Uitwerking Herkansing Microeconomie, 22-8-2012

Opgave 1 [50 + 10 pt] Van een bepaalde consument kunnen de voorkeuren worden beschreven door de nutsfunctie $u(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} + x_2$, die is gedefinieerd op de consumptieverzameling $X := \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_+$. *Opmerking:* Dit is een niet-standaard situatie, die een mix is van versie 1 en versie 2 voor de consumptieverzameling X in het dictaat; zie onderdeel *.

*. [10 extra punten] Laat zien dat het nutsmaximaliseringsprobleem (UMP) voor $p_1, p_2, y > 0$ altijd een optimale oplossing heeft. Doe dit door het bewijs van existentie voor versie 2 in het dictaat geschikt aan te passen. Gevolg: de UMP oplosmethode blijft, geschikt aangepast (bijvoorbeeld: $B_{p_1,p_2,y}$ heeft slechts één hoekpunt), gelden.
a. [5 pt] Bewijs dat de functie u concaaf, maar *niet* strikt concaaf is op X.
b. [10 pt] Los het nutsmaximaliseringsprobleem (UMP) voor deze consument volledig op, met $p_1, p_2, y > 0$. *Aanwijzing:* de ongelijkheid $A^2 + B^2 \geq 2AB$ kan hier nuttig zijn.
c. [10 pt] Controleer de correctheid van het in onderdeel b verkregen antwoord door het UMP eerst voor $p_1 = p_2 = 2$, $y = 4$, en vervolgens ook voor $p_1 = p_2 = 2$, $y = 1$, grafisch op te lossen.
d. [10 pt] Los nu ook het bijbehorende algemene uitgavenminimaliseringsprobleem (EMP) op voor $p_1, p_2, > 0$ en $v \in u(X)$. Gebruik hiervoor een aanpassing van de EMP-oplosmethode (zie onderdeel *). *Attentie:* Bepaal eerst $u(X)$ en houd daar verder goed rekening mee!
e. [5 pt] Controleer de correctheid van het in onderdeel d verkregen antwoord door het EMP ook grafisch op te lossen.
h. [10 pt] Controleer de correctheid van de in de vorige onderdelen verkregen uitkomsten voor Marshalliaanse (onderdeel b) en Hicksiaanse (onderdeel d) vraag, door te controleren of ze aan de dualiteitsrelatie $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = \mathbf{x}(p_1, p_2, e(p_1, p_2, v))$ voldoen. *Attentie:* let goed op of de keuzevorken overeenstemmen.

OPLOSSING. *. Je moet het bewijs van Propositie 4.2.5.b in de syllabus imiteren door te laten zien dat het UMP kan worden teruggebracht tot het maximaliseren van de functie u (welke evident continu is) over een *gesloten* en niet-lege $F \subset B_{p_1,p_2,y}$. Nu bevat $B_{p_1,p_2,y}$ zeker de bundel $\bar{\mathbf{x}} := (\frac{y}{p_1}, 0) \in X$. Vorm

$$F := \{(x_1, x_2) \in X : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq y, u(x_1, x_2) \geq u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\}$$

(merk op: deze F lijkt heel sterk op de F in het bewijs van Propositie 4.2.5.b). Dan ook $\bar{\mathbf{x}} \in F$. Omdat $u < u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ op $B_{p_1,p_2,y} \backslash F$, geeft maximalisatie van u over $B_{p_1,p_2,y}$ (d.w.z. het UMP) precies dezelfde optimale opossingen als over F. Nu is $F \subset B_{p_1,p_2,y}$ is begrensd (want $B_{p_1,p_2,y}$ is begrensd). Je moet dus alleen nog bewijzen dat F gesloten is, want dan volgt uit de stelling van Weierstrass, net als in het bewijs van Propositie 4.2.5.b, dat het probleem $\max_F u$ een optimale oplossing heeft. Laat $\{(x_1^k, x_2^k)\}_k$ een willekeurige rij in F zijn met $(x_1^k, x_2^k) \to (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2$. In eerste instantie heb je uiteraard $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2_+$ en $p_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2 \leq y$ (dit laatste vanwege continuiteit van de functie $(x_1, x_2) \mapsto p_1 x_1 + p_2 x_2$). Echter, je wilt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in F$, dus begin je met aan te tonen dat $\tilde{x}_1$ strikt positief is. Dat kan met tegenspraak: als zou gelden $\tilde{x}_1 \leq 0$, dan had je $\tilde{x}_1 = 0$ (wegens bovenstaande $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2_+$), en dus zou dan $x_1^k \to \tilde{x}_1 = 0$. Maar dat zou geven $u(x_1^k, x_2^k) := -\frac{1}{x_1^k} + x_2^k \to -\infty$, hetgeen onmogelijk is wegens $u(x_1^k, x_2^k) \geq u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ voor alle k. Tot slot volgt nu direct dat $u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, omdat u continu is op X. Conclusie: $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in F$, waarmee is aangetoond dat F gesloten is.

