Aantekeningen bij het college Functies en Reeksen

Erik van den Ban

Najaar 2011

1 Aantekeningen bij Hoofdstuk 1

Karakteriseringen van totale differentieerbaarheid, bewijs van Lemma 1.10

Het bewijs van Lemma 1.10 in het dictaat wordt componentsgewijs gegeven. Op college is het bewijs zonder ontbinding in componenten gegeven. We geven deze versie hier nogmaals.

We veronderstellen dat $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^p$ en dat $\xi \in \mathrm{inw}(X)$. Verder veronderstellen we f totaal differentieerbaar is in ξ, dwz. er is bestaat een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ zo dat

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\| f(x) - f(\xi) - A(x - \xi) \|}{\| x - \xi \|} = 0.$$

Schrijf $r(x) = f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)$, voor $x \in X$. Dan geldt wegens het bovenstaande dus dat

$$\lim_{x \to \xi} \frac{\| r(x) \|}{\| x - \xi \|} = 0.$$

We definiëren de afbeelding $L : X \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ door $L(\xi) = A$, en voor $x \in X \setminus \{\xi\}$ door

$$L(x) = A + \| x - \xi \|^{-2} r(x)(x - \xi)^{\mathrm{T}}.$$

Deze formule moet als volgt gelezen worden: $(x - \xi)^{\mathrm{T}}$ staat voor de rij matrix met componenten $(x_j - \xi_j)$, voor $1 \leq j \leq n$. Op deze manier kan $(x - \xi)^{\mathrm{T}}$ opgevat worden als lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. We merken op dat

$$(x - \xi)^T (v) = \langle\, x - \xi, v \,\rangle \qquad (v \in \mathbb{R}^n).$$

Verder moet $r(x)(x - \xi)^{\mathrm{T}}$ gelezen worden als de lineaire afbeelding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $v \mapsto (x - \xi)^{\mathrm{T}}(v) r(x)$. Voor alle $x \in X \setminus \xi$ geldt nu

$$\begin{aligned} L(x)(x - \xi) &= A(x - \xi) + \| x - \xi \|^{-2} r(x)(x - \xi)^T (x - \xi) \\ &= A(x - \xi) + \| x - \xi \|^{-2} \langle\, x - \xi, x - \xi \,\rangle r(x) \\ &= A(x - \xi) + r(x) \\ &= f(x) - f(\xi). \end{aligned}$$

Uiteraard geldt ook voor $x = \xi$ dat $L(x)(x - \xi) = f(x) - f(\xi)$.

Verder merken we op dat voor $x \in X \setminus \{\xi\}$ geldt dat

$$\begin{aligned} \| L(x) - L(\xi) \| &= \| x - \xi \|^{-2} \| r(x)(x - \xi)^T \| \\ &\leq \| x - \xi \|^{-2} \| r(x) \| \| (x - \xi)^{\mathrm{T}} \| \\ &= \frac{\| r(x) \|}{\| x - \xi \|}. \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking heeft limiet nul voor $x \to \xi$, en we concluderen dat $\lim_{x \to \xi} L(x) = L(\xi)$.

Het verband met de gewone afgeleide

Lemma. We beschouwen een functie $f : I \to \mathbb{R}^n$, met I een open interval. Zij $\tau \in I$. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.

(a) De functie f is differentieerbaar in τ in de oude zin (van Analyse A).

(b) De functie f is totaal differentieerbaar in τ.

Is f differentieerbaar in τ, dan wordt het verband tussen de twee afgeleiden gegeven door

$$f'(\tau) = Df(\tau)(1).$$

Bewijs: Veronderstel eerst dat (a) geldt, dus dat f differentieerbaar is in τ met afgeleide $f'(\tau) \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt dat

$$\lim_{t\to\tau} \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} = f'(\tau).$$

Definieer de lineaire afbeelding $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ door $A(v) = vf'(\tau)$, voor $v \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat

$$\lim_{t\to\tau} \frac{f(t) - f(\tau) - (t-\tau)f'(\tau)}{t - \tau} = 0,$$

dus ook

$$\lim_{t\to\tau} \frac{|f(t) - f(\tau) - A(t-\tau)|}{|t - \tau)|} = 0.$$

Hieruit blijkt dat f totaal differentieerbaar is in τ met totale afgeleide $Df(\tau) = A : h \mapsto hf'(\tau)$. In het bijzonder geldt dus $f'(\tau) = Df(\tau)(1)$. Hiermee is (b) aangetoond.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt, dus dat f totaal differentieerbaar is in τ met totale afgeleide $Df(\tau)$. Schrijf $a = Df(\tau)(1)$. Dan is $a \in \mathbb{R}^n$ en $Df(\tau)(h) = hDf(\tau)(1) = ha$ voor alle $h \in \mathbb{R}$. Er volgt dat

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\tau} \left| \frac{f(t) - f(\tau)}{t-\tau} - a \right| &= \lim_{t\to\tau} \left| \frac{f(t) - f(\tau) - (t-\tau)a}{t-\tau} \right| \\ &= \lim_{t\to\tau} \frac{|f(t) - f(\tau) - Df(\tau)(t-\tau)|}{|t-\tau|} = 0. \end{aligned}$$

Hieruit concluderen we dat f differentieerbaar is in τ in de zin van Analyse A, met als afgeleide $f'(\tau) = a = Df(\tau)(1)$.

Speciaal geval van de kettingregel

Veronderstel dat $I \subset \mathbb{R}$ en $Y \subset \mathbb{R}^n$ open deelverzamelingen zijn, $f : I \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}^p$ afbeeldingen, en $\tau \in I$ een punt zo dat f differentieerbaar is in τ en g totaal differentieerbaar is $f(\tau)$. Dan is $g \circ f : I \to \mathbb{R}^p$ differentieerbaar in τ, en er geldt dat

$$(g \circ f)'(\tau) = Dg(f(\tau)(f'(\tau)).$$

Bewijs: er geldt dat f totaal differentieerbaar is τ, en dat $f'(\tau) = Df(\tau)(1)$. Uit de kettingregel voor totale differentieerbaarheid volgt dat $g \circ f$ totaal differentieerbaar is in τ en dat

$$D(g \circ f)(\tau) = Dg(f(\tau)) \circ Df(\tau).$$

Hieruit volgt dat $g \circ f : I \to \mathbb{R}^p$ differentieerbaar is in de oude zin, en dat

$$(g \circ f)'(t) = D(g \circ f)(\tau)(1) = Dg(f(\tau) \circ Df(\tau)(1) = Dg(f(\tau)(f'(\tau)).$$

Dus (a) geldt. De laatste bewering is onderweg ook bewezen. $\square$

2 Aantekeningen bij Hoofdstuk 2

Verwisseling van de differentiatievolgorde

In het college hebben we paragraaf 2.1 over de verwisseling van limieten overgeslagen. Het daar verkregen resultaat, Lemma 2.1, is tamelijk lastig, en wordt vooral gebruikt in het bewijs van Stelling 2.4. Als we de voorwaarden in Stelling 2.4 iets sterker maken, dan wordt het bewijs van Stelling 2.4 gemakkelijker. In de onderstaande iets zwakkere versie van de stelling wordt de eis dat $D_1 D_2 f$ bestaat op V en continu is in (ξ, η) toegevoegd.

Stelling 2.4' Laat $V \subset \mathbb{R}^2$ een open deelverzameling zijn, en $f : V \to \mathbb{R}$ een partieel differentieerbare functie. Laat $(\xi, \eta) \in V$, en veronderstel dat aan de volgende voorwaarden voldaan is:

(a) $D_1 f$ is partieel differentieerbaar naar de tweede variabele;

(b) $D_2 f$ is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele;

(c) $D_2 D_1 f$ en $D_1 D_2 f$ zijn continu in (ξ, η).

Dan is

$$D_1 D_2 f(\xi, \eta) = D_2 D_1 f(\xi, \eta). \tag{\#}$$

Schets van het bewijs: We definiëren Q als in het bewijs in het dictaat, door de formule

$$Q(h, k) = (hk)^{-1} \left(f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi + h, \eta) - f(\xi, \eta + k) + f(\xi, \eta) \right). \tag{*}$$

Dan wordt (2.4) (zie dictaat) op de zelfde manier bewezen als in het dictaat. Dus

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q(h, k) = D_2 D_1 f(\xi, \eta).$$

We merken nu op dat de eerste en de tweede variabele in de definitie van Q precies dezelfde rol spelen. Bovendien zijn de eisen (a)-(c) door toevoeging van de extra eisen symmetrisch in de eerste en de tweede variabelen gemaakt. Hieruit volgt dat (2.4) ook geldt met verwisseling van de volgorde van de partiële afgeleiden. Dus:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} Q(h, k) = D_1 D_2 f(\xi, \eta).$$

Uit de uniciteit van de limiet leiden we (#) af. □

Oneigenlijke integralen

Het dictaat is erg summier wat betreft de behandeling van oneigenlijke integralen.

Laten we eerst het begrip oneigenlijke integraal precies invoeren. Veronderstel eerst dat $I \subset \mathbb{R}$ een interval van de vorm $I = [a, b[$ is, met $a < b \leq \infty$. Veronderstel nu dat $f : I \to \mathbb{R}$ een functie is, en veronderstel dat f Riemann-integreerbaar is over elk interval $[a, q] \subset I$, met $a < q < b$.

Definitie 2.1 De functie f heet oneigenlijk Riemann-integreerbaar over het interval $[a, b[$ indien de limiet

$$\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\, dx$$

bestaat. Is dit het geval, dan noemen we de limiet de oneigenlijke integraal van f over $[a, b[$ en we noteren hem met

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\, dx.$$

Indien de limiet niet bestaat, dan zeggen we ook wel dat de oneigenlijk integraal $\int_a^b f(x)\, dx$ divergeert. $\oslash$

Voorbeeld 2.2 We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^s$ op $I = [1, \infty[$, met $s \in \mathbb{R}$ een constante, ongelijk aan -1. Deze functie is continu, dus Riemann-integreerbaar op ieder deelinterval $[1, \beta] \subset I$. Voor $\beta > 1$ geldt dat

$$\int_0^\beta f(x)\, dx = \left. \frac{x^{s+1}}{s+1} \right|_0^\beta = \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1}. \tag{2.1}$$

De laatste uitdrukking heeft een limiet voor $\beta \uparrow \infty$ dan en slechts dan als $s + 1 < 0$. In dit geval is de functie f oneigenlijk Riemann integreerbaar over $[1, \infty[$, met als oneigenlijke integraal de limiet:

$$\int_1^\infty x^s\, dx = \lim_{\beta \to \infty} \frac{\beta^{s+1} - 1}{s+1} = -\frac{1}{s+1}, \qquad (s < -1).$$

De uitdrukking (2.1) heeft geen limiet voor $s > -1$, ofwel, de integraal divergeert in dat geval.

