Herkansing Microeconomie, 24-8-2011, 9-12 u.

Opgave 1 [45 pt.] Beschouw een consument wiens preferenties kunnen worden weergegeven door de nutsfunctie $u(x_1, x_2) := \min(x_1, 2x_2) + \max(x_1, x_2)$ op $X := \mathbb{R}^2_+$.
a. Teken in een figuur de indifferentiecurve $\{(x_1, x_2) \in X : u(x_1, x_2) = 1\}$. Bepaal ook de coördinaten van elk punt waar deze curve een "knik" maakt.
b. Los het nutsmaximalisatieprobleem $(\mathbb{U}_2)$ op voor algemene prijzen $p_1, p_2 > 0$ en inkomen $y \geq 0$. Doe dit met de UMP oplosmethode (= UMP solution method). Controleer je uitkomst $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(p_1, p_2, y)$ op de volgende eigenschappen: (i) $\forall_{t>0}\mathbf{x}(tp_1, tp_2, ty) = \mathbf{x}(p_1, p_2, y)$, (ii) $\mathbf{x}(p_1, p_2, 0) = (0, 0)$.
c. Verklaar de uitkomst in onderdeel b grafisch, door in één of meerdere figuren de budgetverzameling en wat representatieve indifferentiecurves te tekenen.
d. Bepaal de indirecte nutsfunctie $v(p_1, p_2, y)$ voor deze consument. In welke punten (p_1, p_2, y) is de identiteit van Roy geldig in deze situatie? Verifieer in die punten de identiteit van Roy expliciet.
e. Bepaal op grafische wijze de Hicksiaanse vraagfunctie voor deze consument.
f. Bepaal de uitgavenfunctie $e(p_1, p_2, v)$ van dit probleem op basis van je uitkomst in onderdeel e.
g. Laat door expliciete controle zien: de identiteit van Shephard is geldig in alle punten waar de functie e differentieerbaar is. Welke punten zijn dat precies?
h. Controleer expliciet in welke punten (p_1, p_2, y) de identiteit $e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, y)) = y$ hier geldig is.

Oplossing. a. Voor $v \in u(X) = \mathbb{R}_+$ noteer je de bijbehorende niveau-verzameling $\{(x_1, x_2) \in X : u(x_1, x_2) = v\}$ als $\{u = v\}$. Gevraagd is eigenlijk alleen een plaatje van $\{u = 1\}$, maar voor straks is het handig om deze vraag iets algemener af te handelen. Je bekijkt uiteraard alleen de niet-triviale situatie $v > 0$. De lijnen $x_2 = x_1$ en $x_2 = x_1/2$ delen X op in drie open verzamelingen S_1, S_2 en S_3, zoals getekend in figuur 1. Op S_1 geldt $x_1 < x_2 < 2x_2$, dus daar is $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Gevolg: $S_1 \cap \{u = v\}$ is het getekende open lijnsegment $x_2 = v - x_1$. De "knik" met het volgende segment vindt plaats in het punt $(v/2, v/2)$. Net zo is $S_2 \cap \{u = v\}$ het getekende open lijnsegment tussen $(v/2, v/2)$ en $(v/2, v/4)$, omdat op S_2 geldt $x_2 < x_1 < 2x_2$ en dus $u(x_1, x_2) = 2x_1$. Tenslotte is $S_3 \cap \{u = v\}$ het getekende open lijnsegment tussen $(v/2, v/4)$ en $(v, 0)$, omdat op S_3 geldt $x_2 < 2x_2 < x_1$ en dus $u(x_1, x_2) = 2x_2 + x_1$. In de onderstaande figuur is ook alvast de gestippelde lijn door de punten $(0, v)$ en $(v/2, v/4)$ getekend; deze snijdt de horizontale as in het ook getekende punt $(2v/3, 0)$.

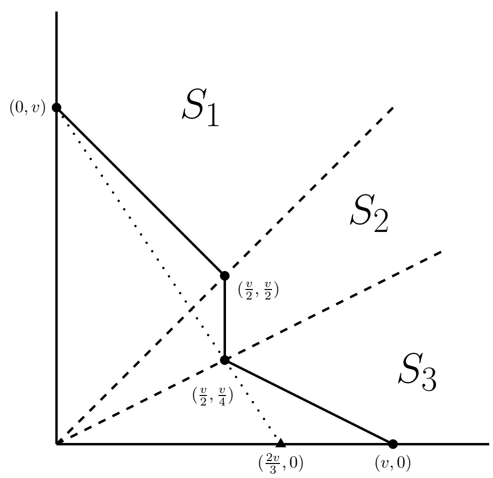

Figure 1: Plot van de indifferentiecurve $u^{-1}(v)$

b. Toepassing van de UMP-oplosmethode (versie 1) geeft het volgende. STAP 0: u is strikt stijgend, want evident is $\min(x_1', 2x_2') > \min(x_1, 2x_2)$ en $\max(x_1', x_2') > \max(x_1, x_2)$ als $x_1' > x_1$ en $x_2' > x_2$. Ook is u evident continu. We stellen nu in $B^0_{p_1,p_2,y} := \{(x_1, x_2) \in X : p_1x_1 + p_2x_2 = y\}$ de kandidaten-verzameling C op:

STAP 1A: u is niet-differentieerbaar op de lijnen $x_2 = x_1$ en $x_2 = x_1/2$. Gevolg: de twee doorsneden van deze lijnen met $B^0_{p_1,p_2,y}$ in X leveren automatisch twee punten voor de kandidaten-verzameling C, namelijk $\bar{\mathbf{x}} := (\frac{y}{p_1+p_2}, \frac{y}{p_1+p_2})$ en $\tilde{\mathbf{x}} := (\frac{2y}{2p_1+p_2}, \frac{y}{2p_1+p_2})$.

