Steropgave Maat en Integratie, 1-3-12

Inleveren op 8-3 aan het begin van het college (1:15) of vóór dit tijdstip per email bij de assistent: `N.Lindemulder@uu.nl`.

Steropgave 3* Zij X een verzameling en zij μ een eindige pre-maat[1] op de algebra $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ (dus $\mathcal{A}_0$ is gesloten voor *eindige* verenigingen). Zij $\mathcal{C}$ de collectie van alle $C \subset X$ met $C = \lim_n \uparrow A_n$ voor zekere $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}_0$ (kortom: $\mathcal{C}$ is de collectie van alle verenigingen van monotoon stijgende rijen in $\mathcal{A}_0$). Definieer $\pi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ alsvolgt: voor bovenstaande $C = \lim_n \uparrow A_n$ zet $\pi(C) := \lim_n \uparrow \mu(A_n)$.
a. Laat zien: π is welgedefinieerd op $\mathcal{C}$ en i.h.b. ondubbelzinnig (dus als $A_n \uparrow C$ en $A'_n \uparrow C$, dan volgt $\lim_n \uparrow \mu(A_n) = \lim_n \uparrow \mu(A'_n)$).
b. Laat zien: $\mathcal{C}$ is gesloten voor eindige verenigingen en eindige doorsneden.
c. Laat zien: π is sterk additief: $\pi(C_1 \cup C_2) + \pi(C_1 \cap C_2) = \pi(C_1) + \pi(C_2)$.
d. Laat zien: π is monotoon: $C_1 \subset C_2 \Rightarrow \pi(C_1) \leq \pi(C_2)$.
e. Laat zien: als $\{C_n\}_n$ een aftelbare rij is in $\mathcal{C}$ met $C_n \uparrow C$, dan $C \in \mathcal{C}$ en $\pi(C) = \lim_n \pi(C_n)$. *Aanwijzing:* als $A_k^{(n)} \uparrow C_n$, beschouw dan $\cup_n A_k^{(n)}$.

[1] Zie Remark 4.5 in het boek.