Tenslotte beschouwen we ook nog het geval dat $s = -1$. Dan heeft $f(x) = 1/x$ de functie $\log x$ als primitieve, en dus heeft

$$\int_1^\beta \frac{1}{x}\, dx = \log \beta$$

geen limiet voor $\beta \to \infty$. De bijbehorende integraal $\int_1^\beta x^{-1}\, dx$ is dan ook divergent. Samenvattend concluderen we dat het onderstaande lemma geldt. $\oslash$

Lemma 2.3 *Zij $s \in \mathbb{R}$. Dan convergeert de oneigenlijke Riemann-integraal*

$$\int_1^\infty x^s\, dx \tag{2.2}$$

dan en slechts dan als $s < -1$. In dat geval is de waarde van de integraal gelijk aan $1/(-s-1)$.

Soortgelijke beschouwingen als hier boven leiden tot het begrip van oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid op intervallen van de vorm $I =]a, b]$ met $-\infty \leq a < b < \infty$. Een interessant voorbeeld wordt gegeven door het onderstaande lemma.

Lemma 2.4 *Zij $s \in \mathbb{R}$. De oneigenlijke integraal*

$$\int_0^1 x^s\, dx$$

is convergent dan en slechts dan als $s > -1$. In dat geval is de oneigenlijke integraal gelijk aan $1/(s+1)$.

Bewijs De functie $f : x \mapsto x^s$ is continu op het interval $I =]0, 1]$, dus Riemann-integreerbaar op ieder deelinterval $[\alpha, 1] \subset I$. We veronderstellen eerst dat $s \neq -1$. Dan is $(s+1)^{-1}x^s$ primitieve van f, dus

$$\int_\alpha^1 x^s \, dx = \frac{1}{s+1} - \frac{\alpha^{s+1}}{s+1}$$

voor alle $0 < \alpha < 1$. We zien dat de limiet voor $\alpha \downarrow 0$ bestaat dan en slechts dan als $s > -1$. In dat geval geldt

$$\int_0^1 x^s = \frac{1}{s+1}.$$

We beschouwen tenslotte het geval dat $s = -1$. Dan heeft f de functie log als primitieve op I, zodat

$$\int_\alpha^1 x^{-1} \, dx = -\log \alpha.$$

Deze uitdrukking heeft geen limiet voor $\alpha \downarrow 0$, zodat de bijbehorende oneigenlijke integraal divergent is. Het lemma volgt. $\square$

Ook het geval van een tweezijdig open interval $I =]a, b[$, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$ dient bekeken te worden. Laat $f : I \to \mathbb{R}$ en veronderstel dat f Riemann-integreerbaar is over elk deelinterval $[\alpha, \beta] \subset I$ met $a < \alpha < \beta < b$. De volgende observatie is voor de hand liggend, maar belangrijk.

Lemma 2.5 *De volgende twee uitspraken zijn equivalent.*

(a) *Er is een $a < c < b$ zo dat f oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]a, c]$.*

(b) *Voor alle $a < c < b$ is de functie f oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $]a, c[$.*

Bewijs Zij $a < c < c' < b$. Dan geldt voor alle α met $a < \alpha < c$ dat

$$\int_\alpha^{c'} f(x) \, dx = \int_\alpha^{c} f(x) \, dx + \int_c^{c'} f(x) \, dx.$$

Hieruit blijkt dat de limiet voor $\alpha \downarrow a$ van de eerste integraal bestaat dan en slechts dan als de limiet van de tweede integraal bestaat. Dus f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $]a, c]$ dan en slechts dan als f oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]a, c']$. Bovendien geldt in dat geval dat

$$\int_a^{c'} f(x) \, dx = \int_a^{c} f(x) \, dx + \int_c^{c'} f(x) \, dx.$$

Het lemma volgt. $\square$

Uiteraard geldt een soortgelijk lemma met betrekking tot de bovengrens b van het interval. Dit maakt dat de volgende definitie zinvol is.

Definitie 2.6 Laat $I =]\,a, b\,[$ een open interval zijn, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Laat $f : I \to \mathbb{R}$. De functie f heet oneigenlijk Riemann-integreerbaar indien voldaan is aan de volgende eisen.

(a) de functie f is Riemann-integreerbaar over ieder deelinterval $[\alpha, \beta] \subset I$;

(b) er is een $c \in I$ zo dat f oneigenlijk Riemann-integreerbaar is over $]a, c]$ en over $[c, b[$.

Indien aan de bovenstaande eisen voldaan is, dan wordt de oneigenlijke integraal van f over I gedefinieerd door

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

$\oslash$

Opmerking. Conditie (a) zullen we in het vervolg ook wel samenvatten als:

(a)': de functie f is *lokaal Riemann-integreerbaar* op I.

Om in de praktijk ook daadwerkelijk te kunnen beslissen of een functie oneigenlijk integreerbaar is, is het volgende Cauchy criterium voor limieten belangrijk.

Stelling 2.7 (Cauchy-criterium voor limieten) *Laat V, W een tweetal metrische ruimten, en $F : V \supset D \to W$ een afbeelding. Zij $a \in \overline{D}$ en veronderstel dat W compleet is (d.w.z., iedere Cauchy rij in W convergeert). Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) *F(x) heeft een limiet voor $x \to a$;*

(b) *voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x, y \in V$ geldt:*

$$x, y \in B(a;\delta) \cap D \implies d_W(F(x), F(y)) < \epsilon.$$

Bewijs Stel (a), en noem de limiet b. Zij $\epsilon > 0$. Er bestaat een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in B(a;\delta) \cap D$ geldt dat $d_W(F(x), b) < \epsilon/2$. Veronderstel nu dat $x, y \in B(a;\delta) \cap D$. Dan geldt dat

$$d_W(F(x), F(y)) \leq d_W(F(x), b) + d_W(b, F(y)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon.$$

Hiermee is (b) bewezen. Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Kies een rij $(x_n)_{n\geq 0}$ in D met limiet a (zo'n rij bestaat, omdat a limietpunt van D is). We zullen eerst aantonen dat $(F(x_n))_{n\geq o}$ een Cauchy-rij in W is. Dit gaat als volgt. Zij $\epsilon > 0$. Er is een $\delta > 0$ met de in (b) geformuleerde eigenschap. Tevens is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n > N$ geldt dat $x_n \in B(a;\delta) \cap D$. Voor alle $n, m > N$ geldt dus dat $x_n, x_m \in B(a;\delta) \cap D$, dus wegens (b) ook

$$n, m > N \implies d_W(F(x_n), F(x_m)) < \epsilon.$$

De rij $(F(x_n))$ is dus inderdaad een Cauchy rij in W. Aangezien W volledig is, heeft de rij $(F(x_n))_{n\geq 0}$ een limiet $b \in W$. We zullen laten zien dat

$$\lim_{x\to a} F(x) = b. \tag{2.4}$$

Dit gaat als volgt. Laat $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ met de eigenschap van (b). Tevens is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $x_N \in B(a;\delta) \cap D$. Voor alle $x \in B(a;\delta) \cap D$ geldt nu $d_W(F(x), F(x_N)) < \epsilon/2$, dus

$$d_W(F(x), b) < d_W(F(x), F(x_n)) + d_W(F(x_n), b) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Hiermee is (2.4) aangetoond. $\square$

Op de gebruikelijke manier kunnen we hieruit het volgende concrete resultaat voor limieten van functies van een variabele afleiden.

Gevolg 2.8 *Laat $I =]a, b[$ een open interval zijn met met $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Laat $F : I \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) $\lim_{x \uparrow b} F(x)$ *bestaat;*

(b) *voor elke $\epsilon > 0$ bestaat een $\beta \in I$ zo dat voor alle $x, y \in I$:*

$$x, y > \beta \implies |F(x) - F(y)| < \epsilon.$$

Uiteraard bestaat een soortgelijk resultaat ten aanzien van de ondergrens van I.

Stelling 2.9 *Laat $I =]a, b[$ een open interval zijn, met $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Veronderstel dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ locaal Riemann-integreerbaar zijn, en dat $|f| \leq g$ op I. Indien g oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op I, dan is f dat ook, en er geldt bovendien dat*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Bewijs Uit de voorwaarden blijkt in het bijzonder dat $g \geq 0$ op het interval I.

Laat $a < c < b$. We laten eerst zien dat f Riemann-integreerbaar is op $[c, b[$. Schrijf

$$F(\xi) = \int_c^\xi f(x)\, dx \quad \text{en} \quad G(\xi) = \int_c^\xi g(x)\, dx,$$

voor $\xi \in [c, b[$. De belangrijke opmerking is nu dat voor alle $p, q \in [c, b[$ met $q \geq p$ geldt dat

$$\begin{aligned} |F(p) - F(q)| &= \left| \int_p^q f(x)\, dx \right| \leq \int_p^q |f(x)|\, dx \\ &\leq \int_p^q g(x)\, dx = |G(p) - G(q)|. \end{aligned}$$

Aangezien g oneigenlijk Riemann-integreerbaar is, bestaat de limiet $\lim_{\xi \uparrow b} G(\xi)$. Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er wegens het Cauchy-criterium voor G een $\beta \in [c, b[$ zo dat voor alle $p, q \in [c, b[$ met $p, q > \beta$ geldt dat

$$|G(q) - G(p)| < \epsilon.$$

Hieruit volgt dat voor alle $p, q \in I$ met $p, q > \beta$ geldt dat

$$|F(q) - F(p)| \leq |G(q) - G(p)| < \epsilon.$$

Met het Cauchy-criterium concluderen we nu dat $F(\xi)$ een limiet heeft voor $\xi \uparrow b$. Dus f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar over $[c, b[$. Voor alle $\xi \in [c, b[$ geldt

$$\left| \int_c^\xi f(x)\, dx \right| \leq \int_c^\xi g(x)\, dx.$$

Door de limiet voor $\xi \uparrow b$ te nemen en te gebruiken dat niet-strikte ongelijkheden behouden blijven onder limietname concluderen we de ongelijkheid

$$\left| \int_c^b f(x)\, dx \right| \leq \int_c^b g(x)\, dx.$$

Op soortgelijke manier leiden we af dat f oneigenlijk integreerbaar is over $]a, c]$ en dat

$$\left| \int_a^c f(x)\, dx \right| \leq \int_a^c g(x)\, dx.$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| &= \left| \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \right| \\ &\leq \left| \int_a^c f(x)\, dx \right| + \left| \int_c^b f(x)\, dx \right| \\ &\leq \int_a^c g(x)\, dx + \int_c^b g(x)\, dx \\ &= \int_a^b g(x)\, dx. \end{aligned}$$

□

Voorbeeld 2.10 We beschouwen nu de integraal voor de Gamma functie:

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \tag{2.5}$$

met $x > 0$.

