Uitwerking Eerste Quiz Microeconomie, 28-3-12, 11-13 u.

Opgave 1 [50 pt.] a. Zij A een $q \times n$-matrix met rang q. Zij $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Beschouw het volgende beste approximatieprobleem: minimaliseer $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ over alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ met $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Toon aan, *door uitsluitend gebruik te maken van de stof voor deze quiz*, dat de optimale oplossing $\mathbf{x}^*$ van dit probleem alsvolgt is: $\mathbf{x}^* = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)\mathbf{y}$.
b. Beschouw in $\mathbb{R}^4$ de volgende lineaire deelruimte:

$$Z := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, 2x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$$

Bepaal de orthogonale projectie op Z van de vector $(1, 1, 1, 1)^T$.

Oplossing. a. Zij $Z := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$; dit is een lineaire deelruimte, dus wegens Theorem 2.3.4 weet je dat de gevraagde $\mathbf{x}^*$ de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op Z moet zijn.

Methode 1. Voor de gegeven formule $\mathbf{x}^* = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)\mathbf{y}$ moet je de volgende twee zaken verifiëren, gezien de Definition 2.3.2 van orthogonale projectie: (i) $\mathbf{x}^* \in Z$, m.a.w., $A\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ en dat is triviaal; (ii) $\mathbf{x}^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}^*) = 0$ voor elke $\mathbf{x} \in Z$. Nu

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{y} - (I - A^T(AA^T)^{-1}A)\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A^T(AA^T)^{-1}A\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T(AA^T)^{-1}A\mathbf{y} = 0,$$

omdat $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ geldt wegens $\mathbf{x} \in Z$. Uit Definition 2.3.2 volgt dus het gevraagde.

Methode 2. Merk het volgende op: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is equivalent met het loodrecht staan van $\mathbf{x}$ op de kolommen van A^T (d.w.z. met het loodrecht staan van $\mathbf{x}$ op de rijvectoren van A, als je ze als kolommen interpreteert)! Zij L de lineaire deelruimte opgespannen door de kolommen van A^T. Dan volgt uit de vorige regel dus $Z = L^\vee$ (zie Example 3.1.12c). Per definitie moet de orthogonale projectie $\mathbf{x}^*$ voldoen aan de volgende twee eisen: (i) $A(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ en (ii) $\mathbf{y} - \mathbf{x}^*$ staat loodrecht op $Z = L^\vee$. Dit laatste geeft $\mathbf{y} - \mathbf{x}^* \in Z^\vee = L^{\vee\vee} = L$, waarbij het tweede gelijkteken een gevolg is van Theorem 3.1.13.b. Conclusie: uit (ii) volgt dat $\mathbf{y} - \mathbf{x}^*$ een lineaire combinatie van kolommen van A^T; m.a.w., er bestaat een vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^q$ met $\mathbf{x}^* = \mathbf{y} - A^T\mathbf{v}$. Samen met (i) geeft dit $\mathbf{0} = A\mathbf{x}^* = A\mathbf{y} - AA^T\mathbf{v}$ en hieruit volgt $\mathbf{v} = (AA^T)^{-1}A\mathbf{y}$, want de matrix AA^T is regulier en dus inverteeerbaar (immers $AA^T\mathbf{w} = \mathbf{0}$ impliceert $\mathbf{w}^T AA^t\mathbf{w} = 0$ en dus $\|A^T\mathbf{w}\| = 0$, met als gevolg $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ – dit regulariteitsargument is identiek aan dat uit het bewijs van Theorem 2.2.3.c). De eindconclusie luidt dus

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{y} - A^T\mathbf{v} = \mathbf{y} - A^T(AA^T)^{-1}A\mathbf{y}.$$

b. *Methode 1.* Je past onderdeel a toe op de 2×4-matrix A met de rijen $(1,-1,2,0)$ en $(2,1,0,-1)$. De formule in a geeft dan

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ 1 \\ \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