STAP 1B: (i) Op de open verzameling S_1 geeft $u_{x_1}/p_1 = u_{x_2}/p_2$ slechts $p_1 = p_2$. Dus als $p_1 = p_2$ dan $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_1 \subset C$, maar als $p_1 \neq p_2$ dan draagt S_1 niet bij tot C. (ii) Op de open verzameling S_2 geeft $u_{x_1}/p_1 = u_{x_2}/p_2$ de tegenstrijdigheid $2/p_1 = 0$, dus onder geen enkele omstandigheid draagt S_2 bij tot C. (iii) Op de open verzameling S_3 geeft $u_{x_1}/p_1 = u_{x_2}/p_2$ slechts $2p_1 = p_2$. Dus als $p_2 = 2p_1$ dan $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_3 \subset C$, maar als $p_2 \neq 2p_1$ dan draagt S_3 niet bij tot C.

STAP 1C: De hoekpunten $(y/p_1, 0)$ en $(0, y/p_2)$ worden automatisch aan C toegekend.

STAP 2: Eerst kijk je naar de situatie met $p_1 \neq p_2$ en $p_2 \neq 2p_1$. Je kunt stellen $y > 0$, want de situatie $y = 0$ is triviaal. Dan bestaat C uit slechts vier punten: $\bar{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{x}}$, $(y/p_1, 0)$ en $(0, y/p_2)$. Hun respectieve u-waarden zijn $2y/(p_1 + p_2)$, $4y/(2p_1 + p_2)$, y/p_1 en y/p_2. Omdat $u(\tilde{\mathbf{x}}) > u(\bar{\mathbf{x}})$ voor alle $p_1, p_2 > 0$, kan vanaf nu het punt $\bar{\mathbf{x}}$ buiten beschouwing worden gelaten. Wegens $y/p_1 < y/p_2 \Leftrightarrow p_1 > p_2$ kun je beginnen met de volgende opsplitsing.

Geval 1: $p_1 > p_2$ (dan zijn $p_1 \neq p_2$ en $p_2 \neq 2p_1$ verzekerd). In dit geval blijven de twee punten $\tilde{\mathbf{x}}$ en $(0, y/p_2)$ over. Je moet dus $u(0, y/p_2) = y/p_2$ vergelijken met $u(\tilde{\mathbf{x}}) = 4y/(2p_1 + p_2)$. Wegens $\frac{4y}{2p_1+p_2} > y/p_2 \Leftrightarrow p_2 > \frac{2}{3}p_1$ leidt dit tot opsplitsing in de volgende drie gevallen:

Geval 1a: $p_1 > p_2 > \frac{2}{3}p_1$. Dan geldt $u(\tilde{\mathbf{x}}) > u(0, y/p_2) > u(y/p_1, 0)$, dus $\tilde{\mathbf{x}}$ is het unieke globale maximum van $(\mathbb{U}_2)$.

Geval 1b: $p_2 = \frac{2}{3}p_1$. Dan geldt $u(\tilde{\mathbf{x}}) = u(0, y/p_2) > u(y/p_1, 0)$, dus $\tilde{\mathbf{x}}$ en $(0, y/p_2)$ zijn beide globale maxima van $(\mathbb{U}_2)$ (en de enige).

Geval 1c: $p_2 < \frac{2}{3}p_1 < p_1$. Dan geldt $u(0, y/p_2) > u(\tilde{\mathbf{x}}) > u(y/p_1, 0)$, dus $(0, y/p_2)$ is het unieke globale maximum van $(\mathbb{U}_2)$.

Geval 2: $p_1 < p_2$ en $p_2 \neq 2p_1$. In dit geval blijven de twee punten $\tilde{\mathbf{x}}$ en $(y/p_1, 0)$ over. Je moet dus $u(y/p_1, 0) = y/p_1$ vergelijken met $u(\tilde{\mathbf{x}} = 4y/(2p_1 + p_2)$. Wegens $\frac{4y}{2p_1+p_2} > y/p_1 \Leftrightarrow 2p_1 > p_2$ leidt dit tot de volgende opsplitsing:

Geval 2a: $p_1 < p_2 < 2p_1$. Dan geldt $u(\tilde{\mathbf{x}}) > u(y/p_1, 0)$, dus $\tilde{\mathbf{x}}$ is het unieke globale maximum van $(\mathbb{U}_2)$.

Geval 2b: $p_2 > 2p_1$. Dan geldt $u(\tilde{\mathbf{x}}) < u(y/p_1, 0)$, dus $(y/p_1, 0)$ is het unieke globale maximum van $(\mathbb{U}_2)$.

