctie in rekening worden gebracht; het paneel rechtsonder in het vierluik dient dus voor elk continuum de bijbehorende $B_\nu(T)$ te bevatten.

Vraag 7.7

Een optisch dunne homogene laag waarin LTE geldt levert emissielijnen als hij niet van achteren wordt aangestraald, volgens $I_\nu = (\alpha_\nu^c + \alpha_\nu^l)B_\nu(T)D$. Als hij wel wordt aangestraald toont hij absorptielijnen als $I_\nu(0) > B_\nu(T)$ en emissielijnen voor $I_\nu(0) < B_\nu(T)$, net als in Tabel 3.1.

Een optisch dikke homogene laag in LTE toont de Planckfunctie, ongeacht het spectrale verloop van de

extinctiecoëfficiënt in de laag: $I_\nu = B_\nu(T)$.

Een homogene LTE laag die optisch dun is in het continuum maar optisch dik in ~~het continuum~~ ^{de lijn} vertoont spectraallijnen waarvan de top op het niveau $I_\nu = B_\nu$ is afgeplat. Als de laag niet van van achteren wordt aangestraald, of met intensiteit $I_\nu(0) < B_\nu(T)$, zijn het emissielijnen; als $I_\nu(0) > B_\nu(T)$ zijn het absorptielijnen.

Vraag 7.8

LTE veronderstellend volgt uit het feit dat de NaID lijnen absorptielijnen zijn, met de overweging dat de zon optisch dik is, onmiddellijk dat de temperatuur in de zon naar buiten afvalt, tenminste over het bereik dat door de NaID lijnen bemonstert wordt. Dat is het bereik in hoogte tussen de lokatie met $\tau'_\nu = 1$ voor het lijncentrum en de lokatie met $\tau'_\nu = 1$ voor het naastliggende continuum.

Vraag 7.9

Bij scheve kijkrichting ($\mu < 1$) wordt straling ontvangen uit hogere lagen in de atmosfeer. Aannemend dat de uitwaartse temperatuurdaling die uit het lijnprofiel voor het midden van de schijf volgt zich met de hoogte voortzet zal de intensiteit van het lijncentrum van het midden naar de rand van de zon dalen. (Dat hoeft niet het geval te zijn in relatieve maat, genormeerd met de continue intensiteit; de laatste daalt sneller als de temperatuurafval naar buiten afvlakt.)

Vraag 7.10

Tijdens een zonsverduistering wordt de chromosfeer als een optisch dunne laag waargenomen die niet van achteren (tegen de kijkrichting in) wordt aangestraald. Daarvoor geldt:

$$I_\nu \approx j_\nu^c D + j_\nu^l D = (\alpha_\nu^c S_\nu^c + \alpha_\nu^l S_\nu^l) D$$

met \approx in plaats van $=$ omdat eigenlijk langs de gezichtslijn moet worden geïntegreerd wegens de inhomogeniteit van het medium. In dit geval zijn alle lijnen emissielijnen, ook de NaID lijnen, ongeacht de aard van de bronfunctie of het verloop van de temperatuur.

Heel dicht nabij de zonsrand kan de hele chromosfeer nog optisch dik zijn in het centrum van een sterke spectraallijn als de lijnextinctie in de schil veel groter is dan de continue extinctie. De intensiteit van het lijncentrum zal dan in Eddington-Barbier benadering gelijk

zijn aan de bronfunctie op optische diepte 1 (niet ra-
dieel maar langs de kijkrichting gemeten). De lijn kan
dan zijn afgetopt, of nog een centrale absorptiekuil ver-
tonen als de bronfunctie (Planckfunctie) naar binnen
toeneemt.

totale

↳ LTE

Vraag 7.11

Onder de aanname van LTE betekent het in absorptie
zijn van $H\alpha$ dat de temperatuur in de lagen waar deze
lijn gevormd wordt naar buiten afvalt; in de lagen waar
 $Ly\alpha$ wordt gevormd moet de temperatuur naar buiten
toenemen aangezien deze in emissie wordt gezien. Deze
twee lijnen kunnen dus niet uit dezelfde laag komen.