Methode 2. Je vormt een kunstmatige design matrix X voor Z, op de manier van Example 2.3.6. De dimensie van Z is $4-2=2$, dus je moet twee opspannende vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ vinden: stel $x_3=\lambda$ en $x_4=\mu$, dan geven $x_1-x_2+2x_3=0$ en $2x_1+x_2-x_4=0$ dat $x_1=(\mu-2\lambda)/3$ en $x_2=\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{3}\mu$. Als opspanners van Z kun je dus gebruiken $(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},1,0)^T$ en $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,1)^T$ of, netter nog, hun veelvouden $\mathbf{a}:=(-2,4,3,0)^T$ en $\mathbf{b}:=(1,1,0,3)^T$. Met $X:=(\mathbf{a}|\mathbf{b})$ volgt nu uit Example 2.3.6 dezelfde uitkomst $\mathbf{x}^*=(\frac{1}{7},1,\frac{3}{7},\frac{9}{7})^T$ als hierboven. Controle: (*i*) $\mathbf{x}^*=(\frac{1}{7},1,\frac{3}{7},\frac{9}{7})^T$ voldoet aan $x_1-x_2+2x_3=0$ en $2x_1+x_2-x_4=0$ en (*ii*) $\mathbf{y}-\mathbf{x}^*=\frac{1}{7}(6,0,4,-2)$ staat loodrecht op $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Opgave 2 [50 pt.] Gegeven is de nutsfunctie $u(x_1,x_2):=\min(2x_1,x_2-1)+\min(x_1,2x_2+x_1)$ voor $(x_1,x_2)\in X:=\mathbb{R}^2_+$.

a. Bepaal op grafische wijze de Marshalliaanse vraag van het nutsmaximalisatieprobleem $(\mathbb{U}_2)$ voor de consument (prijzen $p_1,p_2>0$ en inkomen $y\geq 0$), d.w.z. op basis van een figuur, waarin je de budgetverzameling en geschikt gekozen indifferentiecurves van u afbeeldt. Doe dit voor alle mogelijke waarden van $p_1>0$, $p_2>0$ en $y\geq 0$.

b. Controleer de correctheid van je uitkomst in onderdeel a door p_1, de prijs van goed 1, naar oneindig te laten gaan en daarbij te vast te stellen dat de Marshalliaanse vraag zich gedraagt zoals je zou verwachten. Doe dit vervolgens ook door p_2 naar oneindig te laten gaan en vervolgens ook nog door y naar nul te laten gaan.

Oplossing. a. Wegens $u(x_1,x_2):=\min(2x_1,x_2-1)+x_1$ is er één niet-differentieerbaarheidslijn, geven door $x_2=2x_1+1$. Deze lijn loopt in X vanuit $(0,1)$ met richtingscoëffient 2 naar boven. Boven deze lijn geldt $u(x_1,x_2)=3x_1$ en eronder $u(x_1,x_2)=x_1+x_2-1$. Voor $v\geq 0$ is de niveauverzameling $u^{-1}(v)$ afgebeeld aan de linkerzijde van figuur 1. Echter, je moet ook nog kijken naar niveaus tussen 0 en -1 (merk op: -1 is de laagste waarde die u kan annnemen), en daarvoor bestaat $u^{-1}(v)$ eenvoudigweg uit het lijnsegment tussen $(0,v+1)$ en $(v+1,0)$. Zie de rechterzijde van figuur 1.

A. Je begint weer aan een systematische benadering door de richtingscoefficient $-\frac{p_1}{p_2}$ achtereenvolgens steeds negatiever te laten worden: dus $\frac{p_1}{p_2}$ groeit aan, te beginnen vlakbij nul. Voor deze lage waarde van $\frac{p_1}{p_2}$ kan zowel (1) $\frac{y}{p_1}>1$ gelden als (2) $\frac{y}{p_1}\leq 1$ (afhankelijk van de waarde van y). Deze twee situaties zijn getekend in de linker- en rechterzijde van figuur 2. Beide figuren tonen aan dat het hoekpunt $\mathbf{x}^*=(\frac{y}{p_1},0)$ dan optimaal is. In essentie blijven deze twee plaatjes bruikbaar zolang $\frac{p_1}{p_2}<1$ geldt.

B. In het grensgeval $p_1=p_2$ zijn er, naar analogie van bovenstaande figuur 2, weer twee gevallen te onderscheiden, met in beide gevallen een *verzameling* S van