Geval 3: $p_2 = 2p_1 > p_1$. In dit geval bevat C niet alleen $\tilde{\mathbf{x}}$, $(y/p_1, 0)$, $(0, y/p_2)$ (en de al eerder geëlimineerde bundel $\bar{\mathbf{x}}$), maar ook het open lijnsegment $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_3$ (zie stap 1b(iii)), waarop geldt $u(x_1, x_2) = 2x_2 + x_1$ volgens deel a boven. Omdat op $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_3$ de budgetvergelijking luidt $p_1x_1 + 2p_1x_2 = y$, volgt dat op $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_3$ de functie u constant en gelijk is aan y/p_1. Wegens $u(0, y/p_2) < u(y/p_1, 0) = y/p_1 = 4y/(2p_1 + 2p_1) = u(\tilde{\mathbf{x}})$ is de conclusie van stap 2 in geval 3 dat de verzameling van alle globale maxima van $(\mathbb{U}_2)$ gevormd wordt door het gesloten lijnsegment $\{(x_1, -\frac{x_1}{2} + \frac{y}{2p_1}) : \frac{y}{2p_1} \leq x_1 \leq \frac{y}{p_1}\}$ dat de punten $\tilde{\mathbf{x}}$ en $(y/p_1, 0)$ met elkaar verbindt.

Geval 4: $p_1 = p_2$. In dit geval bevat C niet alleen $\tilde{\mathbf{x}}$, $(y/p_1, 0)$, $(0, y/p_2)$ (en de al eerder geëlimineerde bundel $\bar{\mathbf{x}}$), maar ook het open lijnsegment $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_1$ (zie stap 1b(i)), waarop geldt $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ volgens deel a boven. Omdat op $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_1$ de budgetvergelijking luidt $p_1x_1 + p_1x_2 = y$, volgt dat op $B^0_{p_1,p_2,y} \cap S_1$ de functie u constant en gelijk is aan y/p_1. Wegens $u(0, y/p_2) = u(y/p_1, 0) = y/p_1 < 4y/(2p_1 + p_1) = u(\tilde{\mathbf{x}})$ is de conclusie van stap 2 in geval 4 dat $\tilde{\mathbf{x}}$ het unieke globale maximum is van $(\mathbb{U}_2)$.

Hiermee zijn alle mogelijkheden voor p_1 en p_2 uitgeput. De in gevallen 1-4 verkregen resultaten kunnen alsvolgt worden samengevoegd:

relatie tussen prijzen	Marshalliaanse vraag(verzameling)	afbeelding
$p_2 > 2p_1$	$(\frac{y}{p_1}, 0)$	fig. 2, links
$p_2 = 2p_1$	$\{(x_1, -\frac{x_1}{2} + \frac{y}{2p_1}) : \frac{y}{2p_1} \leq x_1 \leq \frac{y}{p_1}\}$	fig. 2, rechts
$\frac{2}{3}p_1 < p_2 < 2p_1$	$(\frac{2y}{2p_1+p_2}, \frac{y}{2p_1+p_2})$	fig. 3, links
$p_2 = \frac{2}{3}p_1$	$(\frac{3y}{4p_1}, \frac{3y}{8p_1})$ en $(0, \frac{y}{p_2})$	fig. 3, midden
$p_2 < \frac{2}{3}p_1$	$(0, \frac{y}{p_2})$	fig. 3, rechts

De twee gevraagde eigenschappen van deze Marshalliaanse vraag zijn hieruit direct af te lezen.

c. De twee plaatjes die corresponderen met de eerste twee regels in bovenstaande tabel zijn alsvolgt:

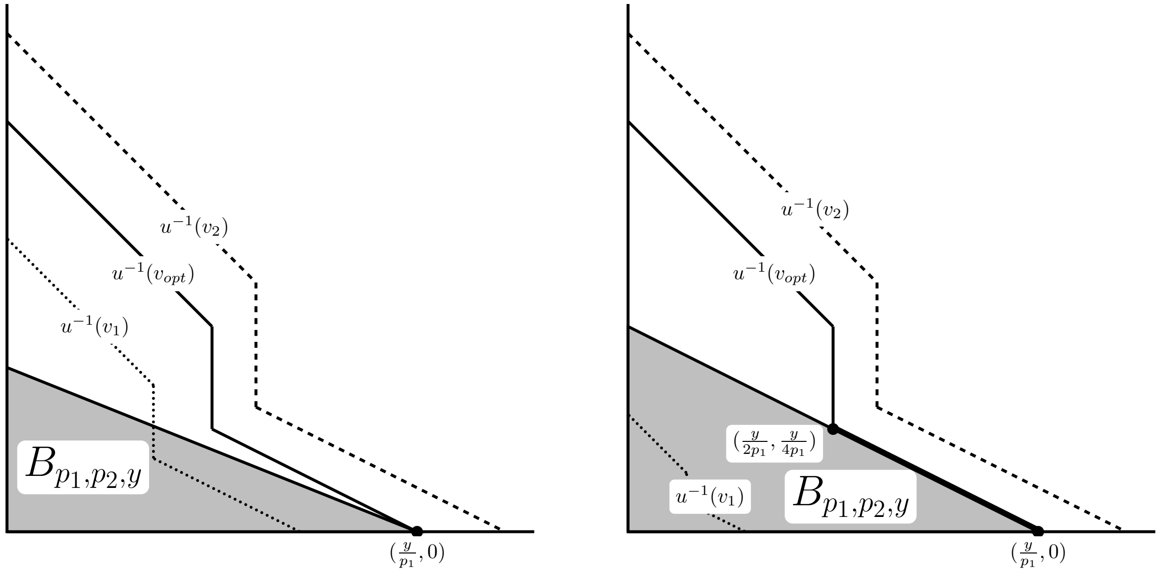

Figure 2: Plaatjes behorend bij regels 1-2 van de eerste tabel

In elk plaatje is de budgetverzameling grijs afgebeeld en de drie getekende indifferentiecurves corresponderen telkens met $v_2 > v_{opt} := v(p_1, p_2, y) > v_1$, zodat het niveau v_1 (gestippelde curve) sub-optimaal is en v_2 (gestreepte curve) onbereikbaar. De doorsnede van $u^{-1}(v_{opt}) := \{(x_1, x_2) \in X : u(x_1, x_2) = v_{opt}$ met de budgetverzameling vormt telkens de verzameling van alle globale maxima van $(\mathbb{U}_2)$. De plaatjes die corresponderen met de laatste drie regels van die tabel zijn op dezelfde manier tot stand gekomen:

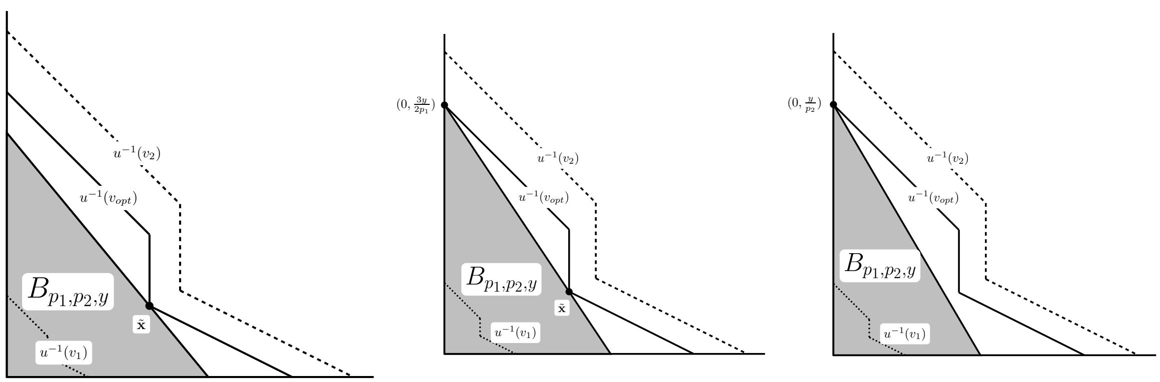

Figure 3: Plaatjes behorend bij regels 3-5 van de eerste tabel

d. De bovenstaande tabel voor de Marshalliaanse vraag leidt direct, door berekening van de bijbehorende u-waarden, tot de volgende tabel met de waarden van de indirecte nutsfunctie $v(p_1, p_2, y)$:

relatie tussen prijzen	waarde $v(p_1, p_2, y)$ van indirecte nutsfunctie
$p_1 < \frac{p_2}{2}$	$\frac{y}{p_1}$
$p_1 = \frac{p_2}{2}$	$\frac{y}{p_1}$
$\frac{p_2}{2} < p_1 < \frac{3}{2}p_2$	$\frac{4y}{2p_1+p_2}$
$p_1 = \frac{3}{2}p_2$	$\frac{y}{p_2}$
$p_1 > \frac{3}{2}p_2$	$\frac{y}{p_2}$

Voor $p_1 = \frac{p_2}{2}$ en $p_1 = \frac{3}{2}p_2$ is de functie v niet differentieerbaar (want niet eens partieel differentieerbaar). De identiteit van Roy moet dus alleen worden gecontroleerd in de volgende situaties die overeenkomen met de regels 1, 3 en 5 van de twee tabellen.

Controle regel 1: $-v_{p_1}/v_y = \frac{y}{p_1^2}/\frac{1}{p_1} = \frac{y}{p_1}$ en $-v_{p_2}/v_y = 0$. Volgens regel 1 in de eerste tabel klopt dit.

Controle regel 3: $-v_{p_1}/v_y = \frac{8y}{(2p_1+p_2)^2}/\frac{4}{2p_1+p_2} = \frac{2y}{2p_1+p_2}$ en $-v_{p_2}/v_y = \frac{4y}{(2p_1+p_2)^2}/\frac{4}{2p_1+p_2} = \frac{y}{2p_1+p_2}$. Volgens regel 3 in de eerste tabel klopt dit.