Voor $t \in]0, 1]$ geldt dat $|t^{x-1} e^{-t}| \leq t^{x-1}$ en $\int_0^1 t^{x-1}\, dt$ convergeert, dus ook

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

convergeert.

Zij $N \in \mathbb{N}, N > x - 1$. Dan geldt voor $t \geq 1$ dat $t^{x-1} e^{-t} \leq t^N e^{-t}$. Uit $\lim_{t\to\infty} t^N e^{-t/2} = 0$ volgt het bestaan van een constante $C > 0$ zo dat

$$t^N e^{-t} \leq C e^{-t/2}, \qquad (t \geq 1).$$

Omdat de integraal $\int_1^\infty e^{-t/2}\, dt$ convergent is, concluderen we nu dat

$$\int_1^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

convergent is.

We concluderen hieruit tenslotte dat de integraal (2.5) convergent is voor alle $x > 0$. ⊘

Uit het majorantiekenmerk voor de convergentie van oneigenlijke integralen volgt het eveneens gemakkelijk hanteerbare limietkenmerk.

Gevolg 2.11 (Limietkenmerk) *Laat I een interval van de vorm $[c, b[$ zijn, met $-\infty < c < b \leq \infty$. Veronderstel voorts dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ lokaal Riemann-integreerbare functies zijn, terwijl $g > 0$ op I en*

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{|f(x)|}{g(x)} = L \in [0, \infty[.$$

Als g oneigenlijk integreerbaar is op I, dan is f dat ook.

Bewijs Er bestaat een $\beta > 0$ zo dat $||f(x)|/g(x) - L| < 1$ voor alle $x \in [\beta, b[$. Hieruit volgt dat $|f(x)| \leq (L+1)g(x)$ voor al dergelijke x. De functie $(L+1)g(x)$ is oneigenlijk integreerbaar over I, dus ook over $[\beta, b[$, en wegens het majorantiekenmerk volgt dat f oneigenlijk integreerbaar is over $[\beta, b[$. Hieruit volgt dat f oneigenlijk integreerbaar is over I. $\square$

Opmerking 2.12 Uiteraard geldt een soortgelijk limietkenmerk voor lokaal integreerbare functies op een interval van de vorm $I =]a, c]$, met $-\infty \leq a < c < \infty$. $\oslash$

Ook voor oneigenlijke integralen geldt een verwisselingsstelling met limieten. We bewijzen eerst een technisch resultaat, dat ook in het dictaat gegeven wordt (Opmerking 2.8). Daaruit leiden we dan een majorantiecriterium af dat in de praktijk vaak goed werkt.

Lemma 2.13 *Laat $I =]a, b[$ een open interval zijn met $-\infty \leq a < b \leq \infty$, V een metrische ruimte, en $f : V \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel verder dat de volgene voorwaarden vervuld zijn:*

(a) *Voor elke $x \in V$ is de functie $t \mapsto f(x, t)$ oneigenlijk integreerbaar over I.*

(b) *Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaan $\alpha, \beta \in I$ zo dat voor alle $x \in V$ geldt dat:*

$$\left| \int_a^\alpha f(x, t)\, dt \right| < \epsilon \quad \text{en} \quad \left| \int_\beta^b f(x, t)\, dt \right| < \epsilon.$$

Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\, dt$$

continu.

Bewijs Laat $\xi \in V$. Dan is het voldoende de continuïteit van F in het punt ξ aan te tonen. Zij $\epsilon > 0$. Dan bestaan er $\alpha, \beta \in I$ zo dat $a < \alpha < \beta < b$ en zo dat

$$\left| \int_a^\alpha f(x, t)\, dt \right| < \epsilon/5 \quad \text{en} \quad \left| \int_\beta^b f(x, t)\, dt \right| < \epsilon/5,$$

voor alle $x \in V$. Uit de Stelling 2.5 (dictaat) volgt dat de functie

$$F_0 : x \mapsto \int_\alpha^\beta f(x, t)\, dt$$

continu is op V, dus in het bijzonder in ξ. Er bestaat dus een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in B(\xi; \delta)$ geldt dat

$$|F_0(x) - F_0(\xi)| < \epsilon/5.$$

We merken nu op dat voor alle $x \in B(\xi; \delta)$ geldt dat

$$F(x) = \int_a^\alpha f(x,t)\, dt + F_0(x) + \int_\beta^b f(x,t)\, dt,$$

dus

$$\begin{aligned} |F(x) - F(\xi)| &\leq |F_0(x) - F_0(\xi)| \\ &+ \left|\int_a^\alpha f(x,t)\, dt\right| + \left|\int_a^\alpha f(\xi,t)\, dt\right| + \left|\int_\beta^b [f(x,t)\, dt\right| + \left|\int_\beta^b f(\xi,t)\, dt\right| \\ &< \epsilon/5 + 4\epsilon/5 = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Uit het bovenstaande leiden we het volgende practisch goed toepasbare majorantiecriterium af.

Stelling 2.14 *Laat $I\ =]a, b[$ een open interval zijn met $-\infty \leq a < b \leq \infty$, V een metrische ruimte, en $f : V \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Veronderstel verder dat er een oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $g : I \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat*

$$|f(x,t)| \leq g(t) \qquad \text{voor alle} \quad (x,t) \in V \times I.$$

Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$$

continu.

Bewijs We zullen laten zien dat de voorwaarden Lemma 2.13 vervuld zijn. Zij $x \in V$. Dan is de functie $f_x : t \mapsto f(x,t)$, $I \to \mathbb{R}$ continu, dus lokaal Riemann-integreerbaar, terwijl $|f_x| \leq g$ op I. Dus f_x is oneigenlijk integreerbaar wegens Stelling 2.9. Hiermee is voorwaarde (a) aangetoond. Zij $\epsilon > 0$ en zij $c \in I$. Uit de oneigenlijke Riemann-integreerbaarheid van g volgt het bestaan van een $a < \alpha < c$ zo dat

$$\left|\int_a^\alpha g(t)\, dt\right| = \left|\int_a^c g(t)\, dt - \int_\alpha^c g(t)\, dt\right| < \epsilon.$$

Volgens Stelling 2.9 geldt nu ook, voor elke $x \in V$, dat

$$\left|\int_a^\alpha f(x,t)\, dt\right| \leq \int_a^\alpha g(t)\, dt < \epsilon.$$

Op soortgelijke wijze volgt de tweede ongelijkheid uit voorwaarde (b). □

Het idee van de voorwaarde in Stelling 2.14 is dat $t \mapsto f(x,t)$ gedomineerd wordt door de oneigenlijk integreerbare (niet-negatieve) functie $t \mapsto g(t)$, met uniformiteit in de parameter $x \in V$. Dit dwingt de voorwaarden van Lemma 2.13 af.

Er is ook een versie van differentiatie onder het integraalteken voor oneigenlijke integralen. Ook dit gaat weer in termen van een geschikte uniforme dominantie.

Stelling 2.15 *Zij $X \subset \mathbb{R}$ een open interval en $I =]a,b[$ een open interval met $-\infty \le a < b \le \infty$. Zij verder $f : X \times I \to \mathbb{R}$ een continue functie die voldoet aan de volgende eigenschappen.*

(a) *voor alle $x \in V$ is de functie $f_x : t \mapsto f(x,t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I;*

(b) *de functie f is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele, en er is een oneigenlijk Riemann-integreerbare functie $g : I \to \mathbb{R}$ zo dat*

$$|D_1 f(x,t)| \le g(t) \qquad \text{voor alle} \quad (x,t) \in X \times I.$$

Dan is de functie $F : V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$$

(continu) differentieerbaar op V en er geldt dat

$$F'(x) = \int_a^b D_1 f(x,t)\, dt. \tag{2.6}$$

Bewijs Zij $\xi \in X$. We zullen de differentieerbaarheid van F in ξ aantonen. Hiertoe definiëren we in navolging van het dictaat de functie $q : X \times I \to \mathbb{R}$ door

$$q(x,t) = \frac{f(x,t) - f(\xi,t)}{x - \xi}, \qquad (x \in X \setminus \{\xi\}, \quad t \in I),$$

en

$$q(\xi,t) = D_1 f(\xi,t), \qquad (t \in I).$$

Dan is de functie q continu op $X \times I$. We zullen laten zien dat voor alle $x \in X$ en $t \in I$ geldt dat

$$|q(x,t)| \le g(t). \tag{2.7}$$

Voor $x = \xi$ volgt dit uit de voorwaarde (b). Laat $(x,t) \in X \setminus \{\xi\} \times I$. Dan geldt vanwege de middelwaardestelling toegepast op de eerste variabele van f dat er een tussen ξ en x gelegen $\eta = \eta(x,t)$ bestaat zo dat $q(x,t) = D_1 f(\eta,t)$. De schatting (2.7) volgt nu ook uit voorwaarde (b).

Wegens het majorantiekenmerk is de functie $q : t \mapsto q(x,t)$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar over I, voor elke $x \in X$. Wegens Stelling 2.14 is de functie $Q : X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$Q(x) = \int_a^b q(x,t)\, dt$$

continu op X, dus in het bijzonder in ξ. Uit de definities volgt direct dat

$$F(x) - F(\xi) = Q(x)(x - \xi)$$

voor alle $x \in X \setminus \{\xi\}$. En uiteraard is de bewering ook geldig voor $x = \xi$. Omdat Q continu is in ξ leiden we hieruit af dat F differentieerbaar is in ξ, en dat de afgeleide gegeven wordt door

$$F'(x) = Q(\xi) = \int_a^b D_1 f(\xi,t)\, dt.$$

Hieruit volgt dat F differentieerbaar is op X. Uit de formule (2.6) volgt door toepassing van Stelling 2.14 dat de afgeleide continu is. $\square$

Voorbeeld 2.16 We passen het bovenstaande toe op de Gamma functie

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad (x > 0).$$

Zij $0 < a < b$ en $X =]a, b[$. Dan geldt voor alle $t \in]0, 1]$ dat $t^{x-1} = e^{(x-1)\log t} \leq t^{a-1}$. De functie $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$ is continu op $]a, b[\times]0, 1]$ en voor alle $(x, t) \in X\times]0, 1]$ geldt dat $|f(x, t)| \leq g(t) := t^{a-1}e^{-t}$, terwijl g oneigenlijk integreerbaar is, dus

$$F_0 : x \mapsto \int_0^1 t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

definieert een continue functie op X.

