Uitwerking Tweede Quiz Microeconomie, 16-5-2012

Opgave 1 [40 pt.] Beschouw de nutsfunctie $u(x_1, x_2) := \frac{3}{2}x_1 + x_2 - \sqrt{(\frac{x_1}{2} + x_2 - 25)^2 + 5}$ op $X = \mathbb{R}^2_+$. Toon aan: u is strikt stijgend en continu op X.

Opmerking 1. Deze opgave was eerder al een huiswerkopgave. *Opmerking 2.* Je verdient 5 extra punten als je de oplossing kunt aanleveren zonder gebruik te maken van een rekenapparaat.

a. Bepaal eerst met de UMP oplosmethode de bijbehorende Marshalliaanse vraag voor de volgende waarden van inkomen en prijzen: $y = 60$, $p_1 = 3$, $p_2 = 2$.

b. Idem maar nu voor $y = 60$, $p_1 = 3$, $p'_2 = 1$.

c. Ga na dat het bovenstaande een concreet voorbeeld oplevert van de Giffen paradox: de prijs van goed 2 is in onderdeel b lager dan in onderdeel a, maar toch koopt de consument er minder van in onderdeel b.

Oplossing. Uit de syllabus weet je dat een voldoende voorwaarde voor strikt stijgen is dat zowel $u_{x_1}(x_1, x_2)$ als $u_{x_2}(x_1, x_2)$ strikt positief zijn op X. Er geldt

$$u_{x_1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}[(\frac{x_1}{2} + x_2 - 25)^2 + 5]^{-1/2}(\frac{x_1}{2} + x_2 - 25) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 5}}$$

met $\xi := \frac{x_1}{2} + x_2 - 25$, en net zo geldt

$$u_{x_2} = 1 - [(\frac{x_1}{2} + x_2 - 25)^2 + 5]^{-1/2}(\frac{x_1}{2} + x_2 - 25) = 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 5}}$$

Het is dus voldoende om te laten zien dat voor alle mogelijke waarden van ξ (dat zijn dus alle $\xi \geq -25$) geldt $3\sqrt{\xi^2 + 5} > \xi$ en $\sqrt{\xi^2 + 5} > \xi$; wegens $\sqrt{\xi^2 + 5} > \sqrt{\xi^2} = |\xi|$ is dit evident.

a. *Stap 0.* De functie u is som van twee continue functies en dus continu op X en wegens het hierboven gestelde is u strikt stijgend op X.

Stap 1(a). De functie u is differentiëerbaar op $\mathbb{R}^2_{++}$, dus stap 1(a) levert geen kandidaten.

Stap 1(b). Je moet alle oplossingen vinden van $\frac{u_{x_1}}{3} = \frac{u_{x_2}}{2}$ en $3x_1 + 2x_2 = 60$. In bovenstaande notatie luidt de eerste gelijkheid $3 - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+5}} = 3 - 3\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+5}}$. Daaruit volgt al direct $\xi := \frac{x_1}{2} + x_2 - 25 = 0$; samen met $3x_1 + 2x_2 = 60$ geeft dit $(x_1, x_2) = (5, 22.5)$.

Stap 1(c). De hoekpunten zijn $(20, 0)$ en $(0, 30)$.

Stap 2. De kandidatenverzameling C bestaat uit de drie bundels $(5, 22.5)$, $(20, 0)$ en $(0, 30)$. Nu is $u(5, 22.5) = 30 - \sqrt{5}$ strikt groter dan $u(20, 0) = 30 - \sqrt{230}$ en $u(0, 30) = 30 - \sqrt{30}$. Uit de UPM oplosmethode volgt daarom dat $(5, 22.5)$ de unieke Marshalliaanse vraagbundel is (met rekenapparaat zouden de u-waarden 27.76, 14.83 en 24.52 gevolgd zijn).