Controle regel 5: $-v_{p_1}/v_y = 0$ en $-v_{p_2}/v_y = \frac{y}{p_2^2}/\frac{1}{p_2} = \frac{y}{p_2}$. Volgens regel 5 in de eerste tabel klopt dit.

e. Al in figuur 1 kun je de algemene verzameling L_v aflezen. Die wordt namelijk gevormd door het gebied ten "noordoosten" van de in figuur 1 getekende indifferentiecurve. Voor $p_1, p_2 > 0$ kun je de bijbehorende kostenfunctie op X definiëren als $\ell_{p_1,p_2}(x_1, x_2) := p_1x_1 + p_2x_2$. Het bij $v \in u(X) = \mathbb{R}_+$ behorende uitgavenminimalisatieprobleem EMP bestaat uit het vinden van het laagste niveau $e \in \mathbb{R}$ waarvoor de intersectie $\ell^{-1}_{p_1,p_2}(e) \cap L_v$ niet-leeg is; als dat laagste niveau wordt aangeduid met $e_{opt} := e(p_1, p_2, v)$, vormt de bijbehorende intersectie $\ell^{-1}_{p_1,p_2}(e_{opt}) \cap L_v$ de Hicksiaanse vraagverzameling. In de figuur komt dit overeen met het naar het "zuidwesten" schuiven van de generieke niveaulijn (welke richtingscoëfficient $-p_1/p_2$ heeft) van de kostenfunctie ℓ_{p_1,p_2}. Als je dit zover mogelijk naar het zuidwesten schuiven in figuur 1 voor alle mogelijke $p_1, p_2 > 0$ uitvoert, dan ontstaat het volgende schema (kies $v \neq 0$ om trivialiteiten te vermijden):

relatie tussen prijzen	Hicksiaanse vraag(verzameling)	afbeelding
$p_2 > 2p_1$	$(v, 0)$	fig. 4, links
$p_2 = 2p_1$	$\{(x_1, -\frac{x_1}{2} + \frac{v}{2}) : \frac{v}{2} \leq x_1 \leq v\}$	fig. 4, rechts
$\frac{2}{3}p_1 < p_2 < 2p_1$	$(\frac{v}{2}, \frac{v}{4})$	fig. 5, links
$p_2 = \frac{2}{3}p_1$	$(\frac{v}{2}, \frac{v}{4})$ en $(0, v)$	fig. 5, midden
$p_2 < \frac{2}{3}p_1$	$(0, v)$	fig. 5, rechts

De vijf regels van deze derde tabel ontstaan door de volgende analyse.

Regel 1. Eerst kun je kijken naar $(\mathbb{E}_2)$ in de situatie dat p_2 zo hoog is t.o.v. p_1 dat de hoekoplossing $(v, 0)$ in $L_v := u^{-1}([v, +\infty))$ de unieke Hicksiaanse vraag vormt. Wanneer treedt deze situatie op? Omdat het lijnsegment tussen $(v/2, v/4)$ en $(v, 0)$ een helling (= richtingscoëfficient) van $-1/2$ heeft, kan deze situatie alleen optreden als $-p_1/p_2 > -1/2$, d.w.z. als $p_2 > 2p_1$. Zie de linkerhelft van figuur 4, waar niveau $e_{opt} := e(p_1, p_2, v) = p_1v$ het optimale uitgaven-niveau is. De bijbehorende niveaulijn $\ell p_1, p_2{}^{-1}(e_{opt})$ gaat door het hoekpunt $(v, 0)$ van L_v. Ter vergelijking zijn in diezelfde linkerhelft nog twee andere niveaulijnen getekend met niveaus $e_1 > e_{opt} := e(p_1, p_2, v) > e_2$. De gestippelde niveaulijn $\ell p_1, p_2{}^{-1}(e_1)$ heeft een sub-optimaal (want te hoog) niveau e_1 en de gestreepte niveaulijn $\ell p_1, p_2{}^{-1}(e_2)$ heeft een onbereikbaar (want te laag) niveau e_2.

Regel 2: Een overgangssituatie onstaat als je $p_2 = 2p_1$ neemt en weer met de niveaulijnen van $\ell_{p_1,2p_1}$ gaat schuiven zoals boven beschreven. Zie de rechterhelft van figuur 4, waarin *alle* punten in het gesloten lijnsegment tussen de punten $(\frac{v}{2}, \frac{v}{4})$ en $(v, 0)$ globale minima voor $(\mathbb{E}_2)$ voorstellen. Ter vergelijking zijn in ook in die rechterhelft nog twee andere niveaulijnen getekend: weer heeft de gestippelde lijn $\ell^{-1}_{p_1,p_2}(e_1)$ een sub-optimaal niveau e_1 (te hoog) en de gestreepte lijn $\ell^{-1}_{p_1,p_2}(e_2)$ een onbereikbaar niveau e_2 (te laag).

Regels 3, 4, 5: Hierna ontstaan achtereenvolgens de situaties van regels 3, 4 en 5 in de derde tabel, zoals getekend in figuur 5 (respectievelijk links, midden en rechts). Dezelfde conventies $e_1 > e_{opt} > e_2$ als boven zijn gebruikt voor de gestippelde en gestreepte niveaulijnen van ℓ_{p_1,p_2}. Merk op dat kenmerken van de overgangssituatie in regel 4 al kunnen worden afgelezen uit de stippellijn in figuur 1.