Anderzijds is f ook continu op $]a, b[\times[1, \infty[$, terwijl op deze verzameling een majorantie van de vorm $|f(t, x)| \leq t^{b-1}e^{-t}$ bestaat. De laatste functie is weer oneigenlijk integreerbaar op $]1, \infty[$, dus

$$F_1 : x \mapsto \int_1^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

definieert een continue functie op $]a, b[$. Hieruit volgt dat $\Gamma = F_0 + F_1$ continu is op $]a, b[$. Aangezien a, b willekeurig waren volgt dat Γ continu is op $]0, \infty[$. $\oslash$

Voorbeeld 2.17 We tonen aan dat de Gamma-functie willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0, \infty[$, terwijl

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^k t^{x-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad (k \in \mathbb{N},\ x > 0).$$

Hiertoe laten we eerst zien dat de gegeven integraal convergeert, voor gegeven $k \in \mathbb{N}$ en $x > 0$. Schrijf $f_k(x, t)$ voor de integrand, en veronderstel dat k en x vast zijn.

Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan is

$$\lim_{t\downarrow 0}\ (\log t)^k t^\epsilon = 0,$$

dus er bestaat een constant $C > 0$ zo dat $(\log t)^k \leq Ct^\epsilon$ voor alle $t \in]0, 1]$. Dit geeft een schatting van het type

$$|f_k(x, t)| \leq C_\epsilon t^{x-1-\epsilon}, \qquad (0 < t \leq 1).$$

Hierbij kunnen we $\epsilon > 0$ kiezen met $\epsilon < x$, zodat de integrand op $]0, 1]$ gedomineerd wordt door de oneigenlijk integreerbare functie $C_\epsilon t^{x-1-\epsilon}$. Hieruit volgt de convergentie van $\int_0^1 f_k(x, t)\, dt$.

Voor de integratie over $[1, \infty[$ merken we op dat

$$\lim_{t\to\infty} (\log t)^k t^N e^{-t/2} = 0$$

voor alle $k, N \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat er een $C_k > 0$ bestaat zo dat

$$|f_k(x, t)| \leq C_k e^{-t/2} \qquad (t \geq 1).$$

Hieruit volgt de convergentie van $\int_1^\infty f(x, t)\, dt$.

Laat nu $0 < a < b$ zijn, en veronderstel dat $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt voor alle $x \in]a, b[$ dat

$$|f_k(x, t)| \leq |f_k(a, t)|, \qquad (0 < t \leq 1),$$

en dat

$$|f_k(x,t)| \leq |f_k(b,t)|, \qquad (t \geq 1).$$

Voor alle $k \in \mathbb{N}, x > 0, t > 0$ geldt dat

$$\frac{\partial}{\partial x} f_k(x,t) = f_{k+1}(x,t).$$

Het resultaat volgt nu met inductie naar k, door toepassing van Stelling 2.15. ⊘

Extra vraagstukken Hoofdstuk 2

Vraagstuk 2.14 Gegeven is een continue functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Toon aan dat de integraal

$$\int_0^1 f(t)\, t^x (1-t)^y \, dt$$

convergent is voor $x, y > -1$, en op dat gebied een continue functie van (x, y) definieert. ⊘

Vraagstuk 2.15 Gegeven is een continue functie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ met $f(0) = 1$. Toon aan dat de integraal

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{t} \, dt$$

divergeert. ⊘

Vraagstuk 2.16 Toon aan de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} \, dt$$

convergeert. ⊘

Vraagstuk 2.17

(a) Toon aan dat de oneigenlijke integraal

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

convergeert.

(b) Toon aan dat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$$

convergeert. Hint: dit lukt niet met het majorantie-criterium. Beschouw de integraal $\int_1^\beta \frac{\sin t}{t}\, dt$ en gebruik partiële integratie om de integraal te vergelijken met de integraal in (a).

$\oslash$

Vraagstuk 2.18 We bekijken nogmaals de volgende oneigenlijke integraal uit Vraagstuk 2.6:

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{1}{x^2+t}\, dx, \qquad (t > 0).$$

Gebruik in de volgende onderdelen direct de behandelde stellingen over oneigenlijke integratie.

(a) Laat zien dat de integraal convergeert voor iedere $t > 0$.

(b) Bewijs dat de functie F continu differentieerbaar is, met afgeleide

$$F'(t) = -\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+t)^2}\, dt.$$

(c) Toon aan dat voor $k \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^{k+1}}\, dx = \frac{(2k)!\pi}{2^{2k+1}(k!)^2}.$$

$\oslash$

Vraagstuk 2.19

(a) Laat zien dat door

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\cos(xt)\, dt$$

een continu differentieerbare functie gedefinieerd wordt.

(b) Toon aan dat $xf(x) = -2f'(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Toon aan dat

$$f(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4},$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Hint: differentieer de functie $g(x) = f(x)e^{x^2/4}$.

$\oslash$

3 Aantekeningen bij Hoofdstuk 5

Over machtreeksen

Op het college zijn de volgende resultaten behandeld, die niet direkt in het diktaat te vinden zijn.

Lemma 5.1 *Laat $a_k \in \mathbb{C}$, voor $k \in \mathbb{N}$. Dan geldt:*

$$\sum_{k\geq 0} a_k \ \text{convergent} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Bewijs Schrijf $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Dan heeft de complexe rij $(s_n)_{n\geq 0}$ een limiet die we noteren met s. Dus $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Hieruit volgt dat ook $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Anderzijds geldt $a_n = s_n - s_{n-1}$. Met de somregel voor limieten leiden we nu af dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

□

Laat $a \in \mathbb{C}$ en $r > 0$. In het vervolg zullen we de notatie

$$D(a;r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$$

gebruiken voor de open schijf (Engels: disk) met middelpunt a en straal r. Merk op dat we voor deze verzameling, gezien als metrische ruimte, ook wel de notatie $B(a;r)$ gebruikt hebben. Tevens zullen we de notatie

$$\bar{D}(a;r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$$

voor de gesloten schijf gebruiken.

Lemma 5.2 *Laat de machtreeks $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ convergent zijn voor $z = z_0$. Dan is de machtreeks uniform absoluut convergent op iedere gesloten schijf $\bar{D}(0;r)$, voor $0 < r < |z_0|$.*

Bewijs Uit de convergentie van de reeks volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$. Derhalve is de rij $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ begrensd, dus er bestaat een $M > 0$ zo dat $|a_n z_0^n| \leq M$. Zij $0 < r < |z_0|$. Dan geldt voor alle $z \in \bar{D}(0;r)$ dat

$$|a_n z^n| = \left| |a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leq M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n.$$

De meetkundige reeks $\sum_{n\geq 0}(r/|z_0|)^n$ is convergent. Met het majorantiekenmerk volgt nu dat $\sum a_n z^n$ uniform convergent is op $\bar{D}(0;r)$. □

Gevolg 5.3 *Veronderstel dat de machtreeks $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ convergent is voor $z = z_0$. Dan wordt door*

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

een continue functie $D(0;|z_0|) \to \mathbb{C}$ gedefinieerd.

Bewijs Zij $a \in D(0;|z_0|)$. Dan is er een $r > 0$ met $|a| < r < |z_0|$. De machtreeks in uniform absoluut convergent, dus uniform convergent op $\bar{D}(0;r)$, dus $f|_{\bar{D}(0;r)}$ is continu. Hieruit volgt in het bijzonder de continuïteit van f in het punt a. □

Complexe differentieerbaarheid

Voor functies $\mathbb{C} \supset\!\!\!\to \mathbb{C}$ bestaat een speciaal begrip van differentieerbaarheid.

Definitie 5.4 Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open verzameling, $f : U \to \mathbb{C}$ een functie en $a \in \mathbb{C}$. De functie f heet complex differentieerbaar in het punt a indien de limiet

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{5.1}$$

bestaat. Is dit het geval heet de limiet de complexe afgeleide van f in het punt a, en wordt hij genoteerd met

$$f'(a) = \frac{df}{dz}(a).$$

De functie f heet complex differentieerbaar op U indien hij complex differentieerbaar is in ieder punt van U. $\oslash$

Deze definitie vertoont veel gelijkenis met de definitie van differentieerbaarheid voor functies $\mathbb{R} \supset\!\!\!\to \mathbb{R}$. Het is dan ook niet verbazend dat bekende rekenregels zoals de somregel, productregel en quotiëntregel doorgaan voor dit nieuwe begrip van afgeleide.

Voorbeeld 5.5 Door herhaald toepassen van de productregel leiden we af dat de functie $z \mapsto z^n$ complex differentieerbaar is met afgeleide:

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}.$$

$\oslash$

Ook de alternatieve karakterisering van differentieerbaarheid kan in deze context bewezen worden.

Lemma 5.6 *Zij $U \subset \mathbb{C}$ open, $a \in \mathbb{C}$ en $f : U \to \mathbb{C}$ een functie. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *De functie f is complex differentieerbaar in a.*

(b) *Er bestaat een functie $\varphi : U \to \mathbb{C}$, continu in a, zo dat*

$$f(z) - f(a) = \varphi(z)(z - a).$$

Indien (a) en (b) gelden, dan is $\varphi(a) = f'(a)$.

Het bewijs van deze stelling is in essentie identiek aan dat van de overeenkomstige stelling voor functies van een reële variabele (zie het diktaat Inleiding Analyse), met dien verstande dat overal $\mathbb{R}$ vervangen dient te worden door $\mathbb{C}$.

Uit het bovenstaande lemma volgt weer gemakkelijk de volgende kettingregel. Het bewijs is in essentie identiek aan het bewijs dat gegeven wordt in het dictaat Inleiding Analye.

