Uitwerking Herkansingstentamen Speltheorie, 13-3-2013

Schrijf en redeneer vooral duidelijk, want er wordt streng nagekeken: vaagheden e.d. **leiden zonder meer tot puntenverlies**. Alle drie opgaven zijn verplicht bij dit tentamen.

Opgave 1 [35 pt] Beschouw het tweepersoonsspel waarvan de uitbetalingen in onderstaande bimatrix staan:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a. [5pt] Bepaal alle Nash evenwichten (inclusief eventuele gemengde Nash evenwichten) van dit spel.
b. [2pt] In hoofdstuk 13 van het boek is, in algemene termen, het begrip "(weakly) dominated mixed strategy" ingevoerd, evenals het erop gebaseerde begrip "undominated mixed strategy". Vertaal deze definitie naar het huidige eenvoudige spel, zodat goed duidelijk wordt gemaakt wat een ongedomineerde (d.w.z "undominated") gemengde strategie is *in termen van het huidige spel*.
c. [7pt] Bepaal, rechtstreeks vanuit de definitie uit het vorige onderdeel, de verzameling van ongedomineerde Nash evenwichten (inclusief eventuele gemengde evenwichten) van dit spel.
d. [2pt] Vermeld duidelijk wat, *vertaald naar het huidige spel*, de definitie van een *perfect* gemengd evenwicht is. N.B. Bedoeld is het begrip "trembling hand perfect equilibrium" zoals dat in hoofdstuk 13 van het boek is ingevoerd.
e. [7pt] Bepaal met behulp van de definitie uit het vorige onderdeel de verzameling van alle perfecte gemengde evenwichten van dit spel.
f. [4pt] Beschouw nu het tweepersoonsspel waarvan de uitbetalingen in onderstaande bimatrix staan:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} L & R & ER \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ B \\ EB \end{array} & \begin{pmatrix} 1,1 & 0,0 & -3,-3 \\ 0,0 & 0,0 & -1,-1 \\ -3,-3 & -1,-1 & -1,-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bepaal van dit tweede spel alle *zuivere* Nash evenwichten.
g. [8pt] Bepaal van dit tweede spel de verzameling van alle zuivere Nash evenwichten die zowel perfect als ongedomineerd zijn.

Oplossing. a. Noteer de gegeven bimatrix als (A, B). Dan geldt voor de verwachte uitbetalingen $F_A(p,q) := (p, 1-p)A(q, 1-q) = pq$ en $F_B(p,q) = (p, 1-p)B(q, 1-q) = pq$. Dus de beste reacties zijn $\beta_1(q) = \{1\}$ als $q > 0$, $\beta_1(q) = [0,1]$ als $q = 0$, en $\beta_2(p) = \{1\}$ als $p > 0$, $\beta_2(p) = [0,1]$ als $p = 0$. Gevolg: de enige twee gemengde NE's $(p, 1-p), (q, 1-q))$ komen overeen met resp. $(p,q) = (0,0)$ en $(p,q) = (1,1)$. Dus dat komt overeen met de twee zuivere strategiecombinaties (T, L) en (R, B).

b. **N.B. Lees altijd eerst de volledige vraag!** Dit onderdeel (en ook volgende) gaat over *definities voor* **gemengde** *strategieën uit hoofdstuk 13* (dat hoofdstuk wordt expliciet genoemd). Dus alleen naar één van de onderstaande twee werd gevraagd in onderdelen *b* en *c*. Afwijken hiervan leidt dit tot fors puntenverlies in die onderdelen (zoals aangekondigd in de aanhef), want op zich is het spel super-eenvoudig. Naar redeneren in de wat primitievere trant van opgave 3.6 (p. 40), uit een heel ander hoofdstuk afkomstig (en slechts een opgave), wordt, zeker in eerste instantie, dus niet gevraagd!

1. De gevraagde algemene definitie uit hoofdstuk 13 luidt (p. 182): de gemengde strategie $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ van speler i is *(zwak) gedomineerd* als er een gemengde strategie σ_i' voor speler i bestaat, zo dat $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ geldt voor alle gemengde tegenstrategiën σ_{-i}, met minstens één strikte ongelijkheid (dus $>$ i.p.v. $\geq$) voor zekere σ_{-i}. (N.B. Lees de vraag: er wordt in dit onderdeel echt gevraagd wat zwakke dominantie inhoudt voor een *gemengde* strategie!) De gemengde strategie-combinatie $(\sigma_i)_i$ is ongedomineerd d.e.s.d.a. σ_i is ongedomineerd voor elke speler i (p. 182).