b. Dit verloopt geheel analoog. In stap 1(b) geeft $\frac{u_{x_1}}{3} = u_{x_2}$ dat ($*$): $\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+5}} = \frac{3}{5}$. Door kwadrateren volgt $\xi^2 = \frac{45}{16}$, dus $\xi = \pm\frac{3}{4}\sqrt{5}$, maar als je dit weer invult in ($*$), blijft alleen $\xi = \frac{3}{4}\sqrt{5}$ over. Samen met $3x_1 + x_2 = 60$ volgt zo $(x_1, x_2) = (14 - \frac{3}{10}\sqrt{5}, 18 + \frac{9}{10}\sqrt{5})$. Dus C bestaat uit voorgenoemd punt, samen met de twee hoekpunten $(20, 0)$ en $(0, 60)$. Omdat $u(14 - \frac{3}{10}\sqrt{5}, 18 + \frac{9}{10}\sqrt{5}) = 39 - \frac{4}{5}\sqrt{5} > 39 - \frac{4}{5}2.5 = 37$ strikt groter is dan zowel $u(20, 0) = 30 - \sqrt{230}$ als $u(0, 60) = 60 - \sqrt{1230} < 60 - 35 = 25$, volgt dat $(14 - \frac{3}{10}\sqrt{5}, 18 + \frac{9}{10}\sqrt{5})$ de unieke Marshalliaanse vraagbundel is (met rekenapparaat zouden de u-waarden 37.21, 13.33 en 20.01 gevolgd zijn).

c. Je hoeft alleen nog op te merken dat $18 + \frac{9}{10}\sqrt{5}$, de vraag naar goed 2 in b, strikt kleiner is dan 22.5, de vraag naar goed 2 in a. Deze ongelijkheid volgt uit $\frac{9}{10}\sqrt{5} < \frac{9}{10}5 = 4.5$.

Opgave 2 [60 pt.] Van een consument waarvan de preferenties gegeven worden door de nutsfunctie $u(x_1, x_2) := \sqrt{x_1} + x_2$ op $X = \mathbb{R}^2_+$ blijkt de Marshalliaanse vraagbundel $\mathbf{x}(1, p_2, y)$ (dus voor $p_1 = 1$) uniek te zijn, namelijk

$$\mathbf{x}(1, p_2, y) = \begin{cases} (\frac{p_2^2}{4}, \frac{y - \frac{p_2^2}{4}}{p_2}) & \text{als } y \geq \frac{p_2^2}{4}, \\ (y, 0) & \text{als } y < \frac{p_2^2}{4} \end{cases} \tag{1}$$

Let op! Er wordt niet gevraagd om deze formule af te leiden.

a. Leid m.b.v. geschikte substituties *rechtstreeks* uit formule (1) af dat de Marshalliaanse vraagbundel $\mathbf{x}(p_1, p_2, y)$ van deze consument gelijk is aan

$$\mathbf{x}(p_1, p_2, y) = \begin{cases} (\frac{p_2^2}{4p_1^2}, \frac{y - \frac{p_2^2}{4p_1}}{p_2}) & \text{als } y \geq \frac{p_2^2}{4p_1}, \\ (y/p_1, 0) & \text{als } y < \frac{p_2^2}{4p_1} \end{cases} \tag{2}$$

b. Zij $u_\alpha(x_1, x_2) := \alpha\sqrt{x_1} + x_2$ op $X = \mathbb{R}^2_+$ voor $\alpha > 0$. Leid de bijbehorende Marshalliaanse vraagbundel $\mathbf{x}_\alpha(p_1, p_2, y)$ *rechtstreeks* af uit bovenstaande formule (2) m.b.v. geschikte substituties.

c. Verklaar op economische gronden het limietgedrag van $\mathbf{x}_\alpha(p_1, p_2, y)$ als $\alpha \to \infty$ en ook als $\alpha \to 0$.

d. Van nu af aan werken we weer met $\alpha = 1$ (en ook in alle volgende onderdelen), d.w.z. met de oorspronkelijke nutsfunctie $u(x_1, x_2) := \sqrt{x_1} + x_2$. Bepaal de bijbehorende indirecte nutsfunctie $v(p_1, p_2, y)$. Controleer de correctheid van de gevonden formule door de identiteit van Roy toe te passen.