Hun verschil in extinctie schaal met de Boltzmann-
factor tussen het grondniveau en het eerste aangeslagen
niveau van waterstof (Figuur 1.4). Die is $\alpha_{Ly\alpha}/\alpha_{H\alpha} \sim$
 $\exp(h\nu_{Ly\alpha}/kT)$ en varieert van 2×10^{10} tot 1×10^5
tussen $T = 5000$ K en $T = 10000$ K. De effectieve
temperatuur van de zon is $T_{eff} = 5800$ K, dus de ex-
tinctie in $Ly\alpha$ is veel groter dan in $H\alpha$; de eerste lijn
wordt veel verder naar buiten gevormd dan de tweede.
Daaruit volgt dat de temperatuur naar buiten toe eerst
afvalt maar hogerop weer toeneemt.

Vraag 7.12

De dichtheid in een steratmosfeer neemt ruwweg ex-
ponentieel naar binnen toe (hydrostatisch evenwicht).
De bb extinctiecoëfficiënt is evenredig met de populatie
 n_l van het onderniveau van de betreffende spectraallijn
(vergelijking 5.11); deze zal ook ruwweg exponentieel
naar binnen toenemen (met modificaties op de alge-
mene dichtheidstoename die worden gegeven door de
Saha en Boltzmannverdelingen, en eventuele NLTE af-
wijkingen daarop). Dus neemt de vrije weglengte voor
bb verstrooiingsstappen $l_\nu = 1/\alpha_\nu^l$ naar buiten toe, in
eerste benadering exponentieel.

Vraag 7.13

De Eddington-Barbier benadering geldt voor de totale
optische diepte τ_ν' , dus $I_\nu^+ = S_\nu(\tau_\nu' = \mu)$ ongeacht de
aard van de extinctieprocessen die aan de τ_ν' -schaling
bijdragen. Als daar veel verstrooiing bij zit geldt de
benadering onverminderd.

Je ziet de straling vanwaar die ontsnapt, niet (nood-
zakelijkerwijs) waar hij werd aangemaakt. Ook voor
het schijnsel van de door een onzichtbare lantaarn
van binnenuit verlichte optisch dikke mist geldt de
Eddington-Barbier benadering.

Vraag 7.14

De statistisch evenwichtsvergelijking voor het bovenni-
veau u van een twee-niveau atoom is in de afwezigheid
van botsingen ($C_{ij} = 0$) en voor complete redistributie
($\varphi = \chi$ en daarmee: $\bar{J}_{\nu_0}^x = \bar{J}_{\nu_0}^\varphi \equiv \bar{J}_{\nu_0}$): zie (5.3) en

$$n_u(A_{ul} + B_{ul})\bar{J}_{\nu_0} = n_l B_{lu}\bar{J}_{\nu_0} \quad \text{onder (5.12)}$$

Daaruit volgt voor de bronfunctie, met gebruik van de
Einsteinrelaties, de algemene uitdrukking voor de bron-
functie (5.13) en met de notatie $\beta \equiv 2h\nu^3/c^2$:

$$\begin{aligned} n_u \left(1 + \frac{\bar{J}_{\nu_0}}{\beta} \right) &= n_l \frac{g_u}{g_l} \frac{\bar{J}_{\nu_0}}{\beta} \\ \frac{n_u}{n_l} \frac{g_l}{g_u} &= \frac{\bar{J}_{\nu_0}/\beta}{1 + \bar{J}_{\nu_0}/\beta} \\ S_\nu^l &= \frac{\beta}{\frac{n_l}{n_u} \frac{g_u}{g_l} - 1} \\ &= \frac{\beta}{\frac{1 + \bar{J}_{\nu_0}/\beta}{\bar{J}_{\nu_0}/\beta} - 1} \\ &= \bar{J}_{\nu_0}. \end{aligned}$$

Als alleen botsingen de bezettingen n_l en n_u bepalen
gehoorzamen deze de Boltzmannverdeling (Einsteinre-
latie 5.9); daarmee volgt uit vergelijking (5.13) dat
 $S_{\nu_0}^l = B_{\nu_0}$.