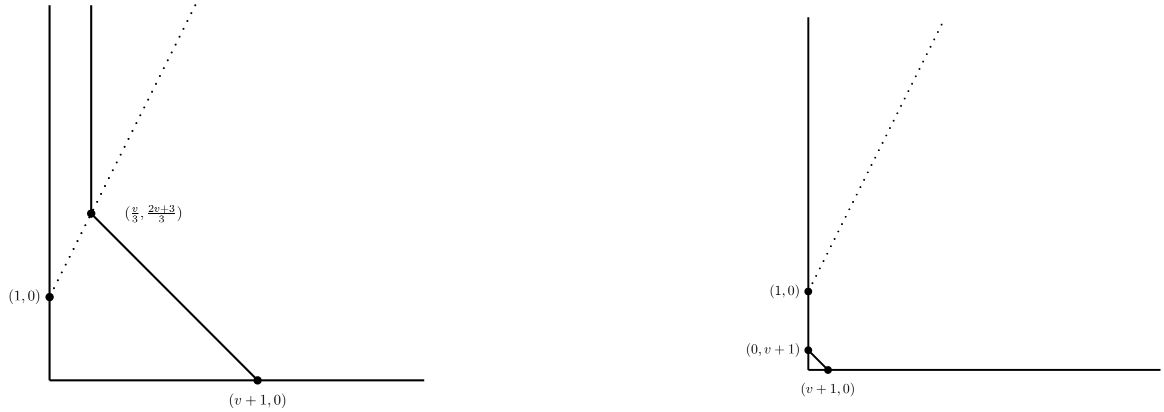

Figure 1: Niveauverzamelingen voor $v \geq 0$ en $-1 \leq v < 0$

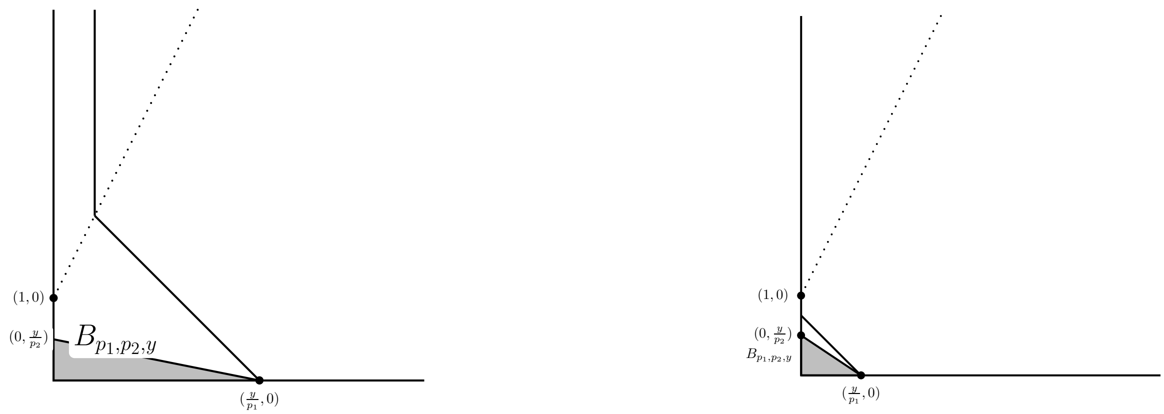

Figure 2: Bepaling optimale oplossing als $\frac{p_1}{p_2} < 1$

optimale oplossingen die deelverzameling is van de budgetlijn: (1) als $\frac{y}{p_1} > 1$, dan is S het lijnsegment tussen $(\frac{y}{p_1}, 0)$ en $(\frac{y-p_1}{3p_1}, \frac{2y+p_1}{3p_1})$ en (2) als $\frac{y}{p_1} \leq 1$, dan S de gehele budgetlijn. Merk bij (1) op dat in het algemeen $(\frac{y-p_2}{p_1+2p_2}, \frac{2y+p_2}{p_1+2p_2})$ het snijpunt is van de budgetlijn en de niet-differentieerbaarheidslijn.[1] Zie respectievelijk de linker- en rechterkant van figuur 3.

C. Tenslotte bekijk je nog het geval $p_1 > p_2$. Weer zijn daar twee situaties te onderscheiden, die corresponderen met de linker- en rechterzijde van figuur 1: (1) als $\frac{y}{p_2} > 1$, dan is het snijpunt $(\frac{y-p_2}{p_1+2p_2}, \frac{2y+p_2}{p_1+2p_2})$ optimaal en (2) als $\frac{y}{p_2} \leq 1$, dan is het hoekpunt $(0, \frac{y}{p_2})$ optimaal. Zie respectievelijk de linker- en rechterkant van figuur 4.

b. Limietgeval $p_1 \to \infty$: hiervoor hoef je alleen te kijken naar de uitkomst bij C: in geval (2) is de convergentie naar $(0, \frac{y}{p_2})$ triviaal en in geval (1) geldt $(\frac{y-p_2}{p_1+2p_2}, \frac{2y+p_1}{p_1+2p_2}) \to (0, 1)$. In beide gevallen klopt dat met de intuitie: als goed 1 erg duur wordt, dan koopt de consument er (nagenoeg) niets van; het is ook verdedigbaar dat in de limiet de keuze voor goed 2 van de consument naar $x_2^* = 1$ gaat, en niet naar $= \frac{y}{p_2}$, want zo

[1] Ter voorkoming van fouten (!): merk ook op dat dit snijpunt alleen tot X behoort als $y \geq p_2$.

