Uitwerking Tweede Quiz Microeconomie, 25-5-2011

Opgave 1 [35 pt.] Voor de nutsfunctie $u(x_1, x_2) := x_1 + \sqrt{x_2}$ op $\mathbb{R}^2_+$ kan worden afgeleid dat de Marshalliaanse vraagbundel alsvolgt is:

$$\mathbf{x}(p_1, p_2, y) = \begin{cases} (\frac{y}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}, \frac{p_1^2}{4p_2^2}) & \text{als } 4p_2 y \geq p_1^2 \\ (0, \frac{y}{p_2}) & \text{als } 4p_2 y < p_1^2 \end{cases}$$

N.B. Zelf hoef je dit niet meer af te leiden! Bepaal, *uitsluitend met behulp van dualiteitsformules*, de bijbehorende Hicksiaanse vraagbundel.

Voor maximaal 10 extra punten: Verifieer de correctheid van je antwoord door de Hicksiaanse vraagbundel onafhankelijk van bovenstaande af te leiden met behulp van de *EMP solution method* uit het dictaat. *Hint:* $2AB \leq A^2 + B^2$.

Oplossing. De volgende aanpak ligt voor de hand, gezien het gevraagde. *Stap 1:* de indirecte nutsfunctie $v(p_1, p_2, y)$ volgt uit het gegeven en daarmee volgt ook de uitgavenfunctie $e(p_1, p_2, v)$ – die is n.l. de inverse ervan. *Stap 2:* je leidt de Hicksiaanse vraagbundel af uit de dualiteitsrelatie $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = \mathbf{x}(p_1, p_2, e(p_1, p_2, v))$.

Stap 1: Uit het gegeven volgt allereerst

$$v(p_1, p_2, y) = u(\mathbf{x}(p_1, p_2, y)) = \begin{cases} \frac{y}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2} & \text{als } 4p_2 y \geq p_1^2 \\ \sqrt{\frac{y}{p_2}} & \text{als } 4p_2 y < p_1^2 \end{cases}$$

Zij $v \in u(X) = \mathbb{R}_+$. Wegens de dualiteitsrelatie $v(p_1, p_2, e) = v$ die moet gelden voor $e := e(p_1, p_2, v)$ volgt uit bovenstaande uitdrukking dat (1) $\frac{e}{p_1} + \frac{p_1}{4p_2} = v$ als $e \geq \frac{p_1^2}{4p_2}$ en (2) $\sqrt{\frac{e}{p_2}} = v$ als $e < \frac{p_1^2}{4p_2}$. Nu is (1) equivalent met (1′) $e = p_1 v - \frac{p_1^2}{4p_2}$ als $p_1 v - \frac{p_1^2}{4p_2} \geq \frac{p_1^2}{4p_2}$, met andere woorden als $v \geq \frac{p_1}{2p_2}$. Ook is (2) equivalent met $e = p_2 v^2$ als $p_2 v^2 < \frac{p_1^2}{4p_2}$, met andere woorden als $v < \frac{p_1}{2p_2}$. Conclusie:

$$e(p_1, p_2, v) = \begin{cases} p_1 v - \frac{p_1^2}{4p_2} & \text{als } v \geq \frac{p_1}{2p_2} \\ p_2 v^2 & \text{als } v < \frac{p_1}{2p_2} \end{cases}$$

Stap 2: Voor $e := e(p_1, p_2, v)$ moet gelden $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = \mathbf{x}(p_1, p_2, e)$.

a. Als $v \geq \frac{p_1}{2p_2}$ gelden zowel $e = p_1 v - \frac{p_1^2}{4p_2}$ als $\mathbf{x}(p_1, p_2, e) = (\frac{e}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}, \frac{p_1^2}{4p_2^2})$, waarbij de laatste identiteit geldt wegens $4p_2 e \geq p_1^2 \Leftrightarrow 4p_1 p_2 v - p_1^2 \geq p_1^2 \Leftrightarrow v \geq \frac{p_1}{2p_2}$. Uitwerken d.m.v. substitutie van $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = (\frac{e}{p_1} - \frac{p_1}{4p_2}, \frac{p_1^2}{4p_2^2})$ en $e = p_1 v - \frac{p_1^2}{4p_2}$ geeft $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = (v - \frac{p_1}{2p_2}, \frac{p_1^2}{4p_2^2})$. Dus volgt: als $v \geq \frac{p_1}{2p_2}$ dan $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = (v - \frac{p_1}{2p_2}, \frac{p_1^2}{4p_2^2})$.