Vraag 7.15

$$\begin{aligned} \epsilon'_{\nu_0} &= \frac{\epsilon_{\nu_0}}{1 - \epsilon_{\nu_0}} \\ \epsilon_{\nu_0} &= \frac{\epsilon'_{\nu_0}}{1 + \epsilon'_{\nu_0}} \\ \epsilon'_{\nu_0} &= \frac{C_{ul}}{A_{ul} + B_{ul} B_{\nu_0}} \\ S_{\nu_0}^l &= \frac{J_{\nu_0} + \epsilon'_{\nu_0} B_{\nu_0}}{1 + \epsilon'_{\nu_0}}. \end{aligned}$$

Vraag 7.16

De benadering

$$\epsilon_{\nu_0} \approx \frac{C_{ul}}{C_{ul} + A_{ul}/(1 - e^{-h\nu_0/kT})}$$

geldt exact als $(1 - e^{-h\nu_0/kT})$ gebruikt kan worden als
~~correctiefactor voor de geïnduceerde emissie, hier niet~~

hier ging ik in de fout! juiste afleiding
naar: dicht AFY 2b.

toegepast als afname van de extinctie maar als toename van de spontane emissie.

De grootte van deze correctiefactor is (volgens vergelijking 5.11 maar zonder de profiel functies die in het onderhavige twee-niveau atoom zonder lijnverbreding niet meedoen):

$$1 - \frac{n_u B_{ul}}{n_l B_{lu}} = 1 - \frac{n_u g_l}{n_l g_u} = 1 - \frac{b_u}{b_l} e^{-h\nu_0/kT} \approx 1 - e^{-h\nu_0/kT},$$

met gebruik van de populatie-afwijkingcoëfficiënten b_u en b_l van vraag 7.3. De benadering voor ϵ_{ν_0} geldt dus exact mits $b_u/b_l = 1$.

Voor ϵ' levert dezelfde benadering:

$$\epsilon'_{\nu_0} = \frac{C_{ul}}{A_{ul}} \left[1 - \frac{b_u}{b_l} e^{-h\nu_0/kT} \right] \approx \frac{C_{ul}}{A_{ul}} \left[1 - e^{-h\nu_0/kT} \right].$$

Waar geldt deze benadering? Als $b_u/b_l = 1$ geldt ook $S_{\nu_0} = B_{\nu_0}$ (vraag 7.3), dus strikt geldt deze benadering alleen voor $\epsilon = 1$, in LTE, waarvoor deze parameter niet interessant is. Voor $\epsilon \ll 1$ geldt $S_{\nu_0} \neq B_{\nu_0}$, derhalve $b_u/b_l \neq 1$; dus waar de parameter ϵ wel interessant is geldt deze benadering juist niet exact.

In de Wien limiet ($h\nu_0 \gg kT$) doet echter de hele correctie voor geïnduceerde emissie niet terzake, laat staan de b_u/b_l correctie op de correctie.

In de Rayleigh-Jeans limiet ($h\nu_0 \ll kT$) is deze NLTE correctie op de geïnduceerde verstrooiing potentieel wél belangrijk. Maar daar is de kans op $\epsilon \ll 1$ weer klein omdat de botsingsfrequentie dan veel groter is. Deze is (Hoofdstuk 5):

$$C_{ij} = N_e \int_0^\infty \sigma_{ij}(v) f(v) v dv$$

en bij kleine $h\nu_0$ is de drempelsnelheid v_0 gering zodat een groot deel van de snelheidsverdeling $f(v)$ bijdraagt aan de integraal. Grote afwijkingen in de populatieverhoudingen tussen onder- en bovenniveau zijn in het Rayleigh-Jeans domein dus onwaarschijnlijk — de botsingsfrequentie is er te groot dat ze stand zouden kunnen houden, $C_{ul} \gg A_{ul} + B_{ul} J_{\nu_0}$ dus $\epsilon \approx 1$.

Al met al is de benadering dus doorgaans in orde; vaak wordt zelfs de hele correctie voor geïnduceerde emissie weggelaten: $\epsilon \approx C_{ul}/(A_{ul} + C_{ul})$ en $\epsilon' \approx C_{ul}/A_{ul}$.