Lemma 5.7 *Laat $U, V \subset \mathbb{C}$ open verzamelingen zijn, $f : U \to \mathbb{C}$ en $g : V \to \mathbb{C}$ functies met $f(U) \subset V$. Veronderstel dat f complex differentieerbaar is in a en g differentieerbaar in $f(a)$. Dan is de samenstelling $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ differentieerbaar in a, met afgeleide*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a).$$

In het vervolg veronderstellen we dat $U \subset \mathbb{C}$ open is, dat $a \in \mathbb{C}$ en dat $f : U \to \mathbb{C}$. Aangezien $\mathbb{C}$ opgevat kan worden als $\mathbb{R}^2$ met de extra structuur van complexe vermenigvuldiging, kunnen we spreken over partiële differentieerbaarheid en totale differentieerbaarheid van f in a. Hieronder beschrijven we het verband met complexe differentieerbaarheid.

Het verband met totale differentieerbaarheid wordt door de volgende stelling gegeven.

Lemma 5.8 *De volgende uitspraken zijn equivalent.*

(a) *De functie f is complex differentieerbaar in a.*

(b) *De functie $f : U \to \mathbb{C}$ is totaal differentieerbaar in a en de reëel lineaire afbeelding $Df(a) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is ook complex lineair, dwz voldoet aan*

$$Df(a)(iw) = iDf(a)(w)$$

voor alle $w \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Als (a) en (b) gelden dan wordt het verband tussen complexe en totale afgeleide gegeven door

$$Df(a)(w) = f'(a)w \qquad (w \in \mathbb{C}).$$

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt. Dan is er een $\varphi : U \to \mathbb{C}$ die voldoet aan de voorwaarden van Lemma 5.6. De afbeelding $w \mapsto \varphi(z)w$ is reëel lineair als afbeelding $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Hieruit volgt dat f tevens totaal differentieerbaar is in a, met totale afgeleide $Df(a) : w \mapsto \varphi(a)w = f'(a)w$.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Schrijf $\alpha = Df(a)(1)$. Dan geldt vanwege de complexe lineariteit dat $Df(a)(i) = iDf(a)(1) = i\alpha$, dus

$$Df(a)(u + iv) = u\alpha + vi\alpha = \alpha(u + iv)$$

voor alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Hieruit leiden we af dat

$$\left| \frac{f(z) - f(a) - \alpha(z - a)}{z - a} \right| = \frac{|f(z) - f(a) - Df(a)(z - a)|}{|z - a|} \to 0$$

voor $z \to a$. We concluderen dat

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - \alpha = 0$$

Dus f is complex differentieerbaar in a, met afgeleide $f'(a) = Df(a)(1)$.

De laatste bewering is in het bovenstaande eveneens bewezen. $\square$

Gevolg 5.9 *Veronderstel dat $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is in $a \in U$. Dan is f ook partieel differentieerbaar in a en er geldt dat*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a).$$

Bewijs Uit het voorgaande resultaat volgt dat f totaal differentieerbaar is in a. Dus f is partieel differentieerbaar in a, met partiële afgeleiden:

$$D_1 f(a) = Df(a)(1,0) = Df(a)(1) = f'(a) \cdot 1 = f'(a)$$

en

$$D_2 f(a) = Df(a)(0,1) = Df(a)(i) = iDf(a)(1) = if'(a).$$

□

Opmerking 5.10 Is $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar in a, dan geldt wegens het bovenstaande dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a). \tag{5.2}$$

Ontbinden we f in reëel en imaginair deel, $f = f_1 + if_2$, dan geldt dat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f_2}{\partial x}(a), \quad \text{en} \quad \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = -i\frac{\partial f_1}{\partial y}(a) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a)$$

We kunnen derhalve de vergelijking (5.2) componentsgewijs herschrijven als

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(a) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(a), \quad \text{en} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(a).$$

Deze vergelijkingen staan bekend als de Cauchy-Riemann vergelijkingen. ⊘

Lemma 5.11 *Laat $f : U \to \mathbb{C}$ een functie zijn, $U \subset \mathbb{C}$ open. Dan zijn de volgende beweringen equivalent.*

(a) *f is complex differentieerbaar op U en f' is continu op U;*

(b) *f is partieel differentieerbaar op U, en de partiële afgeleiden $D_1 f$ en $D_2 f$ zijn continu en voldoen aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen.*

Bewijs De implicatie '$(a) \implies (b)$' is in het bovenstaande reeds bewezen.

Veronderstel nu (b). Dan is f totaal differentieerbaar op U en voor de totale afgeleide Df geldt dat

$$Df(z)(i) = Df(z)(0,1) = D_2 f(z) = iD_1 f(z) = iDf(z)(1).$$

Combineren we dit met de lineariteit van $Df(z)$ over $\mathbb{R}$, dan zien we dat

$$Df(z)(u+iv) = uDf(z)(1) + vDf(z)(i) = (u+iv)Df(z)(1).$$

Hieruit volgt de complexe lineariteit van $Df(z)$ voor elke $z \in U$. Met Lemma 5.8 volgt nu dat (a) geldt. □

5.1 Differentieerbaarheid van machtreeksen

Een functie gedefinieerd door een machtreeks, kan gedifferentieerd worden door de machtreeks term voor term te differentiëren. De volgende twee lemmas dienen als voorbereiding op dit resultaat.

Lemma 5.12 *De machtreeks $\sum_{n\geq 1} nz^n$ heeft convergentiestraal* 1.

Bewijs Er geldt dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Hieruit volgt (zie extra opgave) dat $\limsup_{n\to\infty} |n|^{1/n} = 1$. De convergentiestraal van de machtreeks is dus 1. □

Lemma 5.13 *Zij ρ de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Dan heeft de machtreeks*

$$\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \tag{5.3}$$

die hieruit door termsgewijze differentiatie ontstaat ook convergentiestraal ρ.

Bewijs Stel dat $|z| < \rho$. Kies een willekeurig reëel getal r zo dat $|z| < r < \rho$. Uit de convergentie van $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$, dus er bestaat een $M > 0$ zo dat voor alle n geldt $|a_n r^n| \leq M$, ofwel

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n},$$

dus

$$|n a_n z^{n-1}| \leq nM\left(\frac{|z|}{r}\right)^n.$$

Volgens Lemma 5.12 heeft de reeks $\sum nw^n$ convergentiestraal 1. Met het majorantiecriterium zien we nu dat de reeks (5.3) convergeert voor $|z| < r$. Dit geldt voor iedere $r < \rho$, dus de reeks (5.3) heeft convergentiestraal minstens ρ. De convergentiestraal kan echter niet groter dan ρ zijn. Want in dat geval zou er een z met $|z| > \rho$ bestaan waarvoor de reeks (5.3) absoluut convergeert. Wegens

$$|a_n z^n| \leq |n a_n z^{n-1}|$$

voor $n \geq |z|$ zou daaruit met het majorantiekenmerk de absolute convergentie van de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ volgen, tegenspraak. □

Stelling 5.14 *Laat $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ convergentiestraal ρ hebben. Dan is de functie $f : D(0;\rho) \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

complex differentieerbaar, met afgeleide gegeven door

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} \quad (|z| < \rho).$$

Bewijs Fixeer z_0 met $|z_0| < \rho$; kies r zo dat $|z_0| < r < \rho$. We definiëren een rij functies $(g_n)_{n\geq 1}$ op de gesloten schijf $\bar{D}(0; r)$ door:

$$g_n(w) = a_n \frac{w^n - z_0^n}{w - z_0} \tag{5.4}$$

als $w \neq z_0$, en door $g_n(z_0) = n z_0^{n-1}$. Zij voorts g_0 de constante functie 0. Dan is elke functie g_n continu in z_0. Verder is voor elke w met $|w| \leq r$:

$$|g_n(w)| = |a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z_0 + ... + z_0^{n-1})| \leq n|a_n|r^{n-1}.$$

Uit het uniforme majorantiekenmerk volgt nu dat de reeks $\sum_{n\geq 0} g_n$ uniform convergeert op $|w| \leq r$. De somfunctie is derhalve continu in z_0, dus

$$\lim_{w\to z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = \lim_{w\to z_0} \sum_{n\geq 0} g_n(w) = \sum_{n\geq 0} g_n(z_0).$$

Hieruit volgt dat f complex differentieerbaar is in z_0, met de gewenste afgeleide. □

Door herhaald toepassen van de bovenstaande stelling volgt direkt:

Gevolg 5.15 *Een machtreeks stelt binnen zijn convergentiecirkel een willekeurig vaak complex differentieerbare functie voor. Heeft $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ convergentiestraal $\rho > 0$ en is*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \qquad (|z| < \rho),$$

dan is $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

Gevolg 5.16 *Zij $r > 0$ en veronderstel dat de complexe machtreeksen $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ en $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ convergent zijn op $D(0; r)$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *$a_n = b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;*

(b) *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ voor alle $z \in D(0; r)$.*

Bewijs De implicatie '$(a) \implies (b)$' is evident. De andere implicatie is een direct gevolg van Gevolg 5.15. □

We kunnen Stelling 5.14 gebruiken om de complexe e-macht in te voeren.

Stelling 5.17 *Er is een unieke complex differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ met $f' = f$ en $f(0) = 1$. Deze functie voldoet aan*

$$f(z + w) = f(z)f(w), \qquad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{5.5}$$

en wordt gegeven door

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{5.6}$$

Bewijs Uit de theorie van de Taylorreeks met rest volgt dat de reeks 5.6 convergeert voor alle $z \in \mathbb{R}$. Met Lemma 5.2 volgt hieruit dat de reeks convergeert voor alle $z \in \mathbb{C}$. We definiëren de functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door (5.6). Met Lemma 5.13 volgt hier weer uit dat f complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$, met afgeleide $f' = f$. Het is evident dat $f(0) = 1$, dus het bestaan van f is aangetoond.

We gaan nu de uniciteit van f en tegelijkertijd (5.5) aantonen. De functie $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, gedefinieerd door

$$\varphi(z) := f(z)f(-z)$$

is complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$, met afgeleide gelijk aan:

$$\varphi'(z) = f'(z)f(z) - f(z)f'(z) = 0$$

(gebruik produkt en kettingregel). Wegens de Cauchy-Riemann vergelijkingen volgt hieruit dat $D_1\varphi = D_2\varphi = 0$, dus φ is constant op $\mathbb{C}$. Door $z = 0$ te substitueren vinden we dat $\varphi = 1$, dus $f(z)f(-z) = 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Hieruit concluderen we dat $f(z) \neq 0$ voor alle z en

$$f(z)^{-1} = f(-z).$$

Laat $w \in C$ willekeurig, maar vast zijn. Laat $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar zijn en voldoen aan $g' = g$ en $g(0) = 1$. Dan is de functie $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$h(z) := f(z)^{-1}g(z + w)$$

complex differentieerbaar, met afgeleide

$$\begin{aligned} h'(z) &= -f(z)^{-2}f'(z)g(z + w) + f(z)^{-1}g'(z + w) \\ &= -f(z)^{-1}g(z + w) + f(z)^{-1}g(z + w) = 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat h constant is en gelijk aan $h(0) = g(w)$. We concluderen dat $g(z+w) = f(z)g(w)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Deze conclusie geldt voor iedere w, dus ook voor $w = 0$, en we zien dat $g = f$. Dus f is uniek, en tevens geldt (5.5). $\square$

Op grond van de bovenstaande stelling definiëren we de complexe e-macht door

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Voor $z \in \mathbb{R}$ komt deze definitie overeen met de vroeger gegeven definitie. Wegens bovenstaande stelling geldt dat

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z \qquad \text{op } \mathbb{C}.$$

Tevens gelden de volgende eigenschappen:

(a) $e^0 = 1$;

(b) $e^z e^{-z} = 1$;

(c) $e^{z+w} = e^z e^w$;

voor alle $z, w \in \mathbb{C}$.