Een hiermee equivalente definitie (ook goedgekeurd) staat eveneens op p. 182: $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ is (zwak) gedomineerd d.e.s.d.a. er een gemengde strategie σ_i' voor speler i bestaat, zo dat $u_i(\sigma_i', s_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i})$ geldt voor alle zuivere tegenstrategiën $s_{-i} \in \Pi_{j, j\neq i} S_j$, met minstens één strikte ongelijkheid (dus $>$ i.p.v. $\geq$) voor zekere s_{-i}.

2. Dit laatste kan eventueel nog iets eenvoudiger worden opgeschreven voor een tweepersoonsspel, omdat daar gelden $\sigma_1 = (p, 1-p)$, $\sigma_2 = (q, 1-q)$, $u_1(\sigma_1, \mathbf{e}^1) = F_A(p,1)$, $u_1(\sigma_1, \mathbf{e}^2) = F_A(p,0)$, etc. Dus de gemengde strategie $\sigma_1 = (p, 1-p)$ is (zwak) gedomineerd als er een $\sigma_1' := (p', 1-p')$ bestaat, zo dat $F_A(p',1) \geq F_A(p,1)$, $F_A(p',0) \geq F_A(p,0)$, met minstens één $>$ i.p.v. $\geq$. Evenzo is de gemengde strategie $\sigma_2 = (q, 1-q)$ (zwak) gedomineerd als er een $\sigma_2' := (q', 1-q')$ bestaat, zo dat $F_B(1,q') \geq F_B(1,q)$, $F_B(0,q') \geq F_B(0,q)$, met minstens één $>$ i.p.v. $\geq$.

c. Uit het laatste deel van bovenstaande oplossing van onderdeel b volgt voor het huidige tweepersoonsspel, met $F_A(p,q) = pq = F_B(p,q)$:

(i) $\sigma_1 := (1,0)$ is (zwak) gedomineerd als er een $\sigma_1' := (p', 1-p')$ bestaat, zo dat $p' = F_A(p',1) \geq F_A(1,1) = 1$ en $0 = F_A(p',0) \geq F_A(1,0) = 0$ met minstens één $>$ i.p.v. $\geq$. Vanwege $p' \in [0,1]$ en $0 = 0$ kan dit niet. Dus $(1,0)$ (overeenkomend met de zuivere strategie T) is ongedomineerd.

(ii) $\sigma_1 := (0,1)$ is (zwak) gedomineerd als er een $\sigma_1' := (p', 1-p')$ bestaat, zo dat $p' = F_A(p',1) \geq F_A(0,1) = 0$ en $p' = F_A(p',0) \geq F_A(0,0) = 0$ met minstens één $>$ i.p.v. $\geq$. Dat kan voor $p' \in (0,1]$. Dus $(0,1)$ (overeenkomend met de zuivere strategie B) is gedomineerd.

(iii) $\sigma_2 := (1,0)$ is (zwak) gedomineerd als er een $\sigma_2' := (q', 1-q')$ bestaat, zo dat $q' = F_B(q',1) \geq F_B(1,1) = 1$ en $0 = F_B(0,q') \geq F_B(0,1) = 0$ met minstens één $>$ i.p.v. $\geq$. Vanwege $q' \in [0,1]$ en $0 = 0$ kan dit niet. Dus $(1,0)$ (overeenkomend met de zuivere strategie L) is ongedomineerd.

(iv) $\sigma_2 := (0,1)$ is (zwak) gedomineerd als er een $\sigma_2' := (q', 1-q')$ bestaat, zo dat $q' = F_B(1,q') \geq F_B(1,0) = 0$ en $0 = F_B(0,q') \geq F_B(0,1) = 0$ met minstens één $>$ i.p.v. $\geq$. Dat kan voor $q' \in (0,1]$. Dus $(0,1)$ (overeenkomend met de zuivere strategie R) is gedomineerd.