Vraag 7.17

Dit is een hele rekenpartij, die wordt vergemakkelijkt met bovenstaande benaderingen voor ϵ en ϵ' en door

die weer terugkomt in AFY 2b en

het gebruik van een scherpgelijnd twee-niveau atoom zonder profiel functies. Begin met de statistisch evenwichtsvergelijking voor het bovenniveau u :

$$\frac{dn_u}{dt} = n_l \sum P_{lu} - n_u \sum P_{ul} = 0,$$

resultierend in

$$n_l (B_{lu} J_{\nu_0} + C_{lu}) = (B_{ul} J_{\nu_0} + C_{ul} + A_{ul}).$$

Deze levert een uitdrukking voor n_l/n_u ; substitueer deze in de algemene uitdrukking voor de lijnbronfunctie (vergelijking 5.13):

$$S_{\nu_0}^l = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \frac{1}{\frac{g_u n_l}{g_l n_u} - 1} = \frac{\frac{2h\nu_0^3}{c^2} \left[\frac{g_l}{g_u} B_{lu} J_{\nu_0} + \frac{g_l}{g_u} C_{lu} \right]}{A_{ul} + B_{ul} J_{\nu_0} + C_{ul} - \frac{g_l}{g_u} B_{lu} J_{\nu_0} - \frac{g_l}{g_u} C_{lu}},$$

deel door A_{ul} , herleid B_{ul} en B_{lu} met de Einsteinrelaties naar A_{ul} en evenzo C_{lu} naar C_{ul} , dan volgt:

$$S_{\nu_0}^l = \frac{\frac{2h\nu_0^3}{c^2} \left[\frac{B_{ul}}{A_{ul}} J_{\nu_0} + \frac{C_{ul}}{A_{ul}} e^{-h\nu_0/kT} \right]}{1 + \frac{B_{ul}}{A_{ul}} J_{\nu_0} + \frac{C_{ul}}{A_{ul}} - \frac{B_{ul}}{A_{ul}} J_{\nu_0} - \frac{C_{ul}}{A_{ul}} e^{-h\nu_0/kT}} = \frac{J_{\nu_0} + \frac{C_{ul}}{A_{ul}} \frac{2h\nu_0^3}{c^2} e^{-h\nu_0/kT}}{1 + \frac{C_{ul}}{A_{ul}} - \frac{C_{ul}}{A_{ul}} e^{-h\nu_0/kT}} = \frac{J_{\nu_0} + \epsilon'_{\nu_0} B_{\nu_0}}{1 + \epsilon'_{\nu_0}} = (1 - \epsilon_{\nu_0}) J_{\nu_0} + \epsilon_{\nu_0} B_{\nu_0}.$$

Vraag 7.18

Bij complete redistributie is er geen "geheugen" voor de oorspronkelijke aanslagfrequentie en zijn de kansverdelingen ψ en χ voor de emissie gelijk aan φ voor de extinctie. Dan is $\bar{J}_{\nu_0}^x = \bar{J}_{\nu_0}^\psi = \bar{J}_{\nu_0}^\varphi \equiv \bar{J}_{\nu_0}$. De afleiding gaat daarmee net als hierboven, met overal de frequentiegemiddelde \bar{J}_{ν_0} in de plaats van de monochromatische J_{ν_0} . De statistische evenwichtsvergelijking levert wederom n_l/n_u en de lijnbronfunctie wordt wederom gegeven door

$$S_{\nu_0}^l = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}};$$

het resultaat is:

$$S_{\nu_0}^l = (1 - \epsilon_{\nu_0}) \bar{J}_{\nu_0} + \epsilon_{\nu_0} B_{\nu_0},$$

met

$$\epsilon_{\nu_0} = \frac{C_{ul}}{A_{ul} + B_{ul} B_{\nu_0} + C_{ul}} \approx \frac{C_{ul}}{C_{ul} + [A_{ul}/(1 - e^{-h\nu_0/kT})]}.$$

(7.14)

Deze lijnbronfunctie is onafhankelijk van de frequentie (binnen de breedte van de spectraallijn). Dat levert ook in de uittredende intensiteit verschil met de monochromatische lijnbronfunctie van het scherpe twee-niveau atoom hierboven; zowel in het optisch dunne geval ($I_{\nu_0}^+ \approx \alpha_{\nu_0} S_{\nu_0} D$) en het optisch dikke geval ($I_{\nu_0}^+ \approx S_{\nu_0} [\tau'_{\nu_0} = \mu]$) hangt deze immers van de bronfunctie af.