e. Gebruik een bekende dualiteitsrelatie om uit de gevonden formule voor $v(p_1, p_2, y)$ de uitgavenfunctie $e(p_1, p_2, v)$ af te leiden, en laat zien dat dit geeft

$$e(p_1, p_2, v) = \begin{cases} -\frac{p_2^2}{4p_1} + p_2 v & \text{als } v \geq \frac{p_2}{2p_1}, \\ p_1 v^2 & \text{als } v < \frac{p_2}{2p_1} \end{cases}$$

Aanwijzing: Pas op met de keuzevorken!

f. Gebruik de in onderdeel e gegeven formule voor de uitgavenfunctie om de Hicksiaanse vraagbundel $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v)$ te bepalen met behulp van de identiteit van Shephard.

g. Leid, ter controle, $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v)$ ook af met behulp van de EMP-oplosmethode.

Oplossing. a. *Methode 1: rechtstreeks vanuit definitie.* De gegeven $\mathbf{x}(1, p_2, y)$ is optimaal voor het maximaliseren van $u(x_1, x_2)$ over X onder de voorwaarde $x_1 + p_2 x_2 \leq y$. Om $\mathbf{x}(p_1, p_2, y)$ te bepalen herschrijf je het standaard UMP alsvolgt: maximaliseer $u(x_1, x_2)$ over X onder de voorwaarde $x_1 + \frac{p_2}{p_1} x_2 \leq \frac{y}{p_1}$. Met $p_2' := \frac{p_2}{p_1}$ en $y' := \frac{y}{p_1}$ geeft dat $\mathbf{x}(p_1, p_2, y) = \mathbf{x}(1, p_2', y')$. Dus volgt

$$\mathbf{x}(p_1, p_2, y) = \left\{ \begin{array}{ll} (\frac{(p_2')^2}{4}, \frac{y' - \frac{(p_2')^2}{4}}{p_2'}) & \text{als } y' \geq \frac{(p_2')^2}{4}, \\ (y', 0) & \text{als } y' < \frac{(p_2')^2}{4} \end{array} \right\} = \begin{cases} (\frac{p_2^2}{4p_1^2}, \frac{y - \frac{p_2^2}{4p_1}}{p_2}) & \text{als } y \geq \frac{p_2^2}{4p_1}, \\ (y/p_1, 0) & \text{als } y < \frac{p_2^2}{4p_1} \end{cases}$$

Methode 2: positieve homogeniteit toepassen. Je weet dat $\mathbf{x}(p_1, p_2, y) = \mathbf{x}(tp_1, tp_2, ty)$ geldt voor elke $t > 0$; voor $t = \frac{1}{p_1}$ geeft dit $\mathbf{x}(p_1, p_2, y) = \mathbf{x}(1, p_1', y')$ met $p_1' := \frac{p_2}{p_1}$ en $y' := \frac{y}{p_1}$. Net als bij methode 1 volgt dan het gewenste resultaat.

b. Voer in $x_1' := \alpha^2 x_1$; dan moet je $\sqrt{x_1'} + x_2$ maximaliseren over alle $(x_1', x_2) \in \mathbb{R}^2_+$ met $\frac{p_1}{\alpha^2} x_1' + p_2 x_2 \leq y$. Dus volgt met $p_1' := \frac{p_1}{\alpha^2}$ uit de gegeven formule dat

$$((x_1^{*'}, x_2^*) = (\alpha^2 x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} (\frac{p_2^2}{4(p_1')^2}, \frac{y - \frac{p_2^2}{4p_1'}}{p_2}) & \text{als } y \geq \frac{p_2^2}{4p_1'}, \\ (y/p_1', 0) & \text{als } y < \frac{p_2^2}{4p_1'} \end{cases}$$