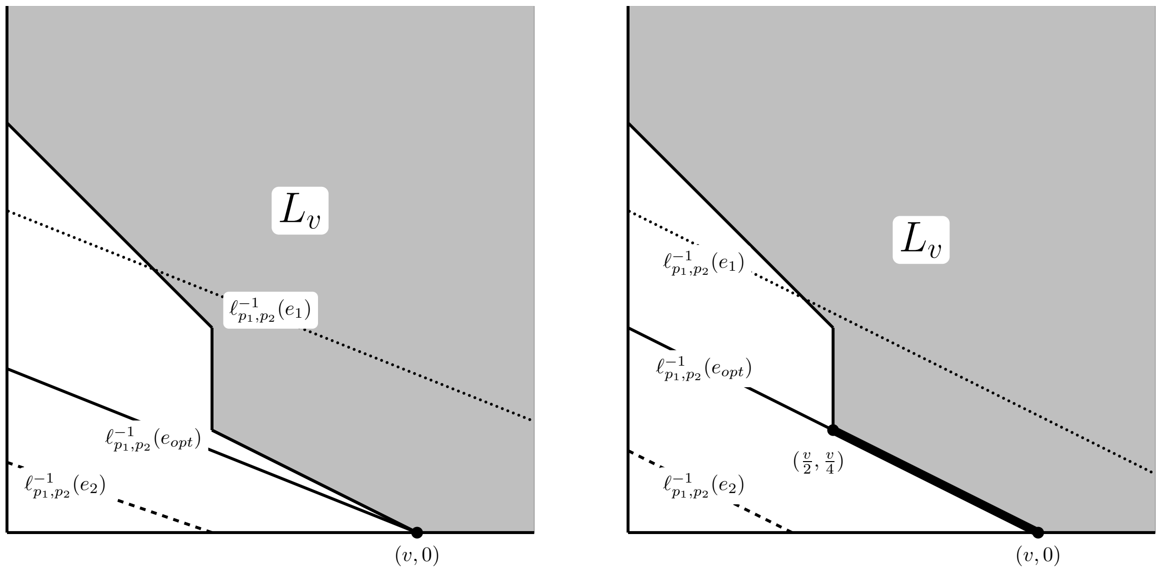

Figure 4: Plaatjes behorend bij regels 1-2 van de derde tabel

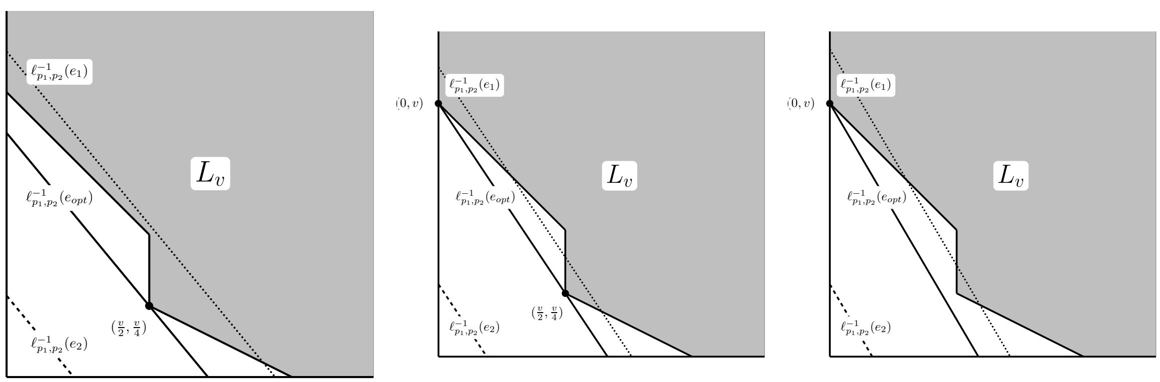

Figure 5: Plaatjes behorend bij regels 3-5 van de derde tabel

f. De bovenstaande tabel voor de Hicksiaanse vraag leidt direct, door berekening van de bijbehorende ℓ_{p_1,p_2}-waarden, tot de volgende tabel met de waarden van de uitgavenfunctie $e(p_1, p_2, v)$:

relatie tussen prijzen	waarde uitgavenfunctie
$p_1 < \frac{p_2}{2}$	$p_1 v$
$p_1 = \frac{p_2}{2}$	$p_1 v$
$\frac{p_2}{2} < p_1 < \frac{3}{2}p_2$	$\frac{v}{4}(2p_1 + p_2)$
$p_1 = \frac{3}{2}p_2$	$p_2 v$
$p_1 > \frac{3}{2}p_2$	$p_2 v$

g. Voor $p_1 = \frac{p_2}{2}$ en $p_1 = \frac{3}{2}p_2$ is de functie e niet differentieerbaar (want niet eens partieel differentieerbaar). De identiteit van Shephard moet dus alleen worden gecontroleerd in de volgende situaties die overeenkomen met de regels 1, 3 en 5 van de twee tabellen.