a. *Methode 1:* Zij $f := -u$ (tekentruc). Dan is op $\mathbb{R}^2_{++}$ de Hessiaan van f gegeven door

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1^{-3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en dat is een positief semidefiniete matrix. Conclusie: f is convex op X (gebruik Stelling 3.1 uit de handout over convexe functies), en dus is u daarop concaaf. Omdat H_f zeker niet strikt positief definiet is (bijvoorbeeld $\mathbf{d}^T H_f \mathbf{d} = 0$ voor $\mathbf{d} = (0, 1)$), volgt uit diezelfde stelling dat f niet strikt convex is op X (m.a.w. dat u niet strikt concaaf is op X).

Methode 2: De functie $x_1 \mapsto -x_1^{-1}$ is concaaf op $\mathbb{R}_{++}$ (tweede afgeleide is negatief). Dus is $(x_1, x_2) \mapsto -x_1^{-1}$ concaaf op X. Ook is $(x_1, x_2) \mapsto x_2$ concaaf (want lineair) op X. Gevolg: u, de somfunctie, is ook concaaf. Daarentegen is de functie $-\frac{1}{x_1} + x_2$ is niet strikt concaaf op X, vanwege het lineaire stuk x_2. Om dit hard te maken kies je bijvoorbeeld $x_1 = 5$. Dan $u(5, x_2) = -0.2 + x_2$, en dus $-0.2 + 2 = \frac{1}{2}u(5, 1) + \frac{1}{2}u(5, 3) \not< u(5, 2) = -0.2 + 2$.

b. *Methode 1.* Omdat existentie van een optimale oplossing is verzekerd in onderdeel *, kun je de UMP oplosmethode gemakkelijk aanpassen.
Stap 0: u is evident strikt stijgend en continu op X.
Stap 1: 1(a) levert niets op en 1(c) levert $(\frac{y}{p_1}, 0)$, het enige hoekpunt dat $B_{p_1,p_2,y}$ hier heeft, op. De FONC uit stap 1(b) geeft $\frac{1}{x_1^2 p_1} = \frac{1}{p_2}$, dus $\hat{x}_1 = \sqrt{p_2/p_1}$ en dan $\hat{x}_2 = (y - \sqrt{p_1 p_2})/p_2$. Echter $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in X$ vereist $y \geq \sqrt{p_1 p_2}$.[1] Merk alvast op dat $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\frac{y}{p_1}, 0)$ in het grensgeval $y = \sqrt{p_1 p_2}$; dit verklaart de keuze van onderstaand geval 1.
Stap 2: Geval 1: $y \leq \sqrt{p_1 p_2}$. In dit geval heeft C slechts één element, n.l. $(\frac{y}{p_1}, 0)$, en dat moet dan dus de optimale oplossing zijn.

Geval 2: $y > \sqrt{p_1 p_2}$. In dit geval bevat C twee elementen, n.l. $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ en $(\frac{y}{p_1}, 0)$. Er geldt $u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \frac{y}{p_2} - 2\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$ en $u(\frac{y}{p_1}, 0) = -\frac{p_1}{y}$. De vraag $u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \overset{?}{>} u(\frac{y}{p_1}, 0)$ is dus equivalent met $\frac{y}{p_2} - 2\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} + \frac{p_1}{y} \overset{?}{>} 0$. Je kunt nu de aanwijzing gebruiken: zet $A := \sqrt{\frac{y}{p_2}}$ en $B := \sqrt{\frac{p_1}{y}}$, dan komt bovenstaande vraag neer op $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 \overset{?}{>} 0$, en dat is zo wegens $A \neq B$ in geval 2. Dus in dit geval is $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ optimaal.