Van de twee NE's in onderdeel a is daarom alleen de combinatie $((1,0),(1,0))$ ongedomineerd.

c. Uit de laatste regel van de oplossing van onderdeel b volgt dat $((p, 1-p), (q, 1-q)) = ((1,0),(1,0))$ het enige ongedomineerde NE is voor dit spel. Dat komt overeen met de zuivere strategiecombinatie (T, L).

d. De algemene definitie luidt alsvolgt (p. 180): de gemengde strategiecombinatie $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_i)_i \in \Pi_i \Delta(S_i)$ is *perfect* als er een rij $\{\boldsymbol{\sigma}^t\}_t$ van gemengde strategie-combinaties bestaat en een bijbehorende rij strikt positieve functies $\{\mu^t\}_t$, met $\sum_{h \in S_i} \mu^t_{ih} < 1$, zodanig dat *(i)* $\mu^t_{i,h}$ convergeert naar nul voor elke i en $h \in S_i$, *(ii)* $\boldsymbol{\sigma}^t$ is een NE voor het geperturbeerde spel $G(\mu^t)$ en *(iii)* $\boldsymbol{\sigma}^t$ convergeert naar $\boldsymbol{\sigma}$.

Vertaald naar het huidige spel betekent dit dat een gemengde strategie-combinatie $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2) = ((\bar{p}, 1-\bar{p}), (\bar{q}, 1-\bar{q})) \in \Delta(\{T,B\}) \times \Delta(\{L,R\})$ perfect is als er een rij $\{(p^t, q^t)\}_t$ in $[0,1]^2$ bestaat met $(p^t, q^t) \to (\bar{p}, \bar{q})$ en een bijbehorende rij strikt positieve vectoren $(\mu^t_{1T}, \mu^t_{1B}, \mu^t_{2L}, \mu^t_{2R})$, met $\mu^t_{1T} + \mu^t_{1B} < 1$ en $\mu^t_{2L} + \mu^t_{2R} < 1$, zodanig dat $(\mu^t_{1T}, \mu^t_{1B}, \mu^t_{2L}, \mu^t_{2R}) \to (0,0,0,0)$ en zodanig dat $((p^t, 1-p^t), (q^t, 1-q^t))$ voor elke t een NE is voor het spel $G(\mu^t)$. Dit laatste spel heeft de gegeven bimatrix, maar de gemengde strategie-combinaties $((p, 1-p), (q, 1-q))$ ervan moeten nu voor elke t voldoen aan $p \geq \mu^t_{1T}$ en $1-p \geq \mu^t_{1B}$, d.w.z. aan $p \in [\mu^t_{1T}, 1-\mu^t_{1B}]$, en aan $q \geq \mu^t_{2L}$ en $1-q \geq \mu^t_{2R}$, d.w.z. aan $q \in [\mu^t_{2L}, 1-\mu^t_{2R}]$. (N.B. Het nemen van $\mu^t_{1T} = \mu^t_{1B} = \mu^t_{2L} = \mu^t_{2R} = \epsilon > 0$, met $\epsilon \to 0$, is wat eenvoudiger en mag hier ook.)

e. De beste reacties uit onderdeel a veranderen daardoor: er geldt $\beta^t_1(q) = \{1 - \mu^t_{1B}\}$ voor alle $q \in [\mu^t_{2L}, 1-\mu^t_{2R}]$ en $\beta_2(p) = \{1 - \mu^t_{2R}\}$ voor alle $p \in [\mu^t_{1T}, 1-\mu^t_{1B}]$. Het enige NE voor het geperturbeerde spel G^t is dus de strategiecombinatie $((1-\mu^t_{1B}, \mu^t_{1B}), (1-\mu^t_{2R}, \mu_{2R}))$, en die uitdrukking convergeert naar $((1,0),(1,0))$ als $t \to \infty$. Het enige perfecte evenwicht van dit spel is dus $((1,0),(1,0))$, en dat komt overeen met de zuivere strategiecombinatie (T, L).

f. De sterretjes-methode toont direct aan dat er drie zuivere NE's zijn: (T,L), (B,R) en (EB, ER).