zodat

$$\mathbf{x}_\alpha(p_1, p_2, y) = (x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} (\frac{\alpha^2 p_2^2}{4(p_1)^2}, \frac{y - \frac{\alpha^2 p_2^2}{4p_1}}{p_2}) & \text{als } y \geq \frac{\alpha^2 p_2^2}{4p_1}, \\ (y/p_1, 0) & \text{als } y < \frac{\alpha^2 p_2^2}{4p_1} \end{cases}$$

c. Voor $\alpha \to \infty$ blijft uitsluitend de onderste vork gehandhaafd: dus $(y/p_1, 0)$ is de limietbundel. Voor $\alpha \to 0$ blijft uitsluitend de bovenste vork gehandhaafd: dat geeft $(0, y/p_2)$ voor de limietbundel.

Economische verklaring: voor $\alpha \to \infty$ telt in de limiet alleen de gekochte hoeveelheid van goed 1; dus daar wil je alles van kopen en van goed 2 niets. Voor $\alpha \to 0$ is het net andersom: voor $\alpha = 0$ telt alleen nog de gekochte hoeveelheid van goed 2; dus koop je daar alles van en niets van goed 1.

d. Uit (2) volgt meteen

$$v(p_1,p_2,y) = u(\mathbf{x}(p_1,p_2,y)) = \begin{cases} \frac{p_2}{2p_1} + \frac{y}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1} = \frac{y}{p_2} + \frac{p_2}{4p_1} & \text{als } y \geq \frac{p_2^2}{4p_1}, \\ \sqrt{y/p_1} & \text{als } y < \frac{p_2^2}{4p_1} \end{cases}$$

Deze formule voor v vertoont een vork in punten waarvoor geldt $y = \frac{p_2^2}{4p_1}$. Om de gevraagde controle te kunnen toepassen in *alle* punten (p_1,p_2,y) in $\mathbb{R}^3_{++}$ (het geval $y=0$ moet sowieso worden uitgesloten, want daar is $y\sqrt{y/p_1}$ al niet eens differentieerbaar), **moet je dus o.a. vaststellen dat v ook "over de vork heen" differentieerbaar is, want dat is een essentiële voorwaarde voor de geldigheid van de formule van Roy!**[1] Als $y \geq \frac{p_2^2}{4p_1}$ zijn de partiële afgeleiden $v_{p_1}(p_1,p_2,y) = -\frac{p_2}{4p_1^2}$, $v_{p_2}(p_1,p_2,y) = -\frac{y}{p_2^2} + \frac{1}{4p_1}$ en $v_y(p_1,p_2,y) = \frac{1}{p_2}$. En als $y < \frac{p_2^2}{4p_1}$ dan zijn ze respectievelijk $-\frac{1}{2}y^{1/2}p_1^{-3/2}$, 0 en $\frac{1}{2}y^{-1/2}p_1^{-1/2}$. Je constateert hiermee dus dat elk van deze drie partiële afgeleiden continu is "over de vork heen" (net als v zelf overigens). Bijvoorbeeld voor v_{p_1} is $-\frac{p_2}{4p_1^2}$, de waarde in de bovenvork, voor de grenswaarde $y = \frac{p_2^2}{4p_1}$ precies gelijk aan de waarde $-\frac{1}{2}y^{1/2}p_1^{-3/2} = -\frac{1}{2}\frac{p_2}{2\sqrt{p_1}}p_1^{-3/2}$ in de ondervork van v_{p_1}, etc. Uit een bekende stelling[2] volgt daarom dat v (continu) differentiëerbaar is op $\mathbb{R}^3_{++}$.

