

Over polaire kegels, etc.

## 1 Polaire kegels:

**Def.** Verzameling  $L \subset \mathbb{R}^n$  is **lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^n$** : als  $L \neq \emptyset$  en

$$\forall_{x,x' \in L} \forall_{\alpha, \beta \in \mathbb{R}} \alpha x + \beta x' \in L.$$

Van nu af:  $L$  is deelruimte van  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Vector  $x$  in  $\mathbb{R}^n$  **staat loodrecht** op  $L$  als

$$x \cdot y = 0 \text{ voor alle } y \in L.$$

Notatie:  $x \perp L$ .

**Def.** Het **orthogonale complement** (oftewel **orthoplement**) van  $L$  is

$$L^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp L\}.$$

**Opm.**  $L^\perp$  is zelf ook lineaire deelruimte. Dus kun je definiëren

$$L^{\perp\perp} := (L^\perp)^\perp.$$

Naam: **bi-orthoplement** van  $L$

**St. 1.1** Voor elke lineaire deelruimte  $L$  geldt:

$$L^{\perp\perp} = L.$$

Bewijs vergt kennis van **projecties**.

**Vb. (nagaan of stelling klopt).** Zij  $L$  in  $\mathbb{R}^4$  lineair opspansel van  $(2, 0, 0, 0)^t$  en  $(0, 0, 0, 1)^t$ . Dan

$$L^\perp = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_4 = 0\}.$$

Dus per definitie is  $L^{\perp\perp}$  gelijk aan

$$\{y \in \mathbb{R}^4 : \forall_{x, x_1=x_4=0} y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + y_4x_4 = 0\}.$$

Voorschrift equivalent met:  $\forall_{x_2, x_3} y_2x_2 + y_3x_3 = 0$ , dus met  $y_2 = y_3 = 0$ . Conclusie:  $L^{\perp\perp} = L$ .

**Def. Convexe kegel** is  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K \neq \emptyset$ , met

$$\forall_{x, x' \in K} \forall_{\alpha, \beta \geq 0} \alpha x + \beta x' \in K.$$

Van nu af:  $K$  is convexe kegel in  $\mathbb{R}^n$ .

**Voorbeelden:**

- i.  $\mathbb{R}_-^n$  en  $\mathbb{R}_+^n$ ,
- ii.  $\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \leq x_n\}$ ,
- iii. elke lineaire deelruimte van  $\mathbb{R}^n$ .

**Def.** Vector  $x \in \mathbb{R}^n$  **staat stomp** op  $K$  als

$$\forall_{y \in K} x \cdot y \leq 0.$$

Notatie:  $x \wedge K$ .

Verklaring naam: voor hoek  $\phi$  tussen  $x$  en  $y$  geldt

$$\cos \phi := \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}.$$

**Def.** Het **polaire complement** van  $K$  is

$$K^\wedge := \{x \in \mathbb{R}^n : x \wedge K\}.$$

**Opm.**  $K^\wedge$  is zelf ook convexe kegel. Dus kun je definiëren

$$K^{\wedge\wedge} := (K^\wedge)^\wedge.$$

Naam: **bi-polaire complement** van  $K$

**Vb.** Zij  $K := \{x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x_2, x_1 \geq 0\}$ . Dan  $K^\wedge = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq \min(-x_2, 0)\}$ .

**St. 1.2 (bi-polaire stelling)** *Voor elke convexe kegel  $K$  van  $\mathbb{R}^n$  geldt:*

$$K^{\wedge\wedge} = K.$$

Bewijs: bv. met convexe optimaliseringstheorie of st. van Hahn-Banach. Deze stelling generaliseert Stelling 1.1. Dat volgt uit

**Prop. 1.3** *Elke lineaire deelruimte  $L$  is convexe kegel en  $L^\perp = L^\wedge$ .*

## 2 Lineaire ongelijkheden

$A$ :  $m \times n$ -matrix,

$A^t$ : getransponeerde van  $A$ ,

$b$ : vector in  $\mathbb{R}^m$ .

**Vraag:** Wanneer heeft  $Ax = b$  oplossing  $x$  in  $\mathbb{R}_+^n$ ?

**Let op!** Oplossing gezocht in  $\mathbb{R}_+^n$ , niet in  $\mathbb{R}^n$ !

**St. 2.1 (alternatievenstelling)** *Van de volgende uitspraken is altijd precies één waar:*

1.  $\exists x \in \mathbb{R}_+^n Ax = b$ ,
2.  $\exists y \in \mathbb{R}^m A^t y \leq 0$  en  $b \cdot y > 0$ .