g. Volgens Stelling 13.20 is elk perfect evenwicht ook ongedomineerd, en volgens Stelling 13.22 geldt de omkering hier ook vanwege $n = 2$ (N.B. dit verklaart ook waarom bij onderdelen c en e hetzelfde NE werd gevonden.) De vraag bij dit onderdeel is daarom *equivalent* met elk van de beide volgende vragen:
Vraag 1: bepaal welke van (T,L), (B,R) en (EB,ER) ongedomineerd zijn,
Vraag 2: bepaal welke van (T,L), (B,R) en (EB,ER) perfect zijn,

Vraag 1 (iets eenvoudiger dan vraag 2) kan nu verder worden beantwoord: Analoog aan onderdeel b krijg je het volgende: een gemengde strategie $\sigma_1 := (p_1, p_2, p_3)$ van speler 1 is gedomineerd als er een gemengde strategie $\sigma_1' := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ voor die speler bestaat met

$$u_1((\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \mathbf{e}^j) \geq u_1((p_1, p_2, p_3), \mathbf{e}^j) \text{ voor } j = 1, 2, 3 \text{ met minstens één } > \text{ (in plaats van } \geq). \tag{1}$$

Je controleert nu (1 voor bovenstaande drie NE's van speler 1.

Geval 1: $\sigma_1 := (1, 0, 0)$ is gedomineerd als er een gemengde strategie $\sigma_1' := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bestaat met

$$\underbrace{\alpha_1 - 3\alpha_3}_{u_1(\sigma_1', \mathbf{e}^1)} \geq \underbrace{1}_{u_1(\sigma_1, \mathbf{e}^1)}, \underbrace{-\alpha_3}_{u_1(\sigma_1', \mathbf{e}^2)} \geq \underbrace{0}_{u_1(\sigma_1, \mathbf{e}^2)}, \underbrace{-3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}_{u_1(\sigma_1', \mathbf{e}^3)} \geq \underbrace{-3}_{u_1(\sigma_1, \mathbf{e}^3)},$$

met minstens één $>$. Dit geeft $\alpha_3 = 0$ en $\alpha_1 = 1$ en dus $\alpha_2 = 0$. Maar dan gelden alle drie ongelijkheden als gelijkheden en is "minstens één $>$" niet mogelijk (N.B. er geldt zelfs $\sigma_1' = \sigma_1$). Dus $\sigma_1 := (1, 0, 0)$ is ongedomineerd.

Geval 2: $\sigma_1 := (0, 1, 0)$ is gedomineerd als er een gemengde strategie $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bestaat met

$$\alpha_1 - 3\alpha_3 \geq 0, -\alpha_3 \geq 0, -3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \geq -1 \text{ met minstens één } >.$$

Dit geeft $\alpha_3 = 0$, dus moeten gelden $\alpha_1 \geq 0$ en $-3\alpha_1 - \alpha_2 \geq -1$; wegens $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 - 0$ is de laatste ongelijkheid equivalent met $-1 - 2\alpha_1 \geq -1$, d.w.z. met $\alpha_1 = 0$. Dan volgt ook $\alpha_2 = 1$. Maar dan gelden alle drie ongelijkheden als gelijkheden en is "minstens één $>$" niet mogelijk (N.B. er geldt zelfs $\sigma_1' = \sigma_1$). Dus $\sigma_1 := (0, 1, 0)$ is ongedomineerd.

Geval 3: $\sigma_1 := (0, 0, 1)$ is gedomineerd als er een gemengde strategie $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ bestaat met

$$\alpha_1 - 3\alpha_3 \geq -3, -\alpha_3 \geq 0, -3\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \geq -1 \text{ met minstens één } >.$$

Dit geeft $\alpha_3 = 0$, dus moeten gelden $\alpha_1 \geq -3$ en $-3\alpha_1 - \alpha_2 \geq -1$, waarbij de laatste ongelijkheid equivalent is met $\alpha_1 = 0$, net als in geval 2. Dus volgt ook $\alpha_2 = 1$. Uit $0 > -3$ volgt dat $\mathbf{e}^3$ zwak gedomineerd wordt door $\mathbf{e}^2$ voor speler 1 (dit kun je ook gemakkelijk controleren a.d.h.v. de uitbetalingsmatrix).