Daarom geeft toepassing van Roy in het geval $y \geq \frac{p_2^2}{4p_1}$ dat voor alle p_1, p_2 en $y > 0$

$$x_1^* = -v_{p_1}/v_y = \frac{p_2}{4p_1^2}/\frac{1}{p_2} = \frac{p_2^2}{4p_1^2} \text{ en } x_2^* = -v_{p_2}/v_y = \frac{y}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1}.$$

Dus dat klopt met (2). En net zo klopt het in het geval $y < \frac{p_2^2}{4p_1}$, want dan

$$x_1^* = -v_{p_1}/v_y = \frac{y}{p_1} \text{ en } x_2^* = -v_{p_2}/v_y = 0.$$

Dus ook dat klopt met (2).

e. Merk allereerst op dat $u(X)$ hier gelijk is aan $\mathbb{R}_+$. Zet $\eta := e(p_1,p_2,v)$. Dan moet de dualiteitsrelatie $v(p_1,p_2,\eta) = v$ gelden. Deze geeft

$$v = \begin{cases} \frac{\eta}{p_2} + \frac{p_2}{4p_1} & \text{als } \eta \geq \frac{p_2^2}{4p_1}, \\ \sqrt{\eta/p_1} & \text{als } \eta < \frac{p_2^2}{4p_1} \end{cases}$$

De oplossing η van de bovenste vork is $\eta = p_2 v - \frac{p_2^2}{4p_1}$, mits $\eta \geq \frac{p_2^2}{4p_1}$, d.w.z. mits $p_2 v - \frac{p_2^2}{4p_1} \geq \frac{p_2^2}{4p_1}$, dus mits $v \leq \frac{p_2}{2p_1}$. De oplossing η van de onderste vork is $\eta = p_1 v^2$, mits $\eta < \frac{p_2^2}{4p_1}$, d.w.z. mits $p_1 v^2 < \frac{p_2^2}{4p_1}$, dus mits $v < \frac{p_2}{2p_1}$. Dit stemt overeen met de gegeven uitdrukking voor $e(p_1,p_2,v)$.

f. Door partiëel te differentiëren in de gegeven uitdrukking voor $e(p_1,p_2,v)$ krijg je:

$$e_{p_1}(p_1,p_2,v) = \begin{cases} \frac{p_2^2}{4p_1^2} & \text{als } v \geq \frac{p_2}{2p_1}, \\ v^2 & \text{als } v < \frac{p_2}{2p_1} \end{cases} \quad \text{en } e_{p_2}(p_1,p_2,v) = \begin{cases} -\frac{p_2}{2p_1} + v & \text{als } v \geq \frac{p_2}{2p_1}. \\ 0 & \text{als } v < \frac{p_2}{2p_1} \end{cases}$$

Voor vaste $v \geq 0$ zijn deze partiële afgeleiden continu op $\mathbb{R}^2_{++}$, ook "over de vork heen"! (want $\frac{p_2^2}{4p_1^2} = v^2$ en $-\frac{p_2}{2p_1} + v = 0$ gelden als $v = \frac{p_2}{2p_1}$). Dus $e(\cdot,\cdot,v)$ is (continu) differentieerbaar in

[1] Merk op: zulke differentieerbaarheid "over de vork heen" geldt in veel gevallen, waaronder het bekende geval van de Leontiev nutsfunctie, juist *niet*.

[2] Dit is Theorem 9 op p. 113 in de International Edition (2012) van "Vector Calculus" door Marsden-Tromba.

elk punt (p_1, p_2) van $\mathbb{R}^2_{++}$. **Alleen door deze controle van de differentieerbaarheid kun je waarborgen de condities waaronder de identiteit van Shephard een zinvolle Hicksiaanse vraagbundel oplevert, o.m. ook geldig zijn voor het grensgeval $\frac{p_2}{2p_1} = v$!** Zie ook het commentaar bij onderdeel d en de voetnoten 1 en 2; hier geldt dit argument nog iets krachtiger, omdat $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v)$ nog niet bekend is. M.b.v. de identiteit van Shephard volgt zo dus voor de Hicksiaanse vraag van de consument:

$$\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = \begin{cases} (\frac{p_2^2}{4p_1^2}, -\frac{p_2}{2p_1} + v) & \text{als } v \geq \frac{p_2}{2p_1}, \\ (v^2, 0) & \text{als } v < \frac{p_2}{2p_1}. \end{cases}$$

g. Allereerst merk je – nogmaals – opdat hier geldt $u(X) = \mathbb{R}_+$. Het geval $v = 0$ kun je apart afhandelen, want dat geeft eenvoudigweg $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = (0, 0)$. Van nu af aan geldt dus $v > 0$. Toepassing van de oplossingsmethode geeft het volgende.