In termen van de complexe e-macht kunnen we weer de goniometrische functies $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiëren.

Definitie 5.18 De functies $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ worden gedefinieerd door

$$\cos y = \mathrm{Re}(e^{iy}), \qquad \sin y = \mathrm{Im}(e^{iy}),$$

voor $y \in \mathbb{R}$. $\oslash$

Uit $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ en de bovenstaande definitie volgt de bekende formule van Euler, namelijk

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Tenslotte volgt uit de machtreeksontwikkeling voor de e-macht dat

$$e^{iy} = \sum_{n=0} i^n \frac{y^n}{n!}.$$

Door reëel en imaginair deel te nemen vinden we dat

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(i^{2k}) \frac{y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!}$$

en

$$\sin y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(i^{2k+1}) \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Dit zijn de bekende Taylorreeksontwikkelingen voor sinus en cosinus.

Laat in het vervolg V een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn.

Definitie 5.19 Een functie $f : V \to \mathbb{C}$ heet *analytisch* (of *holomorf*) indien voor elk punt $a \in V$ een in V gelegen open cirkelschijf D met middelpunt a bestaat zo dat f op D gegeven wordt door een machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n \tag{5.7}$$

met $c_n \in \mathbb{C}$. $\oslash$

Wegens Stelling 5.14 en Gevolg 5.15 is een analytische functie $f : V \to \mathbb{C}$ willekeurig vaak complex differentieerbaar, en zijn de afgeleide functies $f^{(n)}$ weer analytisch. Verder moeten de coefficienten in (5.7) wegens Gevolg 5.15 gelijk zijn aan

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{5.8}$$

Derhalve is de machtreeksontwikkeling overal uniek bepaald door de functie.

Een belangrijk resultaat in Hoofdstuk 5 van het diktaat Functies en Reeksen is het volgende.

Stelling 5.20 *Zij $V \subset \mathbb{C}$ open, en $f : V \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar, terwijl f' continu op V is. Dan is f analytisch op V.*

Voor het bewijs van dit resultaat is de in Hoofdstuk 4 van het diktaat bewezen stelling van Cauchy nodig. Wij zullen dit resultaat in de huidige cursus niet behandelen, maar verwijzen hiervoor naar de niveau 3 cursus ‘Complexe Functies’.

6 Extra aantekeningen bij Hoofdstuk 6: Fourierreeksen

Integratie van vectorwaardige functies

In deze sectie zullen we de integratie van vectorwaardige functies bespreken. Aangezien $\mathbb{C}$ opgevat kan worden als $\mathbb{R}^2$, met als extra structuur de complexe vermenigvuldiging, valt hieronder ook de integratie van complexwaardige functies. We starten met de theorie voor continue functies, waar de vraag naar Riemann-integreerbaarheid minder urgent is.

Lemma 6.1 *Zij $f : [a, b[\to \mathbb{R}^n$ een continue functie. Dan is er precies één vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ met de eigenschap dat*

$$\langle\, I(f), v \,\rangle = \int_a^b \langle\, f(x), v \,\rangle \, dx,$$

voor alle $v \in \mathbb{R}^n$. In het bijzonder geldt voor iedere $1 \leq j \leq n$ dat

$$I(f)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx, \tag{6.9}$$

met $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ de j-de component van de functie f.

Bewijs We merken op dat voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ de functie $f_v : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle\, f(x), v \,\rangle$ continu, dus Riemann-integreerbaar is.

Door voor v achtereenvolgens de vectoren uit de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ te nemen, zien we dat $I(f)$ gegeven moet zijn door (6.9). Laat $I(f)$ door die formule gegeven zijn. Zij $v \in \mathbb{R}^n$ en schrijf $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Dan is

$$\langle\, I(f), v \,\rangle = \sum_{j=1}^n v_j I(f)_j = \sum_{j=1}^n v_j \int_a^b f_j(x)\, dx = \int_a^b \sum_{j=1}^n v_j f_j(x)\, dx = \int_a^b f_v(x)\, dx.$$

□

Om voor de hand liggende redenen noteren we de vector $I(f)$ met $\int_a^b f(x)\, dx$, en noemen dit de vectorwaardige integraal van de continue functie f over $[a, b]$.

Voor vectorwaardige integratie geldt de driehoeksongelijkheid.

Lemma 6.2 *Zij $a, b \in \mathbb{R}$, met $a < b$. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continu. Dan is de functie $\|f\| : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ continu, dus Riemann-integreerbaar over $[a, b]$, en*

$$\| \int_a^b f(x)\, dx \,\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\, dx.$$

Bewijs Schrijf $I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$. Er bestaat een $v \in \mathbb{R}^n$ met $\|v\| = 1$, zo dat $\langle\, I(f), v\,\rangle = \|I(f)\|$. (Als $I(f) \neq 0$, dan kunnen we $v = I(f)/\|I(f)\|$ nemen.) Nu geldt

$$\begin{aligned}\|I(f)\| = \langle\, I(f), v\,\rangle &= \int_a^b \langle\, f(x), v\,\rangle\ dx \\ &\leq \int_a^b |\langle\, f(x), v\,\rangle|\ dx \\ &= \int_a^b \|f(x)\|\|v\|\ dx \\ &= \int_a^b \|f(x)\|\ dx.\end{aligned}$$

□

Voorbeeld 6.3 Voor een continue functie $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ geldt dat

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f_1(x)\ dx + i \int_a^b f_2(x)\ dx.$$

Ook is $|f|$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:

$$|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx.$$

⊘

Voorbeeld 6.4 Schrijf ϵ_k voor de functie $x \mapsto e^{ikx}$. Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een continue functie, die periodiek is met periode 2π, dan is ook de functie

$$x \mapsto f(x)e^{-ikx}$$

continu. Er geldt dat

$$|(\mathcal{F}f)_k| = |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\ dx \leq \|f\|_{\mathbb{R}},$$

waar $\|f\|_{\mathbb{R}}$ staat voor de supnorm van f over $\mathbb{R}$. ⊘

Tenslotte eindigen we met de fundamentaalstelling voor vectorwaardige integratie.

Lemma 6.5 *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een continue functie, en zij $F : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een primitieve van f, dwz. een differentieerbare functie met $F' = f$. Dan geldt*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a). \tag{6.10}$$

Bewijs Dit komt omdat zowel integratie als differentiatie componentsgewijs uitgevoerd kunnen worden. Preciezer, schrijf $f = (f_1, \ldots, f_n)$ en $F = (F_1, \ldots, F_n)$. Dan geldt dat $F_j' = f_j$ voor elke $1 \leq j \leq n$. Dus geldt

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx \right)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx = F_j(b) - F_j(a) = (F(b) - F(a))_j.$$

De identiteit (6.10) geldt dus componentsgewijs. □

Voorbeeld 6.6 We beschouwen de functie $\epsilon_k : x \mapsto e^{ikx}$, voor $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dan is de functie $F(x) = (1/ik)\epsilon_k$ een primitieve van ϵ_k. Voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dus:

$$\int_a^b e^{ikx}\, dx = \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{ik}.$$

In het bijzonder is de integraal over $[-\pi, \pi]$ gelijk aan nul. Uit het bovenstaande volgt, voor alle $m, n \in \mathbb{Z}$ dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\overline{e^{inx}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = \delta_{mn}.$$

⊘

Voor de liefhebber: Riemann-integreerbaarheid voor vectorwaardige functies

In de vectorwaardige context is het werken met onder- en bovensommen minder geschikt. In plaats daarvan werken we met Riemann-sommen.

Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ een begrensde functie, dwz. er bestaat een $M > 0$ zo dat $\|f(x)\| \leq M$ voor alle $x \in [a, b]$. Onder een verdeling van het interval $I = [a, b]$ verstaan we een eindige verzameling $V \subset I$ met $a, b \in V$. Zij $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de ordening naar grootte van de elementen van V. We schrijven ook

$$V = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b\}.$$

Onder een verzameling Ξ van strooipunten bij V verstaan we een collectie punten $\{\xi_1, \ldots, \xi_p\} \subset I$ met $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ voor alle $1 \leq j \leq p$. Bij V en Ξ definiëren we de Riemann-som $S(f, V, \Xi)$ door

$$S(f, V, \Xi) := \sum_{j=1}^{p} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

De definitie van Riemann-integreerbaarheid kan als volgt gegeneraliseerd worden van scalaire functies naar vectorwaardige functies.