Conclusie: van de drie zuivere NE's (T, L), (B, R) en (EB, ER) zijn alleen de eerste twee ongedomineerd (en tegelijk dus ook perfect). Merk op: hoewel (B, R) voor het oorspronkelijke 2×2 spel gedomineerd was (en dus niet perfect), is binnen het kader van het nieuwe 3×3 spel zijn status omgeslagen: daar is (B, R) ongedomineerd (en dus perfect).

Opgave 2 [30 pt] Beschouw een veilingspel met volledige informatie over waarderingen van een te veilen object. Het spel lijkt sterk op dat uit sectie 6.5.1, maar verschilt toch op één punt, zodat resultaten uit sectie 6.5.1. van het boek *niet* zonder verdere uitleg van toepassing zijn.

Net als in het boek heeft het spel volledige informatie en verzegelde biedingen $b_i \geq 0$. Elke speler i, $1 \leq i \leq n$, (er geldt $n \geq 2$) heeft waardering (=valuation) v_i voor het te veilen object. Net als in sectie 6.5.1 zijn de waarderingen geordend: $v_1 \geq \cdots \geq v_n > 0$. Als slechts één speler het hoogste bod uitbrengt, dan krijgt die speler het object toegewezen tegen betaling van het door hem/haar geboden bedrag. Indien meerdere (zeg $r \geq 2$) spelers het hoogste bod uitbrengen, dan vindt de toewijzing van het object plaats op een andere manier dan in sectie 6.5.1, namelijk door met gelijke kansen te loten onder de hoogste bieders. Daarbij kiezen we de verwachtingswaarde van deze loterij als uitbetaling; dus we definiëren $u_i(b_1, \ldots, b_n) := \frac{1}{r}(v_i - b_i)$ voor elke hoogst biedende speler i.

Zij $\bar{\mathbf{b}} := (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n)$ een *willekeurig* Nash evenwicht voor dit spel.

a. [6 pt] Toon aan: als onder $\bar{\mathbf{b}}$ speler i tot de groep hoogst biedende spelers behoort, dan geldt $\bar{b}_i \leq v_i$.

b. [8 pt] Toon aan: onder $\bar{\mathbf{b}}$ kunnen alleen spelers i met $v_i = v_1$ tot de groep hoogst biedende spelers behoren.

c. [8 pt] Stel dat geldt $v_1 = v_2 > v_3 \geq \ldots \geq v_n$. Omschrijf dan de biedingen $\bar{b}_1$ en $\bar{b}_2$ zo nauwkeurig mogelijk (inclusief afleiding).

d. [8 pt] Stel dat geldt $v_1 > v_2 \geq \ldots \geq v_n$. Bepaal dan de verzameling van alle Nash evenwichten voor dit spel (inclusief afleiding).

Oplossing. a. Stel je had $\bar{b}_i > v_i$. Dan heeft hoogst biedende speler i een uitbetaling $u_i(\bar{\mathbf{b}}) = \frac{1}{r}(v_i - \bar{b}_i) < 0$. Door nu $b_i := v_i < \bar{b}_i$ te kiezen gaat hij/zij er echt op vooruit, zowel als hij/zij de hoogste bieder zou blijven als wanneer dat niet langer het geval is (in beide gevallen is de uitbetaling namelijk 0). Dit kan niet omdat $\bar{\mathbf{b}}$ een NE is. De gewenste tegenspraak is daarmee bereikt. (N.B. De oplossing van dit onderdeel a is nagenoeg gelijk aan die van opgave 2.b van het eindtentamen speltheorie dat op 16-1-13 werd gegeven).

b. Stel er was een hoogst biedende speler k met $v_k < v_1$. Volgens het vorige onderdeel moet dan $\bar{b}_k \leq v_k < v_1$ gelden voor die speler. Je onderscheidt nu twee gevallen: (1) speler 1 is geen hoogst biedende speler, (2) speler 1 is wel hoogst biedend (dus samen met speler k en wellicht nog anderen).

Geval (1): Speler 1 krijgt uitbetaling 0 onder $\bar{\mathbf{b}}$. Maar overstappen op bod $b_1 = (v_1 + \bar{b}_k)/2 > \bar{b}_k$ zorgt er voor dat speler 1 het hoogste bod overbiedt en dus als enige het object wint. Dat levert hem/haar een strikt positieve uitbetaling $(v_1 - \bar{b}_k)/2$ op. Dit geeft tegenspraak met de NE eigenschap van $\bar{\mathbf{b}}$.