Conclusie: de optimale oplossing van het UMP wordt gegeven door de formule

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} (\frac{y}{p_1}, 0) & \text{als } y \leq \sqrt{p_1 p_2} \\ (\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \frac{y - \sqrt{p_1 p_2}}{p_2}) & \text{als } y > \sqrt{p_1 p_2} \end{cases} \tag{1}$$

Methode 2: Omdat $u(x_1, x_2)$ strikt stijgend en continu is in (x_1, x_2), kun je gebruik maken van de budget-gebalanceerdheidsrelatie $x_2 = (y - p_1 x_1)/p_2$ d.m.v. rechtstreekse substitutie. Dat geeft het probleem om $\psi(x_1) := -x_1^{-1} + \frac{y - p_1 x_1}{p_2}$ te maximaliseren over $x_1 \in]0, \frac{y}{p_1}]$. Merk op dat het hybride karakter van X wordt weerspiegeld door het half-open/half-gesloten karakter van bovenstaand interval. Oplossen van $\psi'(x_1) = 0$ geeft $\bar{x}_1 = \sqrt{p_2/p_1}$, mits geldt dat $\bar{x}_1 \leq y/p_1$, d.w.z., mits $y \geq \sqrt{p_1 p_2}$. Het tekenoverzicht van ψ' toont in dat geval dat ψ monotoon stijgt op $]0, \bar{x}_1]$ en monotoon daalt op $[\bar{x}_1, y/p_1]$. Dus heeft ψ een globaal maximum in $\bar{x}_1$. Als $\bar{x}_1 > y/p_1$ (d.w.z., als $y < \sqrt{p_1 p_2}$), dan toont het tekenoverzicht van de afgeleide ψ' dat de functie ψ monotoon stijgt over het hele interval $]0, y/p_1]$ en in dat geval wordt het globale maximum aangenomen voor $x_1 = y/p_1$. In beide gevallen volgt de bijbehorende x_2-waarde via $x_2 = (y - p_1 x_1)/p_2$, en zo krijg je (1).

c. Zij $v \in \mathbb{R}$ en noteer door $\{u = v\}$ de indifferentieverzameling $\{(x_1, x_2) \in X : u(x_1, x_2) = v\} = \{(x_1, x_2) \in X : x_2 = v + \frac{1}{x_1}\}$; merk op dat dit de grafiek is van de functie $x_1 \mapsto v + \frac{1}{x_1}$. Voor $v = 3$ en $v = -1$ zijn de grafieken $\{u = 3\}$ en $\{u = 1\}$ geplot in figuur 1.

Bij een gegeven budgetverzameling $B_{p_1,p_2,y}$ vind je de optimale oplossing van het UMP op de gebruikelijke manier door de grafiek van $x_1 \mapsto v + \frac{1}{x_1}$ "zo ver mogelijk naar het noordoosten te schuiven", n.l. door v continu te verhogen. Voor $p_1 = p_2 = 2$ en $y = 4$ geeft (1) $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$, hetgeen correspondeert met het optimale nutsniveau $u(1, 1) = 0$. Voor $p_1 = p_2 = 2$ en $y = 1$ geeft diezelfde formule $(x_1^*, x_2^*) = (\frac{1}{2}, 0)$, wat overeenkomt met het nutsniveau $u(\frac{1}{2}, 0) = -2$. In figuur 2 is links de budgetverzameling $B_{2,2,4}$ afgebeeld met de optimale indifferentieverzameling $\{u = 0\}$; rechts is afgebeeld $B_{2,2,1}$ met de bijbehorende optimale indifferentieverzameling $\{u = -2\}$.

d. Voor $x_2 = 0$ heb je $u(x_1, 0) = -\frac{1}{x_1}$. Het bereik van u omvat dus zeker $\mathbb{R}_{--}$. Maar ook omvat het $[-1, \infty[$, wegens $u(1, x_2) = x_2 - 1$. Tezamen toont dit aan dat $u(X)$ gelijk is aan de hele verzameling $\mathbb{R}$. Zij vanaf nu dus $v \in \mathbb{R}$.

Stap 0: u is evident continu op X. Existentie van een optimale oplossing van het EMP volgt, zoals in onderdeel * is aangetoond voor het UMP, uit de hybride eigenschappen van X en de

[1] Uit onderdeel a valt dan al op te maken dat $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ in elk geval een optimale oplossing moet zijn, maar in principe zou $(\frac{y}{p_1}, 0)$ dan ook nog optimaal kunnen zijn, omdat u niet strikt concaaf is.