Controle regel 1: $e_{p_1} = v$ en $e_{p_2} = 0$. Volgens regel 1 in de vierde tabel klopt dit.
Controle regel 3: $e_{p_1} = v/2$ en $e_{p_2} = v/4$. Volgens regel 3 in de vierde tabel klopt dit.
Controle regel 5: $e_{p_1} = 0$ en $e_{p_2} = v$. Volgens regel 5 in de vierde tabel klopt dit.

h. Combinatie van de laatste tabel met de tweede tabel levert de volgende resultaten:
Regels 1,2: $p_1 v(p_1, p_2, y) = p_1 \frac{y}{p_1} = y$. Klopt.
Regel 3: $\frac{v(p_1,p_2,y)}{4}(2p_1 + p_2) = \frac{y}{2p_1+p_2}(2p_1 + p_2) = y$. Klopt.
Regels 4,5: $p_2 v(p_1, p_2, y) = p_2 \frac{y}{p_2} = y$. Klopt.
Dus de identiteit $e(p_1, p_2, v(p_1, p_2, y)) = y$ geldt in alle punten.

Opgave 2 [25 pt.] Beschouw een consument wiens preferenties kunnen worden weergegeven door de continue nutsfunctie $u : X \to \mathbb{R}$ met $X := \mathbb{R}^n_+$.
a. Beschouw de volgende eigenschap voor u: $\forall_{\mathbf{x}\in X}\forall_{\epsilon>0}\exists_{\mathbf{x}'\in X,\|\mathbf{x}'-\mathbf{x}\|<\epsilon} u(\mathbf{x}') > u(\mathbf{x})$. Toon aan: (i) als u strikt stijgend is, dan heeft u bovenstaande eigenschap, (ii) er zijn functies u met bovenstaande eigenschap en die functies zijn niet strikt stijgend (een expliciet voorbeeld van één zo'n functie is al genoeg), (iii) als u bovenstaande eigenschap heeft dan is elk globale maximum oplossing $\mathbf{x}^*$ van het UMP ($\mathbb{U}_n$) budget-gebalanceerd (met andere woorden, dan $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* = y$).
b. Zij $e : \mathbb{R}^n_{++} \times u(X) \to \mathbb{R}$ de gebruikelijke bijbehorende uitgavenfunctie. Bewijs: $e(\mathbf{p}, v') > e(\mathbf{p}, v)$ geldt voor alle $v, v' \in u(X)$ met $v' > v$.

Oplossing. a. (i) Laten $\mathbf{x} \in X$ en $\epsilon > 0$ willekeurig gekozen zijn. Dan geldt voor $\mathbf{x}' := \mathbf{x} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}\mathbf{e}$ dat $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ tot $\mathbb{R}^n_{++}$ behoort, zodat geldt $u(\mathbf{x}') > u(\mathbf{x})$ wegens het strikte stijgen van u. Tegelijk geldt ook $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| = \|\frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}\mathbf{e}\| = \frac{\epsilon}{2}$. Hier is $\mathbf{e} := (1, \ldots, 1)$, net zoals in de syllabus.

a. (ii). Beschouw $u(x_1, x_2) := x_1 - x_2$ op $X := \mathbb{R}^2_+$. Deze functie is duidelijk niet strikt stijgend (bijvoorbeeld omdat $u(1, 2) \not> u(1/2, 1)$). Echter, als $(x_1, x_2) \in X$ en $\epsilon > 0$ willekeurig gekozen zijn, dan geldt $u(x_1', x_2') > u(x_1, x_2)$ voor $x_1' := x_1 + \frac{\epsilon}{2}$ en $x_2' := x_2$. Dus u heeft wel de bewuste eigenschap.

a. (iii). Zij $\mathbf{x}^*$ een globale maximum oplossing van het UMP. Stel dat deze *niet* budget-gebalanceerd zou zijn. Dan zou gelden $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* < y$. Omdat $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ een continue functie is, heeft dit als gevolg: er is een $\epsilon > 0$ zo dat $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' < y$ voor elke $\mathbf{x}' \in X$ met $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$. Voor diezelfde ϵ geeft de gegeven eigenschap nu het bestaan van een $\mathbf{x}' \in X$, met $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ (waardoor $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' < y$ volgt uit de vorige regel!) en $u(\mathbf{x}') > u(\mathbf{x}^*)$. Omdat $\mathbf{x}' \in B_{\mathbf{p},y}$ volgt uit het voorgaande, geeft deze ongelijkheid tegenspraak met de veronderstelde globale maximaliteit van $\mathbf{x}^*$. Conclusie: een globaal maximum $\mathbf{x}^*$ moet wél budget-gebalanceerd zijn.

b. Het bewijs staat in de syllabus (Proposition 4.1.11.c).

Opgave 3 [30 pt.] Een producent van een bepaalde zoutsoort heeft kostenfunctie $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 2q^2 + q + 1$.
a. Laat zien dat voor het bijbehorende winstmaximalisatieprobleem deze producent voor geen enkele marktprijs overgaat tot de outputbeslissing $q = 0$.
b. Los het winstmaximalisatieprobleem op voor alle mogelijke marktprijzen $p > 0$. *Aanwijzing:* Het is verstandig om een tekenoverzicht te maken van de afgeleide van de te maximaliseren functie.
c. Stel dat deze producent nog 49 collega-producenten heeft, die allen dezelfde zoutsoort fabriceren en dezelfde kostenfunctie $C(q)$ als boven hebben. Stel ook dat er op deze zoutmarkt in totaal 70 consumenten zijn, die allen de nutsfunctie $u^{(k)}(x_1, x_2) = x_1 + \sqrt{2x_2}$, $x_1, x_2 \geq 0$, en rijkdom $y^{(k)} = 154$ hebben, $k = 1, \ldots, 70$. Hierbij is hun goed 1 de bovengenoemde soort zout. Van het andere goed is de prijs bekend, namelijk $p_2 = 5.5$. Bepaal het marktaanbod van het zout en de marktvraag ernaar als functie van de prijs p. Schets in één figuur de marktaanbod- en vraagfuncties S en D en bepaal aan de hand van deze figuur de partiële evenwichtsprijs (eventueel approximatief).