Geval (2): Onder $\bar{\mathbf{b}}$ krijgt speler 1 de uitbetaling $u_1(\bar{\mathbf{b}}) = \frac{1}{r}(v_1 - \bar{b}_1)$, met $r \geq 2$. Hier geldt $v_1 - \bar{b}_1 > 0$, omdat $\bar{b}_1 = \bar{b}_k \leq v_k < v_1$. Echter, als speler 1 overstapt op het hogere bod $b_1 = (v_1 + 3\bar{b}_1)/4$, dan schakelt hij/zij de concurrentie geheel uit: hij/zij krijgt daardoor als enige het object. Dat levert speler 1 uitbetaling $\frac{3}{4}(v_1 - \bar{b}_1)$ op, wat strikt meer is dan $u_1(\bar{\mathbf{b}})$, omdat $r \geq 2$. Dit geeft tegenspraak met de NE eigenschap van $\bar{\mathbf{b}}$.

c. Claim: voor het NE $\bar{\mathbf{b}}$ moet gelden $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = v_1$. Merk eerst op dat alleen spelers 1 en 2 hoogst biedende spelers kunnen zijn (wegens onderdeel b) met biedingen ten hoogste gelijk aan v_1 (wegens onderdeel a). Om de claim te bewijzen onderscheid je 3 gevallen: (1) $\bar{b}_1 > \bar{b}_2$, (2) $\bar{b}_1 < \bar{b}_2$ en (3) $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$.

Geval (1): Er geldt (zie boven) $v_1 \geq \bar{b}_1 > \bar{b}_2$. Maar dan kan speler 1 zijn uitbetaling strikt verhogen door $b_1 = (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)/2$ te bieden (dus iets minder), want hij/zij blijft dan nog steeds de enige hoogstbiedende speler. Dit geeft tegenspraak met de NE eigenschap. daarom kan dit geval niet optreden, en datzelfde geldt uiteraard ook voor het volkomen spiegelbeeldige geval (2).

Geval (3): Er geldt $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 \leq v_1$ (wegens onderdeel a). Nu kan $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 < v_1$ niet gelden, want dan zou bijvoorbeeld speler 1 zijn uitbetaling strikt kunnen verhogen door $b_1 = (v_1 + 3\bar{b}_1)/4$ te bieden. Dat is wel meer dan het oorspronkelijke bod $\bar{b}_1$, maar speler 1 schakelt de concurrentie uit en wordt zo de enige hoogstbiedende. Dat geeft uitbetaling $v_1 - b_1 = \frac{3}{4}(v_1 - \bar{b}_1)$, wat strikt meer is dan $u_1(\bar{\mathbf{b}}) = \frac{1}{2}(v_1 - \bar{b}_1)$. Dit geeft tegenspraak met de NE eigenschap van $\bar{\mathbf{b}}$. De enige resterende mogelijkheid is $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = v_1$, dus de claim is bewezen.

Conclusie: voor het NE $\bar{\mathbf{b}}$ moet gelden $\bar{b}_1 = \bar{b}_2 = v_1$ en hiermee is voldaan aan de eigenlijke vraag. Echter, de vraag ging uit van het feit dat een NE $\bar{\mathbf{b}}$ zou bestaan, en zulke existentie hoeft niet automatisch te gelden voor niet-eindige spelen zoals het huidige veilingspel (zie het volgende onderdeel als waarschuwing hiervoor of zie de huiswerkoefening 12.5)! Voor de volledigheid (en extra punten) kun je dus nog opmerken dat er in deze situatie altijd een NE bestaat: eenvoudig is te zien dat bijvoorbeeld $\bar{\mathbf{b}} = (v_1, v_1, 0, \ldots, 0)$ een NE is.

d. Claim: in deze situatie bestaat er geen NE. De gevraagde verzameling is dus de lege verzameling. Want stel dat er wel een NE was; noem dit dan $\bar{\mathbf{b}}$. Uit onderdeel b volgt dat *alleen* speler 1 het hoogste bod $\bar{b}_1$ kan uitbrengen, dus er geldt $\beta := \max_{i \geq 2} \bar{b}_i < \bar{b}_1 \leq v_1$. Maar dan geeft het lagere bod $b_1 := (\beta + \bar{b}_1)/2 > \beta$, waaronder hij/zij nog steeds de enige hoogstbiedende blijft, een strikt hogere uitbetaling aan speler 1. Deze tegenspraak met de NE eigenschap toont aan dat zo'n $\bar{\mathbf{b}}$ niet kan bestaan.