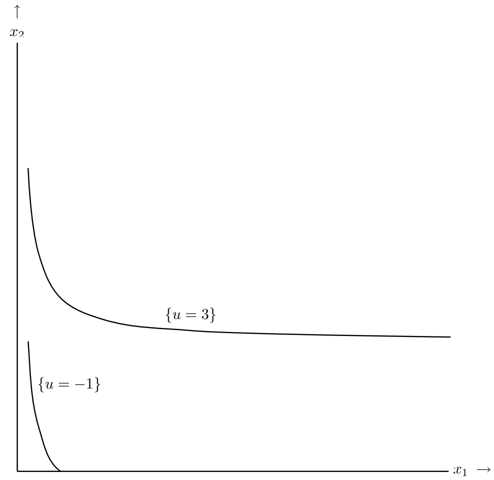


Figure 1: TWEE INDIFFERENTIEVERZAMELINGEN VAN DE NUTSFUNCTIE u

limieteigenschap $\lim_{k\to\infty} u(x_1^k, x_2) = -\infty$ voor $x_1^k \to 0$ van de nutsfunctie u.

Stap 1: Efficiëntie vereist $-\frac{1}{x_1} + x_2 = v$. Stap 1(a) levert niets op en stap 1(c) geeft het hoekpunt $(-\frac{1}{v}, 0)$ van L_v. Stap 1(b) geeft dezelfde FONC als boven, dus weer $\check{x}_1 = \sqrt{p_2/p_1}$, maar nu volgt $\check{x}_2 = v + \sqrt{p_1/p_2}$, zodat $(\check{x}_1, \check{x}_2) \in X$ neerkomt op $v \geq -\sqrt{p_1/p_2}$. Je kunt nu weer opsplitsen zoals in onderdeel b:

Geval 1: $v \leq -\sqrt{p_1/p_2}$. In dit geval is er maar één kandidaat voor optimaliteit, n.l., de bundel $(-\frac{1}{v}, 0)$. Die moet dan de optimale oplossing zijn.

Geval 2: $v > -\sqrt{p_1/p_2} < 0$. In dit geval zijn er twee kandidaten, n.l. $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ en $(-\frac{1}{v}, 0)$. Je moet dan $p_1\check{x}_1 + p_2\check{x}_2 = 2\sqrt{p_1p_2} + p_2v$ en $-\frac{p_1}{v}$ met elkaar vergelijken. Schrijf $w := -v$; dan $w > 0$. De vraag $p_2v + 2\sqrt{p_1p_2} + \frac{p_1}{v} \overset{?}{<} 0$ is uiteraard equivalent met $p_2w - 2\sqrt{p_1p_2} + \frac{p_1}{w} \overset{?}{>} 0$, en dat is waar omdat $C^2 - 2CD + D^2 > 0$ geldt voor $C := \sqrt{p_2w}$ en $D := \sqrt{p_1}w$ (merk op dat $C \neq D$ in geval 2). Dus in dit geval is $(\check{x}_1, \check{x}_2)$ optimaal.

Conclusie: de optimale oplossing van het EMP wordt gegeven door de volgende formule:

$$(x_{*1}, x_{*2}) = \begin{cases} (-\frac{1}{v}, 0) & \text{als } v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \\ (\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, v + \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}) & \text{als } v > -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \end{cases} \tag{2}$$

e. De twee verschillende types oplossing die zojuist werden gevonden, kunnen (althans qua type) ook worden gevonden d.m.v. de grafische oplossingsmethode. Zie onderstaande figuur 3.

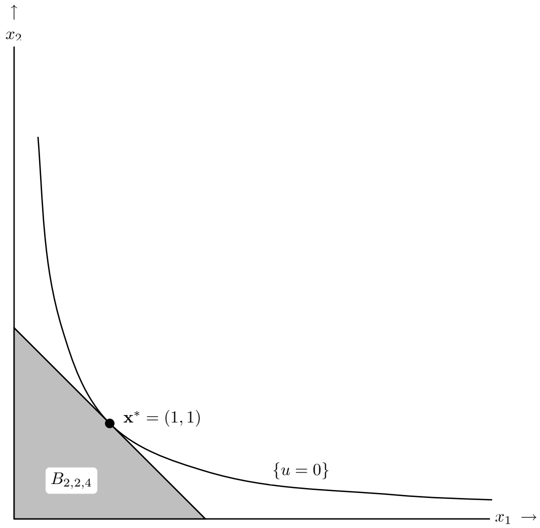
f. Uit onderdeel d volgt, wegens $e(p_1, p_2, v) = p_1x_{*1} + p_2x_{*2}$,

$$e(p_1, p_2, v) = \begin{cases} -\frac{p_1}{v} & \text{als } v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \\ p_2v + 2\sqrt{p_1p_2} & \text{als } v > -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \end{cases} \tag{3}$$