Stap 0. u is evident continu.

Stap 1(a). Omdat u aleen voor $x_1 = 0$ niet-differentieerbaar is levert deze stap hoogstens dezelfde kandidaat $(0, v)$ op als stap $1(c)$.

Stap 1(b). Je moet alle oplossingen in X bepalen van $\frac{u_{x_1}}{p_1} = \frac{u_{x_2}}{p_2}$ (m.a.w. van $\frac{1}{2}x_1^{-1/2} = \frac{p_1}{p_2}$) en de efficiëntie-vergelijking $\sqrt{x_1} + x_2 = v$. Eerstgenoemde vergelijking geeft direct $x_1 = \frac{p_2^2}{4p_1^2}$ en dan volgt uit laatgenoemde $x_2 = v - \frac{p_2}{2p_1}$. Echter, dit levert **alleen** $(\frac{p_2^2}{4p_1^2}, v - \frac{p_2}{2p_1})$ als kandidaat op indien $v \geq \frac{p_2}{2p_1}$, want uiteraard moet elke kandidaat wel in X liggen!

Stap 1(c). Voor $x_2 = 0$ geeft de efficiëntie-vergelijking $x_1 = v^2$ en voor $x_1 = 0$ krijg je zo $x_2 = v$. Deze stap levert dus de bundels $(v^2, 0)$ en $(0, v)$ op.

Stap 2. Als $v \geq \frac{p_2}{2p_1}$ bestaat C uit de drie bundels $(\frac{p_2^2}{4p_1^2}, v - \frac{p_2}{2p_1})$, $(v^2, 0)$ en $(0, v)$ en als $v < \frac{p_2}{2p_1}$ bestaat C alleen uit laatstgenoemde twee. Merk op dat voor $v = \frac{p_2}{2p_1}$ de twee eerstgenoemde bundels samenvallen. Daarom is het verstandig om achtereenvolgens de volgende drie gevallen apart te bekijken:

Geval 1: $v > \frac{p_2}{2p_1}$. Er geldt dat $p_1 \frac{p_2^2}{4p_1^2} + p_2(v - \frac{p_2}{2p_1}) = p_2 v - \frac{p_2^2}{4p_1}$ duidelijk strikt kleiner dan $p_1 * 0 + p_2 v$ en ook strikt kleiner dan $p_1 v^2$; dit laatste volgt uit $p_1 v^2 > p_1 \frac{p_2^2}{4p_1^2} > p_2 v - \frac{p_2^2}{4p_1}$ (of uit $p_1 v^2 - p_2 v + \frac{p_2^2}{4p_1} = p_1(v - \frac{p_2}{2p_1})^2 > 0$ tenzij $v = \frac{p_2}{2p_1}$, wat in dit geval onmogelijk is). Dus in het huidige geval is $(\frac{p_2^2}{4p_1^2}, v - \frac{p_2}{2p_1})$ de unieke optimale bundel.

Geval 2: $v = \frac{p_2}{2p_1}$. Analoog aan het vorige geval volgt dat $(\frac{p_2^2}{4p_1^2}, v - \frac{p_2}{2p_1}) = (v^2, 0)$ de unieke optimale bundel is.

Geval 3: $v < \frac{p_2}{2p_1}$. Er geldt nu $p_1 v^2 < p_1 \frac{p_2}{2p_1} v = \frac{p_2}{2} v < p_2 v$. Dus in dit geval is $(v^2, 0)$ de unieke optimale bundel.

Als je deze drie gevallen samenvoegt, krijg je precies de Hicksiaanse bundel van onderdeel f terug.