Definitie 6.7 De functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heet Riemann-integreerbaar indien de volgende condities vervuld zijn:

(a) f is begrensd;

(b) voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een verdeling V van $[a, b]$ zo dat voor elk tweetal collecties Ξ_1, Ξ_2 van strooipunten bij V geldt dat

$$\|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\| < \epsilon. \tag{6.11}$$

$\oslash$

Lemma 6.8 *Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een begrensde functie zijn. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie f is Riemann-integreerbaar.*

(b) *Voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ geldt dat de functie $f_v : [a,b] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ Riemann-integreerbaar is.*

(c) *Er bestaat een unieke vector $I(f) \in \mathbb{R}^n$ met de volgende eigenschap. Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een verdeling V van $[a,b]$ zo dat voor elke collectie Ξ van strooipunten bij V geldt dat*

$$\|S(f, V, \Xi) - I(f)\| < \epsilon. \tag{6.12}$$

Bewijs Voor $n = 1$ is dit resultaat bewezen in Inleiding Analyse. We veronderstellen nu dat algemener $n \geq 1$. Veronderstel dat (a) geldt en zij $v \in \mathbb{R}^n$. Dan geldt voor iedere verdeling V en iedere collectie strooipunten Ξ daarbij dat

$$\langle S(f, V, \Xi), v \rangle = S(f_v, V, \Xi).$$

Zij $\epsilon > 0$. Wegens (a) bestaat er een verdeling V zo dat (6.12) geldt voor alle collecties strooipunten Ξ_1, Ξ_2 bij V, met $\epsilon/(\|v\| + 1)$ in plaats van ϵ. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} |S(f_v, V, \Xi_1) - S(f_v, V, \Xi_2)| &= |\langle S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2), v \rangle| \\ &\leq \|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\| \|v\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de Riemann-integreerbaarheid van f_v.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $e_1, \ldots, e_n$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^n$ en schrijf $f = (f_1, \ldots, f_n)$, dan is $f_j = f_{e_j}$. Met (b) volgt dat iedere component f_j Riemann-integreerbaar is. Definieer $I(f) \in \mathbb{R}^n$ door $I(f)_j = \int_a^b f_j(x) \ dx$. Dan volgt voor iedere j het bestaan van een verdeling V_j van $[a,b]$ zo dat

$$\overline{S}(f_j, V_j) - \underline{S}(f_j, V_j) < \epsilon/n.$$

Deze schatingen gelden ook met V_j vervangen door de gemeenschappelijke verfijning $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$. Voor iedere collectie Ξ van strooipunten bij V geldt nu dat $S(f_j, V, \Xi)$ en $I(f)_j$ tussen $\underline{S}(f_j, V)$ en $\overline{S}(f_j, V)$ liggen, dus ook

$$|S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| < \epsilon/n.$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \|S(f, V, \Xi) - I(f)\| &\leq \sum_{j=1}^n |S(f, V, \Xi)_j - I(f)_j| \\ &= \sum_{j=1}^n |S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| < n\epsilon/n = \epsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt het bestaan van $I(f)$.

Voor de uniciteit redeneren we als volgt. Stel dat $I(f)$ de geformuleerde eigenschap heeft. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een verdeling V van $[a,b]$ zo dat voor elke collectie strooipunten Ξ bij V geldt dat (6.12). Hieruit volgt voor de j-de component dat

$$|S(f_j, V, \Xi) - I(f)_j| = |S(f, V, \Xi)_j - I(f)_j| < \epsilon.$$

Hieruit volgt dat f_j Riemann-integreerbaar is, met integraal $I(f)_j$. Dus $I(f)$ is uniek.

Veronderstel tenslotte dat (c) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Er bestaat een verdeling V zo dat (6.12) geldt met $\epsilon/2$ in plaats van ϵ. Is Ξ_1, Ξ_2 een tweetal collecties strooipunten bij V, dan volgt

$$\begin{aligned}
&\|S(f, V, \Xi_1) - S(f, V, \Xi_2)\| \\
&\quad \leq \quad \|S(f, V, \Xi_1) - I(f)\| + \|I(f) - S(f, V, \Xi_2)\| < 2\epsilon/2 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Dus f is Riemann-integreerbaar. □

Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integreerbaar, dan noemen we de unieke $I(f) \in \mathbb{R}^n$ die voldoet aan conditie (c) om voor de hand liggende redenen de Riemann-integraal van f over $[a,b]$, en we schrijven

$$\int_a^b f(x)\, dx = I(f).$$

Uit het bovenstaande volgt dat de integraal bepaald is door componentsgewijze integratie:

$$I(f)_j = \int_a^b f_j(x)\, dx, \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Opmerking 6.9 In het bijzonder geldt dat een continue functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Riemann-integreerbaar is. In de vorige paragraaf hebben we deze relatie niet hoeven leggen, omdat we de integraal direct konden definiëren. ⊘

We hebben nu voldoende achtergrond om de driehoeksongelijkheid voor vectorwaardige Riemann-integralen te bewijzen.

Lemma 6.10 *Zij $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een Riemann-integreerbare functie $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Dan is ook de functie $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ Riemann-integreerbaar op $[a,b]$, en er geldt*

$$\|\int_a^b f(x)\, dx\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\, dx.$$

Bewijs We tonen eerst aan dat $\|f\|$ Riemann-integreerbaar is. Dit is het lastigste deel van het bewijs. De rest van het bewijs is hetzelfde als dat voor een continue functie f, zie de vorige paragraaf.

Zij $\epsilon > 0$. Voor iedere $1 \leq k \leq n$ bestaat een verdeling V_k zo dat

$$\overline{S}(f_k, V_k) - \underline{S}(f_k, V_k) < \epsilon/n.$$

Voor de gemeenschappelijke verfijning $V = V_1 \cup \cdots \cup V_n$ van deze verdelingen gelden deze schattingen met V in plaats van V_k. Schrijf $V = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_p\}$ en zij $\Xi_1 = \{\xi_{1j}\}$ en $\Xi_2 = \{\xi_{2j}\}$

een tweetal collecties van strooipunten bij V. Dan geldt

$$\begin{aligned}
S(\|f\|, V, \Xi_1) - S(\|f\|, V, \Xi_2) &= \sum_{j=1}^{p} (\|f(\xi_{1j})\| - \|f(\xi_{2j})\|)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{p} \|f(\xi_{1j}) - f(\xi_{2j})\|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |f_k(\xi_{ij}) - f_k(\xi_{2j})|(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (\sup_{I(j)} f_k - \inf_{I(j)} f_k)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (\overline{S}(f_k, V) - \underline{S}(f_k, V)) < n\epsilon/n = \epsilon.
\end{aligned}$$

Deze schatting geldt ook met verwisseling van Ξ_1 en Ξ_2, dus

$$|S(\|f\|, V, \Xi_1) - S(\|f\|, V, \Xi_2)| < \epsilon.$$

We concluderen dat $\|f\|$ inderdaad Riemann-integreerbaar is. Schrijf $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$. Er bestaat een $v \in \mathbb{R}^n$ met $\|v\| = 1$, zo dat $\langle I(f), v \rangle = \|I(f)\|$. (Als $I(f) \neq 0$, dan kunnen we $v = I(f)/\|I(f)\|$ nemen.) Nu geldt

$$\begin{aligned}
\|I(f)\| = \langle I(f), v \rangle &= \int_a^b \langle f(x), v \rangle\, dx \\
&\leq \int_a^b |\langle f(x), v \rangle|\, dx \\
&\leq \int_a^b \|f(x)\| \|v\|\, dx \\
&= \int_a^b \|f(x)\|\, dx.
\end{aligned}$$

□

Voorbeeld 6.11 Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ is Riemann-integreerbaar indien zowel $f_1 = \mathrm{Re} f$ als $f_2 = \mathrm{Im} f$ Riemann-integreerbaar zijn. Bovendien is in dat geval

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + i \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Ook is $|f|$ Riemann-integreerbaar, en er geldt:

$$|\int_a^b f(x)\, dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

⊘

Voorbeeld 6.12 Schrijf ϵ_k voor de functie $x \mapsto e^{ikx}$. Is $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ lokaal Riemann integreerbare functie, die periodiek is met periode 2π, dan zijn zowel de functis $f_1 = \mathrm{Re} f$ als $f_2 = \mathrm{Im} f$ Riemann-integreerbaar, en ook de functies $x \mapsto f_1 \cos kx + f_2 \sin kx$ en $x \mapsto -f_1(x) \sin kx + f_2(x) \cos kx$. Dit zijn het reëele en het imaginaire deel van de functie

$$x \mapsto f(x)e^{-ikx}.$$

Deze functie is dus ook Riemann-integreerbaar. Er geldt dat

$$|(\mathcal{F}f)_k| = |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{\mathbb{R}},$$

waar $\|f\|_{\mathbb{R}}$ staat voor de supnorm van f over $\mathbb{R}$. $\oslash$

Product van Riemann-integreerbare functies

In de aantekeningen bij Hoofdstuk 6 zullen we regelmatig gebruik maken van het volgende resultaat voor Riemann-integreerbare functies.

Lemma 6.13 *Veronderstel dat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Laat $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ een tweetal Riemann-integreerbare functies zijn. Dan is ook de productfunctie $fg : x \mapsto f(x)g(x)$, $[a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar.*

Bewijs Deel van de eis van Riemann-integreerbaarheid is dat f en g begrensd zijn. De sup-normen geven we aan met $M_f = \|f\|_{[a,b]}$ en $M_g = \|g\|_{[a,b]}$. Zij $I \subset [a, b]$ een deelinterval. Dan geldt voor alle $x, y \in I$ dat

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= f(x)(g(x) - g(y)) + (f(x) - f(y))g(y)| \\ &\leq \|f\|_{[a,b]}|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|\|g\|_{[a,b]} \\ &\leq \mathrm{var}_I\, f \cdot \|g\|_{[a,b]} + \mathrm{var}_I\, g \cdot \|f\|_{[a,b]} \\ &\leq (\mathrm{var}_I\, f + \mathrm{var}_I\, g)(M_f + M_g). \end{aligned}$$

Zij $\epsilon > 0$. Uit de Riemann-integreerbaarheid van f en g volgt het bestaan van een verdeling $V = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ van $[a, b]$, zo dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \epsilon/2(M_f + M_g + 1), \qquad \overline{S}(g, V) - \underline{S}(g, V) < \epsilon/2(M_f + M_g + 1)$$

(gebruik een gemeenschappelijke verfijning). Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \overline{S}(fg, V) - \underline{S}(fg, V) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}_{I(j)}(fg)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq (M_f + M_g) \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{var}_{I(j)}\, f + \mathrm{var}_{I(j)}\, g)(x_j - x_{j-1}) \\ &= (M_f + M_g)(\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) + \overline{S}(g, V) - \underline{S}(g, V)) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Gevolg 6.14 *Laat $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, en laat $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integreerbaar zijn. Dan is de functie $fg : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integreerbaar.*

Bewijs Schrijf $f = f_1 + i f_2$ en $g = g_1 + i g_2$ met f_1, f_2, g_1, g_2 reëelwaardig. Door toepassing van het bovenstaande lemma volgt dat $f_1 g_1 - f_2 g_2$ en $f_1 g_2 + f_2 g_1$ Riemann-integreerbaar zijn. Hieruit volgt dat $fg = (f_1 g_1 - f_2 g_2) + i(f_1 g_2 + f_2 g_1)$ Riemann-integreerbaar is. $\square$

Het bewijs van Stelling 6.11

Het bewijs dat in het dictaat gegeven wordt van Stelling 6.11 is te ingewikkeld. Het kan als volgt eenvoudiger gegeven worden.