Vraag 7.19

Bereken eerst de lichtkracht van de bol onder de aanname dat er geen enkele verstrooiing optreedt, dus voor $\alpha_{\nu}^s = 0$. Dan geldt in een punt P op het oppervlak van de bol:

$$I_{\nu}(\theta) = \alpha_{\nu}^a B_{\nu} s = \alpha_{\nu}^a B_{\nu} 2R \cos \theta$$

met R de straal van de bol en θ de hoek van uittrede met de normaal op het oppervlak. De flux door P is

$$\mathcal{F}_{\nu}^+ = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_{\nu} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi R \alpha_{\nu}^a B_{\nu}$$

en de totale lichtkracht is

$$L_{\nu} = \mathcal{F}_{\nu}^+ 4\pi R^2 = 4\pi V \alpha_{\nu}^a B_{\nu}$$

Deze uitdrukking voor de lichtkracht geldt ook als $\alpha_{\nu}^s \neq 0$ omdat er dan alleen maar additionele herverdeling over alle richtingen optreedt.

Vraag 7.20

Een object kan tegelijk effectief dun en optisch dik zijn. Voorbeeld: dichte mist om een lantaarn. Vergelijking (7.16) geldt ook dan (al blijft het een benadering; de fotonen moeten ooit worden aangemaakt en enige destructie zal er dus ook wel zijn).

Vraag 7.21

In een steratmosfeer neemt de dichtheid ruwweg exponentieel toe met de geometrische diepte. Met de dichtheid neemt de botsingsfrequentie toe; de overgangswaarschijnlijkheid C_{ul} wordt gegeven door

$$C_{ul} = N_e \int_{\nu_0}^{\infty} \sigma_{ul}(v) f(v) v dv,$$

waarin N_e de electronendichtheid is. De overgangswaarschijnlijkheid voor spontane deëxcitatie A_{ul} is onafhankelijk van enige toestandsparameter; dus zal $\epsilon \approx C_{ul}/(A_{ul} + C_{ul})$ inwaarts naar 1 naderen.

Vraag 7.22

De Rosselandbenadering vereist dat $S_{\nu} = B_{\nu}$ en geldt dus in lagen die dieper liggen dan ongeveer optische diepte $\tau_{\nu}^* \approx 1$, tot op één effectieve vrije weglengte van het oppervlak.

In de Eddingtonbenadering mag S_{ν} van de Planckfunctie verschillen maar de intensiteit mag niet te veel van isotropie ($I_{\nu} = J_{\nu}$ in elke richting) afwijken. De toevoeging van fotonen aan het lokale stralingsveld geschiedt isotroop zowel voor de thermische creatie van nieuwe fotonen als voor de verstrooiing van elders gecreëerde fotonen; de anisotropie van het stralingsveld wordt pas groot in de laag waar fotonen kunnen ontsnappen. De Eddingtonbenadering geldt daarom tot op ongeveer $\tau'_{\nu} = 1$, één vrije weglengte van het oppervlak. Bij veel verstrooiing ($\epsilon_{\nu} \ll 1$) geldt de Eddingtonbenadering derhalve tot veel dichter onder het oppervlak dan de Rosselandbenadering.

Vraag 7.23

Als de laag optisch zeer dik is in de 1-2 overgang worden 2-1 fotonen erin vastgehouden. Het zo rondwandelende 2-1 stralingsveld kan dan vrijwel isotroop worden, i.e. een grote gemiddelde intensiteit \bar{J}_{21} paren aan een geringe flux. Bovendien komen er veel extra 2-1 fotonen beschikbaar uit de conversie van 3-1 fotonen.