Gebruikte notatie:

$A^t y \leq 0 \Leftrightarrow$  alle componenten van  $A^t y$  zijn niet-positief.

Bewijs alternatievenstelling volgt direct uit

**St. 2.2 (Farkas)** *Equivalent zijn:*

1.  $\exists x \in \mathbb{R}_+^n Ax = b$ ,
2.  $\forall y \in \mathbb{R}^m A^t y \leq 0 \Rightarrow b \cdot y \leq 0$ .

BEWIJS.  $1 \Rightarrow 2$ : Omdat 1 waar is, geldt

$$b \cdot y = b^t y = x^t A^t y = x \cdot A^t y.$$

Dus  $b \cdot y \leq 0$  voor elke  $y$  met  $A^t y \leq 0$  (wegens  $x \geq 0$ ).

$2 \Rightarrow 1$ :  $K := \{Ax : x \in \mathbb{R}_+^n\}$  is convexe kegel.  
Merk op:  $1 \Leftrightarrow b \in K$ . Dus te bewijzen is  $b \in K$ .

Nu zegt 2:

$$\forall_{y \in \mathbb{R}^m} y \wedge K \Rightarrow b \cdot y \leq 0.$$

D.w.z.  $\forall_{y \in K^\wedge} b \cdot y \leq 0$ . Dus

$$2 \Leftrightarrow b \in K^{\wedge\wedge}.$$

Gevolg:  $b \in K$  wegens Stelling 1.2. QED

Diverse versies van alternatievenstelling, zoals

**St. (Gordan)** Van de volgende twee uitspraken is altijd precies één waar:

1.  $\exists_{x \in \mathbb{R}_+^n, x \neq 0} Ax = 0$ .
2.  $\exists_{y \in \mathbb{R}^m} A^t y < 0$ ,

Notatie hier:

$A^t y < 0 \Leftrightarrow$  alle componenten van  $A^t y$  strikt negatief.

Bewijs uit Stelling 2.1: zie uitgedeelde stukje.

### 3 Intermezzo stochastiek

**Def.** Een **stochast** is reëelwaardige functie  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Hier is  $\Omega$  de **verzameling van alle elementaire uitkomsten**.

Van nu af:  $\Omega$  is **eindige** verzameling, en wel

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}.$$

**Opm.** Stochasten zijn gewoon *vectoren* in  $\mathbb{R}^k$  (en vice versa). Want

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ is eigenlijk } (X_1, \dots, X_k)^t,$$

met  $X_i := X(\omega_i)$  voor  $i = 1, \dots, k$ .

**Vb. (tweemaal gooien met dobbelsteen).**

Zij  $X$  het totale aantal ogen.

Dan  $X(i, j) := i + j$  met

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6, 6)\}.$$

Dat geeft voor  $X$  de vector

$$X = (2, 3, 4, \dots, 11, 12)^t.$$

**Def.** Een **kansmaat** op  $\Omega$  is vector  $P = (P_1, \dots, P_k)^t$  met

$$\forall_i P_i > 0 \text{ en } \sum_{i=1}^k P_i = 1.$$

Hier  $P_i$ : kans op elementaire uitkomst  $\omega_i$ .

**Def.** Stochast  $X$  heet **absoluut zeker positief** als  $X(\omega_i) > 0$  voor alle  $i = 1, \dots, k$ .

**Def.** De **verwachting** van stochast  $X$  is

$$E_P(X) := \sum_{i=1}^k X(\omega_i)P_i = \sum_{i=1}^k X_i P_i = X \cdot P.$$

**Vb. (voortzetting)** Als dobbelstenen “eerlijk”:

$$P = \left(\frac{1}{36}, \frac{1}{36}, \dots, \frac{1}{36}\right)^t.$$

Dan is verwachting van totale aantal ogen

$$E_P(X) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 (i + j) = 7.$$

## 4 Toepassing: prijzen van derivaten

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_k\}$ : verz. elementaire uitkomsten

$N$  aandelenfondsen: nummers  $n = 1$  t.e.m.  $n = N$ .

bankfonds: nummer  $n = 0$  (1 aandeel = 1 Euro op spaarrekening).

**Def.** Een **investeringsportefeuille** is vector  $H := (H_0, H_1, \dots, H_N)^t \in \mathbb{R}^{N+1}$ .

Interpretatie:  $H$  geeft aan dat je  $H_n$  aandelen van fonds  $n$  hebt,  $n = 0, \dots, N$ .