Volgens de formule in onderdeel b verkregen geldt

$$(x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, v)), x_2(p_1, p_2, e(p_1, p_2, v))) = \begin{cases} (\frac{e(p_1,p_2,v)}{p_1}, 0) & \text{als } e(p_1, p_2, v) \leq \sqrt{p_1p_2} \\ (\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \frac{e(p_1,p_2,v)-\sqrt{p_1p_2}}{p_2}) & \text{als } e(p_1, p_2, v) > \sqrt{p_1p_2} \end{cases}$$

Om de keuzevorken verder af te wikkelen is de vraag nu (zie de aanwijzing): is $e(p_1, p_2, v) \leq \sqrt{p_1p_2}$ equivalent met $v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$?



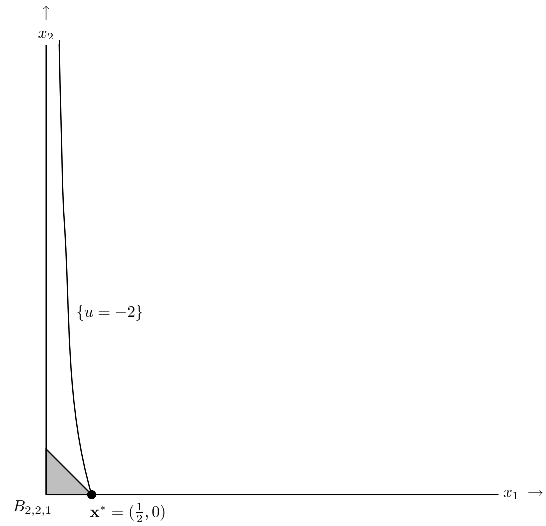


Figure 2: Grafische UMP-oplossingen voor $p_1 = p_2 = 2$ en resp. $y = 4$ en $y = 1$

Geval 1: $v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$. Volgens (3) is dan $e(p_1, p_2, v) \leq \sqrt{p_1 p_2}$ equivalent met $-\frac{p_1}{v} \leq \sqrt{p_1 p_2}$ en dat laatste is, wegens $v < 0$ in dit geval, equivalent met $v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$. Dus in geval 1 kan de vraag positief worden beantwoord.

Geval 2: $v > -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$. Volgens (3) is dan $e(p_1, p_2, v) \leq \sqrt{p_1 p_2}$ equivalent met $p_2 v + 2\sqrt{p_1 p_2} \leq \sqrt{p_1 p_2}$ en dus met $v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$, d.w.z. precies de ontkenning van dit geval 2.

Conclusie: $e(p_1, p_2, v) \leq \sqrt{p_1 p_2}$ is precies dan mogelijk als $v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$; de bovenstaande vraag kan dus bevestigend worden beantwoord. Daarom volgt

$$(x_1(p_1, p_2, e(p_1, p_2, v)), x_2(p_1, p_2, e(p_1, p_2, v))) = \begin{cases} (\frac{e(p_1,p_2,v)}{p_1}, 0) & \text{als } v \leq -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \\ (\sqrt{\frac{p_2}{p_1}}, \frac{e(p_1,p_2,v) - \sqrt{p_1 p_2}}{p_2}) & \text{als } v > -\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} \end{cases}$$

en dat geeft, gezien (3) en de formule in onderdeel d, meteen ook de gevraagde dualiteits-identiteit.

Opgave 2 [30 pt] a. [10 pt] Van het college weet je het volgende: de Marshalliaanse vraagfunctie voor de standaard CES-nutsfunctie $u(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i^\rho)^{1/\rho}$ (in de standaard notatie van de syllabus) luidt

$$x_i(\mathbf{p}, y) = \frac{y p_i^{r-1}}{p_1^r + \cdots + p_n^r}, i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

met $r := \rho/(\rho - 1)$. Leid in de situatie $n = 2$ uit deze formule *rechtstreeks* de Marshalliaanse vraagfunctie $\mathbf{x}(p_1, p_2, y)$ af voor een consument waarvan de preferenties worden gegeven door de nutsfunctie $u(x_1, x_2) = a\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, met $a > 0$ een parameter. *Let op:* gevraagd wordt *uitsluitend* naar een rechtstreekse afleiding vanuit (4).