Vraag 7.24

Het maakt niet uit of de laag optisch dun dan wel effectief dun is voor 3-2 fotonen; in beide gevallen ontsnappen ze uit de laag en bewerkstelligen zo conversie van 3-1 straling in 3-2 straling plus 2-1 straling.

Vraag 7.25

In een twee-niveau-plus-continuum atoom is de situatie niet essentieel anders dan in het geschetste drie-niveau atoom; er is dan soortgelijke conversie van het aanstralende 3-1 continuum in 3-2 continuumstraling en 2-1 lijnstraling waarbij de laatste weer ingevangen blijft. Dit gebeurt bijvoorbeeld met het Lymancontinuum in het Zaanstra-mechanisme voor planetaire nevels, zie Hoofdstuk 8.

NB: in "twee-niveau-plus-continuum" slaat "continuum" op de bf overgangen in het atoom, niet op de achtergrondcontinua op de lijnfrequenties.

Literatuur

- Allen, C. W.: 1976, *Astrophysical Quantities*, Athlone Press, University of London
- Bahcall, J. N.: 1989, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, Cambridge
- Bashkin, S. and Stoner, J. O.: 1975, *Atomic Energy Levels and Grotrian Diagrams*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam
- Bowers, R. L. and Deeming, T.: 1984, *Astrophysics I. Stars*, Jones and Bartlett, Boston
- Chandrasekhar, S.: 1939, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, University of Chicago, reprinted by Dover Publications, 1957
- Cook, J. W., Cheng, C.-C., Jacobs, V. L., and Antiochos, S. K.: 1989, "Effect of coronal elemental abundances on the radiative loss function", *Astrophys. J.* **338**, 1176-1183
- Eddington, A. S.: 1926, *The Internal Constitution of the Stars*, Dover Publications, New York
- Gray, D. F.: 1976, *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, Wiley, New York
- Harwitt, M.: 1988, *Astrophysical Concepts*, Springer-Verlag, New York (Second Edition)
- Jefferies, J. T. and Thomas, R. N.: 1960, "Source Function in a Non-Equilibrium Atmosphere; V, Character of the Self-reversed Emission Cores of Ca+ H and K", *Astrophys. J.* **131**, 695
- Kurucz, R. L., Furenlid, I., Brault, J. W., and Testerman, L.: 1984, *Solar Flux Atlas from 296 to 1300 nm*, NSO Atlas Nr. 1, National Solar Observatory, Sunspot, New Mexico
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar Atmospheres*, Freeman and Company, San Francisco, 2nd edition
- Moore, C. E., Minnaert, M. G. J., and Houtgast, J.: 1966, *The Solar Spectrum 2935 Å to 8770 Å Second Revision of Rowland's Preliminary Table of Solar Spectrum Wavelengths*, NBS Monograph 61, National Bureau of Standards, Washington
- Novotny, E.: 1973, *Introduction to stellar atmospheres and interiors*, Oxford University Press, New York
- Rutten, R. J.: 1980, "Afbuiging van straling door de zon. 2. Nieuwe metingen", *Zenit* **7**, 372-378
- Rybicki, G. B. and Lightman, A. P.: 1979, *Radiative Processes in Astrophysics*, John Wiley & Sons, Inc., New York
- Stix, M.: 1989, *The Sun. An Introduction*, Springer, Berlin
- Uitenbroek, H.: 1989, "Operator Perturbation Method for Multi-Level Line Transfer with Partial Redistribution", *Astron. Astrophys.* **213**, 360-370
- Vernazza, J. E., Avrett, E. H., and Loeser, R.: 1981, "Structure of the Chromosphere. III. Models of the EUV Brightness Components of the Quiet Sun", *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **45**, 635-725
- Young, P., Sargent, W. L. W., and Boksenberg, A.: 1982, "A high-resolution study of the absorption spectra of three QSO's: evidence for cosmological evolution in the Lyman-alpha lines", *Astrophys. J.* **252**, 10-31
- Zirin, H.: 1988, *Astrophysics of the Sun*, Cambridge University Press, Cambridge