b. Als $v < \frac{p_1}{2p_2}$ gelden zowel $e = p_2 v^2$ als $\mathbf{x}(p_1, p_2, e) = (0, \frac{e}{p_2}) = (0, v^2)$, waarbij de laatste identiteiten volgen uit $4p_2 e < p_1^2 \Leftrightarrow 4p_2^2 v^2 - p_1^2 < p_1^2 \Leftrightarrow v < \frac{p_1}{2p_2}$. Dus volgt: als $v < \frac{p_1}{2p_2}$ dan $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = (0, v^2)$.

Conclusie:

$$\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v) = \begin{cases} (v - \frac{p_1}{2p_2}, \frac{p_1^2}{4p_2^2}) & \text{als } v \geq \frac{p_1}{2p_2} \\ (0, v^2) & \text{als } v < \frac{p_1}{2p_2} \end{cases}$$

Opmerking. Een flink aantal studenten meende een alternatieve oplossing bereikt te hebben door gebruik van $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v(p_1, p_2, y)) = \mathbf{x}(p_1, p_2, y)$, met daarin gesubsitueerd $v = v(p_1, p_2, y)$ zoals boven bepaald. Door gelijkstellen vonden zij zo de bovenstaande uitdrukking voor $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v)$, *echter met* $v(p_1, p_2, y)$ *in plaats van* v. Omdat de af te leiden expressie voor $\mathbf{x}^h(p_1, p_2, v)$ moet gelden voor alle $v \in u(X)$ is zo'n oplossing pas volledig nadat vastgesteld is dat de waarden $v(p_1, p_2, y)$ de hele verzameling $u(X)$ bestrijken als y en p_1, p_2 mogen variëren. Dat kan met behulp van de concaviteit van de nutsfunctie u door de FOSC voor het UMP uit de handout "Intermezzo ..." te gebruiken (schets: als $v = u(\mathbf{x}_0)$ met $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2_{++}$ willekeurig, dan is $\mathbf{x}_0$ de Marshalliaanse vraag behorend bij $\mathbf{p}_0 := \nabla u(\mathbf{x}_0)$ en $y_0 := \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}_0$; gevolg: $v = u(\mathbf{x}_0) = v(\mathbf{p}_0, \mathbf{y}_0)$)).

Voor extra punten. Je moet minimaliseren $p_1x_1 + p_2x_2$ over alle $x_1, x_2 \geq 0$ met $x_1 + \sqrt{x_2} \geq v \in u(X) = [0, \infty[$. Merk op dat u continu is, dus stap 0 van de EMP oplosmethode is al toegepast. Stap 1a geeft alleen $x_1 = 0$ en $x_2 = v^2$ en stap 1b levert $1/p_1 = \frac{x_2^{-1/2}}{2p_2}$, dus $x_2 = \bar{x}_2 := \frac{p_1^2}{4p_2^2}$ en dan $x_1 = \bar{x}_1 := v - \frac{p_1}{2p_2}$, maar deze doet alleen mee indien $v \geq \frac{p_1}{2p_2}$. Tenslotte levert stap 1c nogmaals $(0, v^2)$, maar nu ook de bundel $(v, 0)$. Conclusie: als $v \geq \frac{p_1}{2p_2}$ bestaat de verzameling C' van "kandidaten" uit de drie punten $(0, v^2)$, $(v, 0)$ en $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, en als $v < \frac{p_1}{2p_2}$ dan bestaat C' alleen uit $(0, v^2)$ en $(v, 0)$. In het eerste geval is $\mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{x}} = p_1 v - \frac{p_1^2}{4p_2}$ duidelijk kleiner dan $\mathbf{p} \cdot (v, 0) = p_1 v$, maar ook dan $\mathbf{p} \cdot (0, v^2) = p_2 v^2$ omdat $p_1 v \leq \frac{p_1^2}{4p_2} + p_2 v^2$ en zelfs $p_1 v < \frac{p_1^2}{4p_2} + p_2 v^2$ volgt uit $2AB < A^2 + B^2$ voor $A = \frac{p_1}{2\sqrt{p_2}}$ en $B = \sqrt{p_2} v$. Dus is $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ het globale minimum als $v \geq \frac{p_1}{2p_2}$. In het tweede geval $v < \frac{p_1}{2p_2}$ geldt nog steeds $\mathbf{p} \cdot (v, 0) = p_1 v$ en $\mathbf{p} \cdot (0, v^2) = p_2 v^2$ en volgt $p_2 v^2 < p_2 v \frac{p_1}{2p_2} = p_1 v$. Dus is $(0, v^2)$ het globale minimum als $v < \frac{p_1}{2p_2}$.