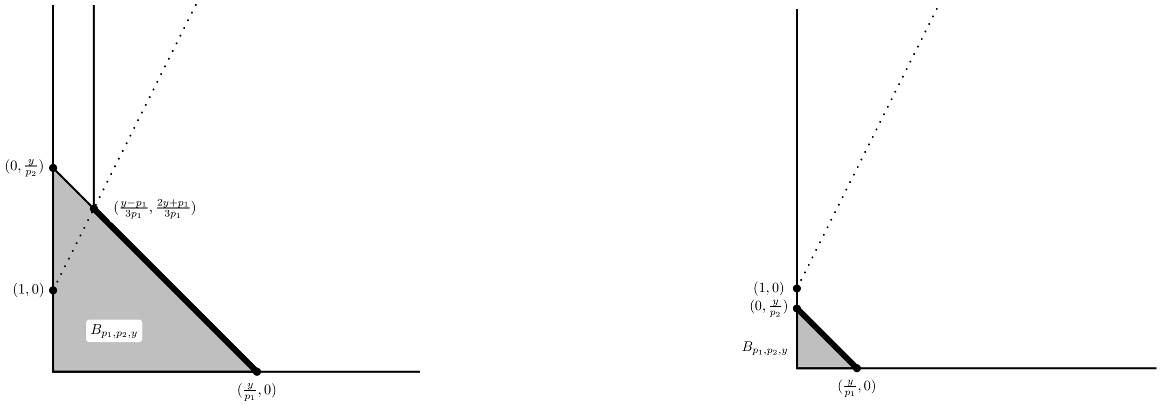

Figure 3: Bepaling optimale oplossing als $\frac{p_1}{p_2} = 1$

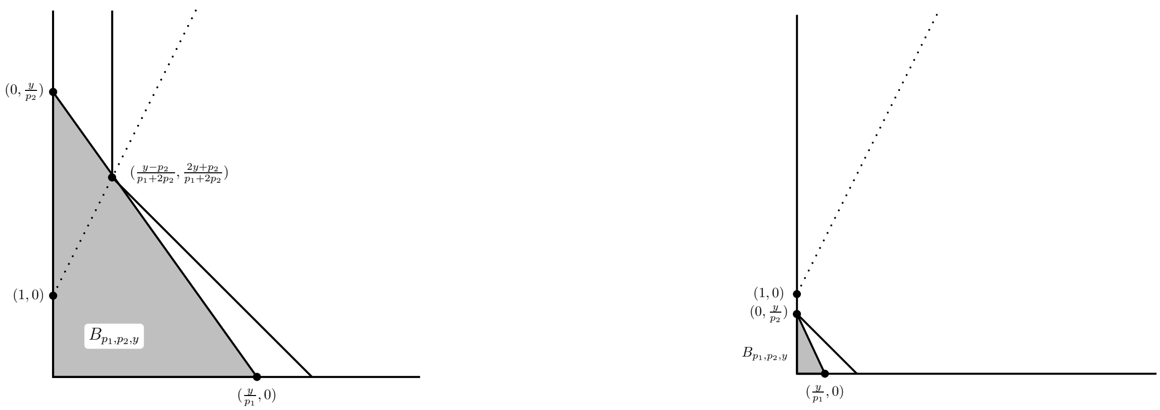

Figure 4: Bepaling optimale oplossing als $\frac{p_1}{p_2} > 1$

wordt met minder kosten hetzelfde nutsniveau bereikt: immers $u(0,1) = u(0, \frac{y}{p_2}) = 0$.

Limietgeval $p_2 \to \infty$: hiervoor hoef je alleen te kijken naar de uitkomst bij A: in beide gevallen (1) en (2) is de convergentie naar $(\frac{y}{p_1}, 0)$ triviaal. In beide gevallen klopt dat met de intuitie: als goed 2 erg duur wordt, dan koopt de consument er (nagenoeg) niets van.

Limietgeval $y \to 0$: in geval A geldt uiteindelijk (2) en dan $(\frac{y}{p_1}, 0) \to (0,0)$; in geval B geldt uiteindelijk dat de gehele budgetlijn de optimale oplossingsverzameling is, en die verzameling schrompelt in tot één punt $(0,0)$ als $y \to 0$; in geval C tenslotte heb je uiteindelijk (2) en dan $(0, \frac{y}{p_2}) \to (0,0)$.