**Let op!** Als  $H_n < 0$ : dan ben je  $H_n$  aandelen van fonds  $n$  *schuldig*.

**1-periode model:**  $t = 0$  begintijdstip en  $t = 1$  eindtijdstip.

$S_n(j)$ : prijs van 1 aandeel in fonds  $n \geq 0$  op tijdstip  $t = j$ .

Op  $t = 0$ :  $S_1(0), \dots, S_N(0)$  zijn **bekend**.

Op  $t = 1$ :  $S_1(1), \dots, S_N(1)$  zijn **onbekend**, dus stochasten.

$S_n(1)(\omega_i)$ : de prijs van 1 aandeel in fonds  $n$  op  $t = 1$  als elementaire uitkomst  $\omega_i$  gebeurt.

Apart  $n = 0$ :  $S_0(0) = 1$  en  $S_0(1) = 1 + r$  (ente) zijn **bekend**.

Waarde van portefeuille  $H := (H_0, H_1, \dots, H_N)^t$  op  $t = j$ :  $V^H(j)$ .

Als  $t = 0$  dan

$$V^H(0) := H_0 + \sum_{n=1}^N H_n S_n(0) \text{ is } \mathbf{bekend}.$$

Als  $t = 1$  dan

$$V^H(1) := H_0(1 + r) + \sum_{n=1}^N H_n S_n(1) \text{ is } \mathbf{stochast}.$$

**Def.** Portefeuille  $H$  heet **dominant** als

- i.  $V^H(0) = 0$  (dus aanschaf gratis!),
- ii.  $V^H(1)$  is absoluut zeker positief (dus “altijd prijs”!).

## **Financieel-economisch uitgangspunt:**

*Rationele financiële markten kennen geen dominante strategieën.*

**Def.** Een **lineaire prijsmaat** is een kansmaat  $\pi := (\pi_1, \dots, \pi_k)^t$  op  $\Omega$  met

$$\forall_{\text{portefeuille } H} V^H(0) = E_{\pi} \frac{V^H(1)}{1 + r},$$

m.a.w. met

$$\forall_{1 \leq n \leq N} S_n(0) = E_\pi \frac{S_n(1)}{1+r}.$$

**Vb.** Stel  $N = 1$ ,  $r = 0.10$ , met  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ . Stel voor  $n = 1$ :

Op  $t = 0$  kost 1 aandeel 2 Euro.

Op  $t = 1$  kost 1 aandeel 1 Euro als  $\omega_1$  plaatsvindt.

Op  $t = 1$  kost 1 aandeel 3 Euro als  $\omega_2$  plaatsvindt.

Dan volgt lineaire prijsmaat  $\pi = (\pi_1, \pi_2)^t$  uit  $S_1(0) = E_\pi \frac{S_1(1)}{1+r}$ , d.w.z.

$$2 = \pi_1 \frac{10}{11} + \pi_2 \frac{10}{11} 3$$

en uit  $\pi_1 + \pi_2 = 1$  (met  $\pi_1, \pi_2 \geq 0$ ). Oplossen geeft:  $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (4/10, 6/10)$ .

**St. 4.1** *De volgende uitspraken zijn equivalent:*

(1) *Er bestaat een lineaire prijsmaat.*

(2) *Er bestaat geen dominante strategie.*

**BEWIJS.** Schrijf  $S_i^*(1)(\omega_j) := (1+r)^{-1} S_i(1)(\omega_j)$ .  
Zij  $A$  de  $(N+1) \times k$  matrix gegeven door

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ S_1^*(1)(\omega_1) & \dots & S_1^*(1)(\omega_k) \\ \vdots & & \vdots \\ S_N^*(1)(\omega_1) & \dots & S_N^*(1)(\omega_k) \end{pmatrix}$$

Zij  $b$  de vector gegeven door

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ S_1(0) \\ \vdots \\ S_N(0) \end{pmatrix}$$

Dan

$$(1) \Leftrightarrow \exists_{\pi \in \mathbb{R}_+^k} A\pi = b.$$

Eerste rij van  $A$  garandeert:  $\pi$  is kansmaat. Volgens Stelling 2.2 (Farkas) geldt

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow [\forall_{\text{portefeuille } H} A^t H \leq 0 \Rightarrow b \cdot H \leq 0] \\ &\Leftrightarrow [\forall_{\text{portefeuille } H} A^t H \geq 0 \Rightarrow b \cdot H \geq 0]. \end{aligned}$$

Dus logica geeft

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow [\forall_{\text{portefeuille } H, A^t H \geq 0} b \cdot H \geq 0] \\ &\Leftrightarrow \neg[\exists_{H, A^t H \geq 0} b \cdot H < 0]. \end{aligned}$$