Opgave 2 [35 pt] Beschouw een zuivere ruileconomie, gevormd door twee consumenten. Consument A heeft initiële rijkdom $\boldsymbol{\omega}^A = (5, 4)$ en voor consument B is dat $\boldsymbol{\omega}^B = (1, 1)$. Neem aan dat de preferenties van consument A kunnen worden weergegeven door de nutsfunctie $u^A(x_1, x_2) := \min(x_1, x_2)$ op $\mathbb{R}^2_+$.

a. Stel dat de preferenties van consument B kunnen worden weergegeven door de nutsfunctie $u^B(x_1, x_2) := \max(x_1, x_2)$ op $\mathbb{R}^2_+$. Bestaat er dan een Walrasiaans evenwicht? Zoja, bepaal dit dan. Zonee, geef dan duidelijk aan waarom zo'n evenwicht niet bestaat.

b. Stel dat de preferenties van consument B kunnen worden weergegeven door de nutsfunctie $u^B(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ op $\mathbb{R}^2_+$. Bestaat er dan een Walrasiaans evenwicht? Zoja, bepaal dit dan. Zonee, geef dan duidelijk aan waarom zo'n evenwicht niet bestaat.

Solution a. De Marshallianse vraag van consument A volgt bijvoorbeeld grafisch door doorsnijding van de lijn $x_1 = x_2$ en de budgetlijn $p_1x_1 + p_2x_2 = y_A := 5p_1 + 4p_2$. Omdat je weet dat hier $p_1 = 1$ mag worden gezet, geeft dit $\mathbf{x}_A = (\frac{5+4p_2}{1+p_2}, \frac{5+4p_2}{1+p_2})$ voor de gevraagde bundel. De vraag van consument B volgt eveneens grafisch. Het gaat dan om de hoekpunten $(y_B, 0)$ of $(0, y_B/p_2)$ van de budgetverzameling, waarbij $y_B := 1 + p_2$. Die hooekpunten zijn derhalve $(1 + p_2, 0)$ en $(0, \frac{1+p_2}{p_2})$. Onderlinge vergelijking van nutswaarden toont dan aan dat de vraag $\mathbf{x}_B$ van deze consument alsvolgt is:

$$\mathbf{x}_B = \begin{cases} (1 + p_2, 0) & \text{als } p_2 > 1 \\ (0, \frac{1+p_2}{p_2}) & \text{als } p_2 < 1 \\ (1 + p_2, 0) \text{ of } (0, \frac{1+p_2}{p_2}) & \text{als } p_2 = 1 \end{cases}$$

Om fysiek toegelaten te zijn, is vereist dat $\mathbf{x}_A + \mathbf{x}_B = (6, 5)$. Voor de eerste mogelijkheid voor $\mathbf{x}_B$ leidt dit o.a. tot $\frac{5+4p_2}{1+p_2} = 5$, dus tot $p_2 = 0 \not> 1$. Dus deze mogelijkheid voor het evenwicht is uitgesloten. Voor de tweede mogelijkheid voor $\mathbf{x}_B$ leidt het voorgaande o.a. tot $\frac{5+4p_2}{1+p_2} = 6$ en dat geeft $p_2 = -1/2$. Ook deze mogelijkheid kan zich dus niet voordoen. Tenslotte levert de derde mogelijkheid ook niets op, zoals uit het voorgaande volgt. Concusie: er bestaat geen Walrasiaans evenwicht.

b. Voor consument blijft de vraag $\mathbf{x}_A$ onveranderd. Uit grafisch onderzoek blijkt ditmaal het volgende voor consument B

$$\mathbf{x}_B = \begin{cases} (1 + p_2, 0) & \text{als } p_2 > 1 \\ (0, \frac{1+p_2}{p_2}) & \text{als } p_2 < 1 \\ \text{gehele budgetlijn tussen } (1 + p_2, 0) \text{ en } (0, \frac{1+p_2}{p_2}) & \text{als } p_2 = 1 \end{cases}$$