Opgave 3 [35 pt] Zij $N := \{1, 2, 3\}$ een coöperatief spel waarvan de waardefunctie $v(S)$ wordt vastgelegd door het volgende gegeven: $v(S)$ is gelijk aan 1 voor de volgende drie coalities S: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ en $\{1, 2, 3\}$; voor alle andere coalities S is $v(S)$ gelijk aan 0.

a. [3 pt] Bepaal voor dit spel de verzameling van alle veto-spelers en ook de verzameling van alle dictatoren.
b. [10 pt] Bepaal voor dit spel de dominantie-core $DC(v)$, d.w.z. de verzameling van alle niet-gedomineerde imputaties, *rechtstreeks* vanuit de definitie van niet-gedomineerd zijn.
c. [7 pt] Bepaal voor dit spel de core $C(v)$.
d. [10 pt] Toon aan dat $V := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+ : x_1 = x_3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ een verzameling van imputaties is, die de volgende twee eigenschappen (i) en (ii) heeft: (i) geen enkel element uit die verzameling wordt gedomineerd door een ander element uit die verzameling, (ii) elke imputatie die niet tot die verzameling behoort, wordt gedomineerd door een element uit die verzameling.
e. [5 pt] Controleer (met uitleg) ook of de verzameling $DC(v)$ wel of niet de twee bovengenoemde eigenschappen (i) en (ii) heeft.

Oplossing. Merk op dat dit eigenlijk opgave 16.7 uit het boek is, die deel uitmaakte van de huiswerkopgaven (serie 10); er is daarom streng nagekeken.

a. veto(v) is de doorsnede van alle S met $v(S) = 1$. Hier is dat is $\{2\}$, dus speler 2 is de enige veto-speler. Om dictator te zijn moet nog meer gelden, n.l. $v(S) = 1$ d.e.s.d.a. $2 \in S$, en dat is niet zo, want $v(\{2\}) = 0$. De verzameling dictatoren van dit spel is dus leeg.

b. In dit spel is een imputatie een vector $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ met $x_i \geq v(i) = 0$ voor alle i en $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Een imputatie $\mathbf{x}$ wordt gedomineerd door een andere imputatie $\mathbf{y}$ als er een coalitie $S \subset \{1, 2, 3\}$ is met (1) $y_i > x_i$ voor alle $i \in S$ en (2) $y(S) := \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$. Dit vereist dat zo'n coalitie S één van de drie winnende coalities is (anders zou $0 = y_i > x_i \geq 0$ moeten gelden voor $i \in S$ en dat is onmogelijk), waarvan $S = N$ meteen uitgesloten kan worden ($y_i > x_i$ voor alle $i \in N$ zou impliceren $y(N) > x(N) = 1$, wat niet kan). De twee overblijvende gevallen zijn:

Geval $S = \{1, 2\}$: Hier moet gelden $y_1 > x_1$, $y_2 > x_2$ en $y_1 + y_2 \leq 1$. Dat is alleen mogelijk als $\mathbf{x}$ daarvoor "ruimte laat" doordat $s := x_1 + x_2 < 1$. Want dan kun je domineren met $y_1 = x_1 + \epsilon$, $y_2 = x_2 + \epsilon$ voor een $\epsilon > 0$ die klein genoeg is. Om $\mathbf{y}$ imputatie te laten zijn moet je dan ook nog kiezen $y_3 = 1 - s - 2\epsilon$ en dat kan: voor ϵ klein genoeg blijft $1 - s - 2\epsilon$ niet-negatief (preciezer gezegd volstaat hier elke keus $0 < \epsilon \leq (1 - s)/2$ – bij de keus $\epsilon = (1 - s)/2$ geldt zelfs $y_3 = 0$).