Oplossing. a. Hier geldt $p_{crit} := \min_{q>0} \frac{C(q)-C(0)}{q} = \min_{q>0}[\frac{1}{3}q^2 - 2q + 1] = -2 < 0$. Dus voor elke $p > 0$ is er een $q > 0$ met $\frac{C(q)-C(0)}{q} < p$, d.w.z. met $pq - C(q) > p*0 - C(0)$. De outputbeslissing $q = 0$ is dus echt sub-optimaal voor elke marktprijs p.

b. Het winstmaximalisatie probleem is om $f(q) := pq - \frac{1}{3}q^3 + 2q^2 - q - 1$ te maximaliseren over alle $q \geq 0$. Nu $f'(q) = -q^2 + 4q + p - 1$ en $f'(q) = 0$ heeft wortels $q_+ := 2 + \sqrt{3 + p}$ en $q_- := 2 - \sqrt{3 + p}$. Dus volgt: $f(q)$ daalt strikt op $]-\infty, q_-[$, stijgt strikt op $]q_-, q_+[$ en daalt strikt op $]q_+, \infty[$. Merk op: $q_- < 0 \Leftrightarrow p > 1$.

Geval 1: $p > 1$. Uit de bovenstaande monotoniciteitseigenschappen van f volgt direct dat q_+ het unieke globale maximum is.

Geval 2: $p \leq 1$. Uit de bovenstaande monotoniciteitseigenschappen van f volgt: het globale maximum is of $q = 0$ (randoplossing) of q_+. Wegens onderdeel a volgt dan: q_+ is het unieke globale maximum.

c. Uit het vorige onderdeel volgt dat het marktaanbod gelijk is aan $S(p) := 50(2 + \sqrt{3+p})$. voor de individuele consument bereken je de Marshalliaanse vraag m.b.v. de UMP oplosmethode (concave geval). Uit $\frac{1}{p_1} = \frac{\sqrt{2}x_2^{-1/2}}{2p_2}$ en $p_1x_1 + p_2x_2 = y$ volgen $\bar{x}_2 = \frac{p_1^2}{2p_2^2}$ en $\bar{x}_1 = \frac{y}{p_1} - \frac{p_1}{2p_2}$.

Geval 1: $y \geq \frac{p_1^2}{2p_2}$. Omdat u concaaf is, volgt direct dat $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ het globale maximum is en wegens $u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > u(y/p_1, 0)$ (evident) en $u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > u(0, y/p_2)$ (volgt uit $A^2 + B^2 > 2AB$ voor $A \neq B$) is het ook het unieke globale maximum.

Geval 2: $y < \frac{p_1^2}{2p_2}$. In dit geval volgt dat de hoekoplossing $(0, y/p_2)$ het unieke globale maximum is.

Voor de markvraag $D(p)$ naar goed 1 geeft dit zodoende, wegens de gegevens:

$$D(p) = \begin{cases} 70(\frac{154}{p} - \frac{p}{11}) & \text{als } 154 \geq \frac{p^2}{11} \text{ m.a.w. als } p \leq 11\sqrt{14} \\ 0 & \text{als } 154 < \frac{p^2}{11} \text{ m.a.w. als } p > 11\sqrt{14} \end{cases}$$

Als je alvast aanneemt dat $p \leq \sqrt{1694} = 41.159$, dan volgt dat je de Marshalliaanse vergelijking $50(2 + \sqrt{3+p}) = S(p) = D(p) = 70(\frac{154}{p} - \frac{p}{11})$ moet oplossen. Uit een eerste schets blijkt dan dat de evenwichtsprijs p^* in de buurt van 20 moet liggen. Maar het kan nog preciezer: hier geldt exact $p^* = 22$ vanwege $S(22) = 50 * 7 = 350$ en $D(22) = 70 * (7 - 2) = 350$. Zie figuur 6.

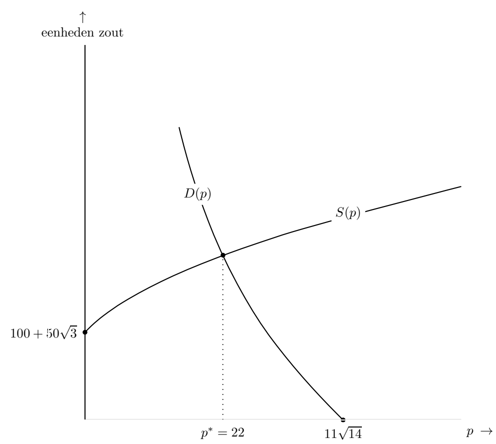

Figure 6: PLOT VAN HET MARSHALLIAANSE "KRUIS": $D(p^*) = S(p^*)$