Uit onderdeel a volgt dat de eerste twee mogelijkheden voor $\mathbf{x}_B$ niet kunnen leiden tot een Walrasiaans evenwicht. De derde mogelijkheid leidt tot het zoeken voor $p_2 = 1$ van een punt (z_1, z_2) dat op de gehele budgetlijn tussen $(1+p_2, 0) = (2, 0)$ en $(0, \frac{1+p_2}{p_2}) = (0, 2)$ mag liggen (met andere woorden: er moet gelden $z_1, z_2 \geq 0$ en $z_1+z_2 = y_B = 2$) en dat moet voldoen aan $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})+(z_1, z_2) = (6, 5)$. Aan deze eisen wordt voldaan door $z_1 = 3/2$ en $z_2 = 1/2$. Conclusie: $(p_1, p_2) = (1, 1)$ is een Walrasiaanse evenwichtsprijs en de bijbehorende evenwichtsallocatie is $(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) = ((9/2, 9/2), (3/2, 1/2))$.

Opgave 3 [30 pt.] Beschouw voor $n = 3$ een consument met inkomen $y = 600$. Stel dat zijn/haar voorkeuren gerepresenteerd kunnen worden door de nutsfunctie $u(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3$. Bepaal voor deze consument de CLI (=index van kosten van levensonderhoud) als de prijsvector verandert van $\bar{\mathbf{p}} = (2, 1, 1)^T$ (= oorspronkelijke prijsvector) naar $\mathbf{p} = (1, 2, 1)^T$

Oplossing. De bekende formule voor de oorspronkelijke Marshallianse vraag $\bar{\mathbf{x}}$ bij deze Cobb-Douglas nutsfunctie geeft $\bar{\mathbf{x}} = (\frac{2}{4}\frac{600}{2}, \frac{1}{4}600, \frac{1}{4}600)^T = (150, 150, 150)^T$, zodat gezegd kan worden dat de consument oorspronkelijk het nutsniveau $\bar{v} = u(\bar{\mathbf{x}}) = 150^4$ bereikte. Volgens de formule $CLI = e(1, 2, 1, \bar{v})/\bar{y}$, met $\bar{y} = 600$, moeten we nu alleen nog $e(1, 2, 1, 150^4)$ bepalen. Eerst bepalen we daartoe de Hicksiaanse vraagbundel $\mathbf{x}_*$. Die moet in $\mathbb{R}^3_{++}$ liggen, omdat de nutsfunctie gelijk is aan nul op de rand van $\mathbb{R}^3_+$. Dus volgt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_*$ door combinatie van (1) $\frac{2x_1x_2x_3}{p_1} = \frac{x_1^2x_3}{p_2} = \frac{x_1^2x_2}{p_3}$ met (2) de efficiëntie-vergelijking $x_1^2x_2x_3 = 150^4$. Hier geeft (1) $x_1 = 4x_2$ en $x_3 = 2x_2$. Ingevuld in (2) volgt dan $32x_2^4 = 150^4$, dus $x_2 = 75 * 2^{-1/4}$. Dus ook $x_1 = 300 * 2^{-1/4}$ en $x_3 = 150 * 2^{-1/4}$. Daaruit volgt $e(1, 2, 1, 150^4) = (300 + 150 + 150)2^{-1/4} = 600 * 2^{-1/4}$. Conclusie: $CLI = 600 * 2^{-1/4}/600 = 2^{-1/4}(= 0.84)$.

Alternatief. Een alternatieve bepaling van $e(1, 2, 1, 150^4)$, gebaseerd op dualiteit, is alsvolgt. Uit de standaard-formule voor de Marshalliaanse vraag volgt hier voor algemene $y \geq 0$ en prijzen $p_1, p_2, p_3 > 0$ dat $v(p_1, p_2, y) = (\frac{1}{2})^2(\frac{1}{4})^2(\frac{y}{p_1})^2\frac{y}{p_2}\frac{y}{p_3} = \frac{1}{64}\frac{y^4}{p_1^2p_2p_3}$. Wegens de dualiteitsrelatie $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, v)) = v$ volgt zo $e(\mathbf{p}, v) = (64)^{1/4}v^{1/4}p_1^{1/2}p_2^{1/4}p_3^{1/4}$. Dat geeft $e((1, 2, 1)^T, 150^4) = 150 * 2^{7/4} = 600 * 2^{-1/4}$.