Geval $S = \{1, 2\}$: Dit gaat volkomen analoog: dominantie is dus alleen mogelijk als geldt $x_2 + x_3 < 1$.

Conclusie: om *niet* gedomineerd te zijn, moet voor $\mathbf{x}$ tegelijk de ontkenning van bovenstaande twee eisen gelden. Dus moet tegelijk gelden $x_1 + x_2 \geq 1$ en $x_2 + x_3 \geq 1$. Wegens de imputatie-eigenschappen van $\mathbf{x}$ volgt daaruit $\mathbf{x} = \mathbf{e}^2$. Dus $DC(v)$ bestaat precies uit één vector, namelijk $\mathbf{e}^2$.

c. Omdat bij dit spel imputaties niet-negatieve componenten moeten hebben, bestaat $C(v)$ uit alle vectoren $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3_+$ met $x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = 1$, $x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 1$ en met $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Net als hierboven volgt dan direct dat $C(v)$ gelijk is aan het singleton (d.w.z. 1-puntsverzameling) $\{\mathbf{e}^2\}$. De zo gevonden identiteit $DC(v) = C(v)$ stemt ook overeen met wat volgens Stelling 16.8 voor dit spel moet gelden; v voldoet namelijk aan de voldoende voorwaarde (16.2).

d. Verificatie van eigenschap (i). Stel $\mathbf{y} \in V$ domineert $\mathbf{x} \in V$. Net als in onderdeel b kan dat alleen als $\mathbf{y}\mathrm{dom}_S\mathbf{x}$ wordt veroorzaakt door één van de twee coalities $S = \{1, 2\}$ of $S = \{2, 3\}$.

Geval $S = \{1, 2\}$: In dit geval zou moeten gelden $y_1 > x_1$, $y_2 > x_2$ en $y_1 + y_2 \leq 1$, maar dan ook $y_3 = y_1 > x_1 = x_3$. Dat kan niet, omdat $\mathbf{y}$ een imputatie is, en dus moet voldoen aan $y(N) = 1$.

Geval $S = \{2, 3\}$: Dit gaat volkomen analoog en kan dus ook niet. Hiermee is eigenschap (i) bewezen.

Verificatie van eigenschap (ii). Zij $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3_+$ een imputatie die niet tot V behoort. Dan $x_1 \neq x_3$ en $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Omdat $x_1 \neq x_3$, geldt of $x_1 < x_3$ of $x_1 > x_3$.

Geval $x_1 < x_3$: Dan kies je $S = \{1, 2\}$ om ermee te domineren (dit volgt onmiddelijk door even te experimenteren met bijvoorbeeld $\mathbf{x} = (0.15, 0.2, 0.65)$, welke imputatie je kunt domineren met bijvoorbeeld $\mathbf{y} = (0.2, 0.6, 0.2) \in V$ via $S = \{1, 2\}$). Kies $y_1 := y_3 := x_1 + \epsilon > 0$ en $y_2 := 1 - y_1 - y_3 = 1 - 2(x_1 + \epsilon)$ voor $\epsilon > 0$ klein genoeg en nog nader te bepalen, want je moet er ook voor zorgen dat $y_2 > x_2$. Omdat $x_1 < x_3$ is hiervoor "ruimte": $y_2 > x_2 = 1 - x_1 - x_3$ is equivalent met $2(x_1 + \epsilon) < x_1 + x_3$ en dat kan als $x_1 + 2\epsilon < x_3$, d.w.z. als $0 < \epsilon < (x_3 - x_1)/2$.

Geval $x_3 < x_1$: Dan kies je $S = \{2, 3\}$ en dan gaat de afleiding volkomen analoog aan het vorige geval. Hiermee is eigenschap (ii) bewezen.

e. Er gold $DC(v) = C(v) = \{\mathbf{e}^2\}$. Uiteraard geldt eigenschap (i) wel, maar (ii) geldt niet: bijvoorbeeld $\mathbf{x} = (0.15, 0.2, 0.65)$ behoort niet tot $DC(v)$. Echter deze imputatie wordt niet gedomineerd door $\mathbf{e}^2$, want die vector heeft twee componenten gelijk aan nul.