b. [5 pt] Gebruik achtereenvolgens de limietsituaties $a \to 0$ en $a \to \infty$ om de correctheid van je in onderdeel a verkregen antwoord te testen.

c. [15 pt] Beschouw een zuivere ruileconomie met twee consumenten en twee goederen. Veronderstel dat de voorkeuren van consument 1 kunnen worden weergegeven door de nutsfunctie $u^1(x_1, x_2) = 3\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ en die van consument 2 door $u^2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$. Zij $(\omega_1^1, \omega_2^1) = (1, 1)$ de initiële rijkdom van consument 1 en zij $(\omega_1^2, \omega_2^2) = (0, 2)$ de initiële rijkdom van consument 2. Bepaal alle Walrasiaanse evenwichten van deze ruileconomie. Bepaal ook de verzameling van alle Walrasiaanse evenwichtsvectoren. *Aanwijzing:* bespaar werk door gebruik te maken van je uitkomst bij onderdeel a; dat kan voor *beide* consumenten.

Oplossing. a. Voor $n = 2$ en $\rho = 1/2$ volgt uit de gegeven formule

$$x_1(p_1, p_2, y) = \frac{y p_2}{p_1 p_2 + p_1^2}, \; x_2(p_1, p_2, y) = \frac{y p_1}{p_1 p_2 + p_2^2}, \tag{5}$$

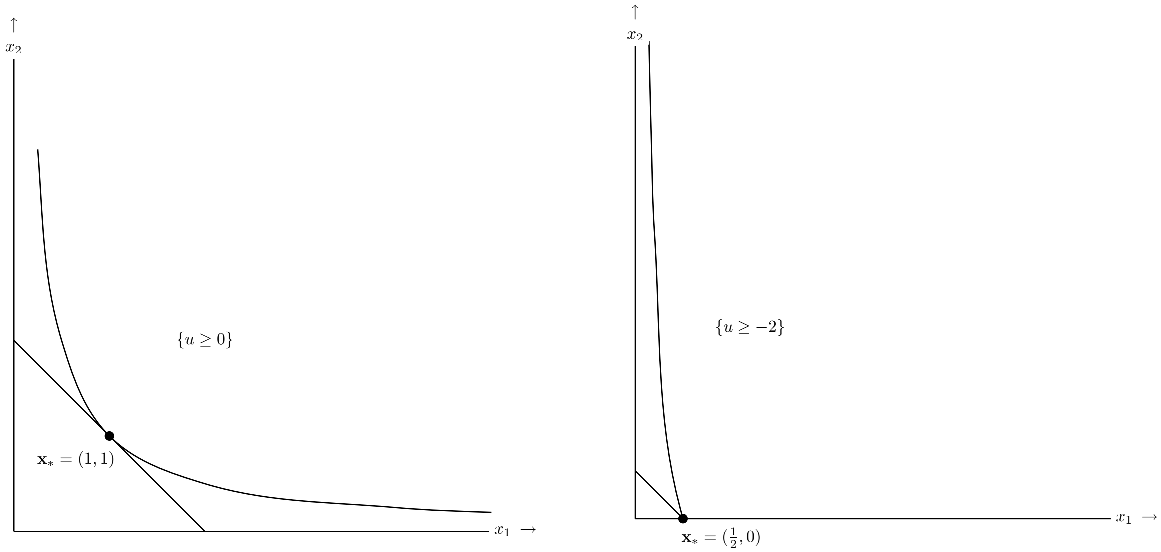


Figure 3: Grafische EMP-oplossingen voor $p_1 = p_2 = 2$ en resp. $v = 0$ en $v = -2$

want $r = -1$. Deze optimale bundel behoort bij de CES-nutsfunctie $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2$, en dus tegelijk ook bij de daarmee equivalente nutsfunctie $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ (gebruik opmerking 4.2.1 uit de syllabus). De gevraagde optimale bundel hoort bij het UMP: maximaliseer $a\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ over alle $x_1, x_2 \geq 0$ met $p_1x_1 + p_2x_2 \leq y$; door de substitutie $z_1 := a^2x_1$ wordt dat het volgende hulp-probleem: maximaliseer $\sqrt{z_1} + \sqrt{x_2}$ over alle $z_1, x_2 \geq 0$ met $\frac{p_1}{a^2}z_1 + p_2x_2 \leq y$. Wegens (5) is de optimale oplossing van het hulpprobleem