Conclusie is dus

$$(1) \Leftrightarrow \neg \exists_{H, (1+r)^{-1} V_1^H(\omega_i) \geq 0, i=1, \dots, k} V^H(0) < 0.$$

en door  $H$  iets aan te passen is RL equivalent met

$$\neg \exists_{H, (1+r)^{-1} V_1^H(\omega_i) > 0, i=1, \dots, k} V^H(0) = 0,$$

en dus met (2). QED

**Gevolg:** Financiëel-economisch uitgangspunt zegt: (2) is waar. Conclusie: ook (1) is waar. Dus er

zal gewoonlijk een lineaire prijsmaat bestaan. Deze gaan we nu gebruiken om *prijzen van derivaten* te bepalen.

**Def.** Stochast  $X$  heet **repliceerbaar** als er een portefeuille  $H$  bestaat met  $X = V^H(1)$ .

Stochast  $X$  modelleert een stochastische uitbetaling op  $t = 1$ . Denk aan derivaten zoals opties e.d.

Het **geen dominantie prijsprincipe** is als volgt:

*Stel  $X$  repliceerbaar. Dan is op  $t = 0$  de verwachting  $E_\pi \frac{X}{1+r}$  een rationele prijs ervoor. Hier is  $\pi$  een lineaire prijsmaat.*

**Opm.** Bovenstaande prijs blijkt niet afhankelijk van welke lineaire prijsmaat  $\pi$  men precies kiest.

**Opm.** De oorspronkelijke kansmaat  $P$  op  $\Omega$  speelt vrijwel geen enkele rol in deze formule!

**Afleiding geen dominantie prijsprincipe:**

Noem die rationele prijs  $p$  en stel je had  $p < E_\pi \frac{X}{1+r}$ .

Er is een  $H$  met  $X = V_1^H$ , wegens repliceerbaarheid.

Gevolg:  $p < E_\pi \frac{V_H(1)}{1+r} = V^H(0)$ .

Koop nu op  $t = 0$  de portefeuille  $-H$  (minteken!) en koop ook  $X$ .

Netto opbrengst:  $V^H(0) - p > 0$ , want aankoop  $-H$  kost  $-V^H(0)$  – en brengt dus  $V^H(0)$  op – en aankoop  $X$  kost  $p$ . Dus je verdient eraan!

Op  $t = 1$  heffen  $X$  en  $-H$  elkaar op, want  $X = V^H(1)$ . Dus geen “naheffing”.

Nu heb je **gratis** en risicoloos een positief bedrag verdiend! Herhaal deze truc dan in het triljoen-voudige. Dat kan natuurlijk niet echt:  $p$  zal stijgen vanwege grote vraag naar  $X$ .

Conclusie:  $p < V^H(0)$  kan niet. Net zo:  $p > V^H(0)$  kan niet. Volgt:  $p = V^H(0)$ .

**Vb. (vervolgd).** Stel bezit van derivaat  $X$  garandeert op  $t = 1$  de volgende uitbetalingen:

Als  $\omega_1$  gebeurt, dan krijgt eigenaar  $X(\omega_1) = 10$  Euro.

Als  $\omega_2$  optreedt, dan krijgt eigenaar  $X(\omega_2) = 5$  Euro.

Wat is op  $t = 0$  een rationele prijs  $p$  voor dit derivaat?

Merk op:  $X$  is replicerbaar is, want  $X = V^H(1)$  zegt

$$(10, 5)^t = H_0\left(\frac{11}{10}, \frac{11}{10}\right)^t + H_1(1, 3)^t,$$

en dat geldt met  $H_0 = 125/11$  en  $H_1 = -5/2$ . Volgens bovenstaande is de rationele prijs  $p$  dus gelijk aan

$$p = \pi_1 \frac{10}{11} 10 + \pi_2 \frac{10}{11} 5 = \frac{70}{11} \text{ Euro},$$

wegens  $\pi_1 = 4/10$  en  $\pi_2 = 6/10$  uit eerdere voorbeeld.

**Opm.** Algemene prijstheorie véél gecompliceerder, want

Geen eindige ruimten  $\Omega$ .

Meer perioden  $t = 0, 1, \dots, T$ .

**Advies:** Houd financiële wiskunde in het oog vanwege de volgende niet-alledaagse combinatie:

- gebruik geavanceerde moderne wiskunde (maattheorie, PDV's, functionaalanalyse, stochastiek, ...),
- uitstekende beroepsmogelijkheden (banken, verzekeringsmaatschappijen).