$$z_1^* = \tfrac{a^4yp_2}{a^2p_1p_2+p_1^2},\ x_2^* = \tfrac{yp_1}{p_1p_2+a^2p_2^2}.$$

en de gevraagde optimale oplossing volgt dan uit $x_1^* = z_1^*/a^2$. Dus de Marshalliaanse vraagbundel van deze consument is

$$x_1^* = \tfrac{a^2yp_2}{a^2p_1p_2+p_1^2},\ x_2^* = \tfrac{yp_1}{p_1p_2+a^2p_2^2}.$$

b. Controle: (1) $a \to 0$ geeft $x_1^* \to 0$ en $x_2^* \to y/p_2$; dat is wat je zou verwachten, omdat bezit van goed 1 steeds minder wordt gewaardeerd bij $a \to 0$. (2) $a \to \infty$ geeft $x_1^* \to y/p_1$ en $x_2^* \to 0$; ook dit is wat je verwacht, omdat $a \to \infty$ aan het bezitten van goed 2 steeds minder waarde toekent (dit wordt nog iets duidelijker als je opmerkt dat de gegeven nutsfunctie $a\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ equivalent is met $\sqrt{x_1} + b\sqrt{x_2}$, waarbij $b := a^{-1}$).

c. Zet in bovenstaand onderdeel $a = 3$ voor consument 1 en $b = 2$ voor consument 2 (d.w.z., $a = b^{-1} = 1/2$), dan zijn de vraagbundels van de twee consumenten

$$\mathbf{x}^1 = (\frac{9y^{(1)}p_2}{9p_1p_2 + p_1^2}, \frac{y^{(1)}p_1}{p_1p_2 + 9p_2^2}),\ \mathbf{x}^2 = (\frac{y^{(2)}p_2}{p_1p_2 + 4p_1^2}, \frac{4y^{(2)}p_1}{4p_1p_2 + p_2^2}), \tag{6}$$

met $y^{(1)} := p_1 + p_2$ en $y^{(2)} = 2p_2$. Zoals bekend kan de prijsvector slechts op positieve veelvouden na bepaald worden; daarom zet je ter vereenvoudiging $p_1 = 1$ en $p_2 = p$ en lost op voor $p > 0$. De eis van fysieke toelaatbaarheid is

$$(\frac{9(p+1)p}{9p+1}, \frac{p+1}{p+9p^2}) + (\frac{2p^2}{p+4}, \frac{8p}{4p+p^2}) = (1, 3).$$

Voor de eerste coördinaat geeft deze gelijkheid $\frac{9(p+1)p}{9p+1} + \frac{2p^2}{p+4} = 1$. Na vermenigvuldiging met $(9p+1)(p+4)$ zowel links als rechts wordt dit $27p^3 + 38p^2 - p - 4 = 0$. Precies dezelfde vergelijking vind je ook voor de tweede coördinaat. Uit een plot van het polynoom $f(p) := 27p^3 + 38p^2 - p - 4$

volgt[2] $p \approx 0.3$ (dat is vrij nauwkeurig – met Maple narekenen levert $p = 0.30513$ op). Hiermee is het Walras evenwicht bepaald, want $\mathbf{x}^1$ en $\mathbf{x}^2$ volgen eenvoudig door $p = 0.3$ in te vullen in (6). De verzameling van alle evenwichts-prijsvectoren, die ook is gevraagd, bestaat uit alle strikt positieve scalaire veelvouden van de vector $(1, 0.3)$.

Opgave 3 [20 pt] Een producent beschikt over twee fabrieken voor zijn product, welke hij tegelijkertijd kan inzetten voor de productie ervan. De totale kostenfuncties zijn $C_1(q) = \frac{2}{3}q^3 - 5q^2 + 18q$ en $C_2(q) = 3q^2 - 4q + 10$. Stel dat de producent zo goedkoop mogelijk q_0 eenheden van het goed wil produceren. Vind dan uitdrukkingen voor de optimale hoeveelheden die in beide fabrieken moeten worden geproduceerd. Geef voor $q_0 = 100$ in het bijzonder aan hoeveel van het product in beide fabrieken moet worden geproduceerd (afronden mag uiteraard) *Opmerking:* Hoe exacter de afleiding van de gevraagde uitdrukkingen is, des te meer punten dat oplevert.

Oplossing. Het probleem voor de producent is om $C_1(q_1) + C_2(q_2)$ te minimaliseren over alle combinaties $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2_+$ welke voldoen aan $q_1 + q_2 = q_0$ (modelleren met $q_1 + q_2 \geq q_0$ kan ook, maar dan geeft efficiëntie vervolgens $q_1 + q_2 = q_0$). Rechtstreekse substitutie van de gelijkheidnevenvoorwaarde (met inachtneming van de voorwaarde $q_2 = q_0 - q_1 \geq 0$) geeft dat je eerst de optimale oplossing van het volgende probleem moet vinden: minimaliseer $f(q_1) := C_1(q_1) + C_2(q_0 - q_1)$ over $q_1 \in [0, q_0]$. Wegens $f(q_1) = \frac{2}{3}q_1^3 - 2q_1^2 + 22q_1 - 6q_0q_1 + 3q_0^2 - 4q_0$ geeft dat de FONC $f'(q_1) = 2q_1^2 - 4q_1 + 22 - 6q_0 = 0$ op $[0, q_0]$. De wortels van deze vergelijking zijn $q^+ := 1 + \sqrt{3q_0 - 10}$ en $q^- := 1 - \sqrt{3q_0 - 10}$, volgens de abc-formule, maar deze zijn natuurlijk alleen zinvol als $q_0 \geq 10/3$.

In het speciale geval $q_0 = 100$ geldt $q^- = 1 - \sqrt{290} < 0$ en $q^+ = 1 + \sqrt{290} = 18.03$; het tekenverloop van het tweedegraads polynoom $f'(q_1) = 2(q_1 - q^+)(q_1 - q^-)$ op $[0, 100]$ is daarom alsvolgt: $f'(q_1) < 0$ als $q_1 \in [0, q^+)$, $f'(q^+) = 0$ en $f'(q_1) > 0$ als $q_1 \in (q^+, 100]$. Dus $f(q_1)$ heeft op $[0, 100]$ een uniek globaal minimum voor $q_1 = q^+ = 1 + \sqrt{290} = 18.03$; de producent moet dus afgerond 18 eenheden in fabriek 1 produceren en 82 in fabriek 2.

Voor algemene $q_0 \geq 10/3$ geldt uiteraard ook $q^+ := 1 + \sqrt{3q_0 - 10} > q^- := 1 - \sqrt{3q_0 - 10}$; merk op dat dan $q^- > 0$ alleen kan gelden als $q_0 < 11/3$. Maar ook de boven nog door berekening geverifieerde ongelijkheid $q^+ < q_0$ blijkt algemeen te gelden. Immers, $1 + \sqrt{3q_0 - 10} < q_0$ is equivalent met $\sqrt{3q_0 - 10} < q_0 - 1$, d.w.z. met $3q_0 - 10 < q_0^2 - 2q_0 + 1$ (omdat $q_0 - 1 \geq \frac{10}{3} - 1 > 0$), dus met $q_0^2 - 5q_0 + 11 > 0$, een ongelijkheid die gelding is voor alle $q_0 \geq 10/3$. Na deze pre-analyse kun je de volgende aparte gevallen onderscheiden:

Geval 1: $q_0 < 10/3$. In dit geval geldt $f' > 0$ op $[0, q_0]$, dus f is strikt stijgend. Dus geeft $q_1 = 0$ het unieke globale minimum. Dus de producent moet 0 eenheden in fabriek 1 en q_0 eenheden in fabriek 2 produceren.

Geval 2: $10/3 \leq q_0 < 11/3$. Omdat $[10/3, 11/3)$ geen geheel getal q_0 bevat, mag je deze situatie vanuit praktisch oogpunt uitsluiten.

Geval 3: $q_0 \geq 11/3$. De afgeleide $f'(q_1) = 2(q_1 - q^+)(q_1 - q^-)$ is strikt negatief op $[0, q^+)$, nul in $q_1 = q^+$, en strikt positief op $(q^+, q_0]$. Dus f is strikt dalend op $[0, q^+]$ en strikt stijgend op $[q^+, q_0]$. Daarom geeft $q_1 = q^+ := 1 + \sqrt{3q_0 - 10}$ het unieke globale minimum. De producent moet dus q^+ eenheden in fabriek 1 en $q_0 - q^+$ eenheden in fabriek 2 produceren (eventueel afgerond).

[2] Bijvoorbeeld $f(0) = 0$, $f(1), f(2) > 20$ toont al aan dat $p < 1$; vervolgens tonen $f(0.5) = 8.375$ en $f(0.3) = -0.151$ aan dat $p \approx 0.3$.