In de eerste plaats merken we op:

Lemma 6.15 *De afbeelding $\mathcal{F} : C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ is injectief.*

Bewijs De afbeelding $\mathcal{F}$ is complex lineair. Het is dus voldoende te bewijzen dat de kern van $\mathcal{F}$ de nulruimte is.

Laat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en veronderstel dat $\mathcal{F}f = 0$. Voor de Fourier coëfficiënten geldt dus $c_k = (\mathcal{F}f)_k = 0$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$. Hieruit volgt dat voor iedere $0 < r < 1$ de functie $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, gedefinieerd door

$$f_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k e^{ikx}$$

gelijk is aan nul. Anderzijds geldt dat $f_r \to f$ uniform op $\mathbb{R}$, voor $r \uparrow 1$. We concluderen dat $f = 0$. $\square$

Bewijs van Stelling 6.11: Veronderstel dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, schrijf $c_k = (\mathcal{F}f)_k$ en veronderstel dat $\sum |c_k| < \infty$. Dan wordt door

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

een continue functie $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd met $\mathcal{F}g = c = \mathcal{F}f$. Uit de injectiviteit van de Fourier transformatie volgt nu dat $f = g$. $\square$

Opmerkingen over de Poisson-kern

Voor twee functies $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren we het convolutieproduct door

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y) g(y)\, dy.$$

Uit de continuiteit van de functies $(x, y) \mapsto f(x - y)$ en $(x, y) \mapsto g(y)$ volgt met de productregel dat de integrand een continue functie van (x, y) is. Wegens een stelling over continuiteit van integralen met een parameter volgt hieruit dat de functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continu is. Het is evident dat $f * g$ periodiek is met periode 2π, dus $f * g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Door de substitutie $z = x - y$ uit te voeren in de integraal van het convolutieproduct zien we dat

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(x-z)\, dz = g * f(x).$$

Het convolutieproduct is dus commutatief.

In het vervolg veronderstellen we dat $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. We noteren de Fourier coëfficiënten van f met $c_k = (\mathcal{F} f)_k$. In termen van deze coëfficiënten definiëren we de functies $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ voor $0 \leq r < 1$ door

$$f_r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k e^{ikx}.$$

In het dictaat wordt bewezen dat $f_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voor alle $0 \leq r < 1$. Bovendien wordt bewezen dat

$$f_r = P_r * f,$$

met

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikx}. \tag{6.13}$$

Uit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} < \infty$ volgt dat $P_r \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met de definiërende reeks als Fourier reeks. In het bijzonder wordt de nulde Fourier coëfficiënt gegeven door $r^0 = 1$. Hieruit volgt weer dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\, dx = 1. \tag{6.14}$$

De som van de reeks (6.13) is te bepalen door gebruik te maken van de formule voor de som van een meetkundige reeks, zie het dictaat. Dit geeft:

$$P_r(x) = \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 2r(1 - \cos x)}$$

We merken nu op dat het volgende geldt:

Lemma 6.16 *Zij* $0 < \delta < \pi$. *Dan convergeert* P_r *op* $V := [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ *unform naar nul, voor* $r \uparrow 1$.

Bewijs Voor $x \in V$ geldt dat $1 - \cos x > 1 - \cos \delta$, dus

$$0 \leq P_r(x) \leq \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 2r(1 - \cos \delta)}$$

Het rechterlid heeft limiet nul voor $r \uparrow 1$. Hieruit volgt dat $\|P_r\|_V \to 0$. □

Lemma 6.17 *Laat* $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. *Dan geldt dat* $P_r * g \to g$ *uniform op* $\mathbb{R}$, *voor* $r \uparrow 1$.

Bewijs We kunnen dit afleiden puur door gebruik te maken van (6.14) en Lemma (6.16) en het feit dat $P_r \geq 0$. De redenatie is als volgt. We merken op dat

$$\begin{aligned} P_r * g(x) - g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y) P_r(y)\, dy - g(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g(x-y) - g(x)] P_r(y)\, dy. \end{aligned}$$

waarbij de tweede identiteit volgt door toepassing van (6.14). Hieruit volgt door toepassing van de driehoeksongelijkheid voor integralen dat

$$|P_r * g(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-y) - g(x)| P_r(y)\, dy.$$

De functie g is continu dus uniform continu op $[-2\pi, 2\pi]$. Vanwege de periodiciteit is de functie ook uniform continu op $\mathbb{R}$. Er is dus een $0 < \delta < \pi$ zo dat voor $u, v \in \mathbb{R}$ met $|u - v| \leq \delta$ geldt $|g(u) - g(v)| < \epsilon/2$. Voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ en alle $y \in [-\delta, \delta]$ volgt dus dat $|g(x-y) - g(x)| < \epsilon/2$. Anderzijds geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ dat $|g(x-y) - g(x)| \leq |g(x-y)| + |g(y)| \leq 2\|g\|_{\mathbb{R}}$.

Splitsen we de bovenstaande integraal op in een stuk over $[-\delta, \delta]$ en een stuk over $V := [-\pi, \pi] \backslash]-\delta, \delta[$ dan vinden we

$$\begin{aligned} |P_r * g(x) - g(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\epsilon}{2} P_r(y)\, dy + \frac{1}{2\pi} \int_V 2\|g\|_{\mathbb{R}} \|P_r\|_V\, dy \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon}{2} P_r(y)\, dy + 2\|g\|_{\mathbb{R}} \|P_r\|_V \\ &= \epsilon/2 + 2\|g\|_{\mathbb{R}} \|P_r\|_V. \end{aligned}$$

Uit Lemma 6.16 volgt nu dat er een $R < 1$ bestaat zo dat voor alle $R < r < 1$ geldt $\|P_r\|_V < \epsilon/2(1 + \|g\|_{\mathbb{R}})$. Voor dergelijke r geldt dus voor alle $x \in [-\pi, \pi]$ de schatting

$$|P_r * g(x) - g(x)| \leq \epsilon,$$

dus ook $\|P_r * g - g\|_{[-\pi,\pi]} \leq \epsilon$. De uniforme convergentie volgt. □

Voor $p \in \mathbb{N}$ noteren we met $C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ de ruimte van functies $g \in C(R/2\pi\mathbb{Z})$ die bovendien C^p zijn, dwz. alle afgeleiden $g, g', \ldots, g^{(p)}$ bestaan en zijn continu. Met $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ noteren we de ruimte van alle functies $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

Lemma 6.18 *Als $g \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan geldt dat $g * h \in C^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en*

$$\frac{d}{dx}(g * h) = \frac{dg}{dx} * h.$$

Bewijs Er geldt dat

$$g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y)\, dy,$$

met $\varphi(x, y) = g(x-y)h(y)$. Hieruit blijkt dat φ continu is op $\mathbb{R}^2$, en bovendien dat φ partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele, met partiële afgeleide

$$D_1\varphi(x, y) = g'(x-y)h(y).$$

Aangezien $D_1\varphi$ weer continu is, is differentiatie onder het integraalteken geoorloofd, en we vinden:

$$\frac{d}{dx} g * h(x) = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} D_1\varphi(x, y)\, dy = (g') * h(x).$$

Hieruit volgt dat $g * h$ differentieerbaar is met afgeleide $(g') * h$. Aangezien $g', h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, vinden we dat de afgeleide continu is. Dus $g * h$ is C^1, en de formule voor de afgeleide geldt. □

Gevolg 6.19 *Zij $p \in \mathbb{N}$ of $p = \infty$. Als $g \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $h \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan is $g * h \in C^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.*

Bewijs Dit volgt door herhaalde toepassing van het vorige lemma. □

Uit dit gevolg gecombineerd met Lemma 6.17 volgt dat iedere functie $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ uniform benaderd kan worden met willekeurig vaak differentieerbare functies.

Gevolg 6.20 *Zij $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Voor iedere $\epsilon > 0$ is er een functie $h \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met*

$$\|g - h\|_{\mathbb{R}} < \epsilon.$$

Opmerking 6.21 In de taal van de metrische ruimten zeggen we ook dat $C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ dicht ligt in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ten aanzien van de uniforme metriek. ⊘

Bewijs Voor elke $0 \le r < 1$ is $P_r \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dus ook $P_r * g \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Pas nu Lemma 6.17 toe. Dan zien we dat de bewering geldt met $h = P_r * g$, voor r voldoende dicht bij 1. □

Gevolg 6.22 *Zij $a < b$ en $g \in C([a, b])$. Dan bestaat er voor iedere $\epsilon > 0$ een functie $h \in C^\infty([a, b])$ met $\|g - h\|_{[a,b]} < \epsilon$.*

Bewijs Door verschuiven en herschalen kunnen we reduceren tot het geval dat $a = 0$ en $b = \pi/2$. Laat $g \in C([0, \pi/2]$ en $\epsilon > 0$. We definiëren nu een functie $\tilde{g} \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\tilde{g}|_{[0,\pi/2]} = g$ als volgt

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} (x/\pi + 1)g(0) & \text{voor} \quad -\pi \le x \le 0; \\ g(x) & \text{voor} \quad 0 \le x \le \pi/2; \\ (2 - 2x/\pi)g(\pi/2) & \text{voor} \quad \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

De functie $\tilde{g}$ is continu op $[-\pi, \pi]$ terwijl $\tilde{g}(-\pi) = \tilde{g}(\pi) = 0$. Hieruit volgt dat $\tilde{g}$ uit te breiden is tot een functie $\tilde{g} \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Nu is er een $\tilde{h} \in C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|\tilde{g} - \tilde{h}\|_{\mathbb{R}} < \epsilon$. Definieer $h = \tilde{h}|_{[a,b]}$. Dan is

$$\|g - h\|_{[a,b]} \le \|\tilde{g} - \tilde{h}\|_{\mathbb{R}} < \epsilon.$$

□

Het volgende lemma staat bekend als het Riemann-Lebesgue lemma voor stuksgewijs continue functies.

Lemma 6.23 *Zij $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs continu. Dan geldt*

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \int_a^b f(x) e^{i\xi x}\, dx = 0.$$

Bewijs We veronderstellen eerst dat f een C^1-functie is. Dan volgt door partiële integratie dat, voor $\xi \in \mathbb{R}, \xi \neq 0$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\,dx &= \frac{1}{i\xi}\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}e^{i\xi x}\,d\xi \\ &= -\frac{1}{i\xi}\int_a^b f'(x)e^{i\xi x}\,d\xi + \frac{1}{i\xi}f(x)e^{i\xi x}|_a^b.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$|\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\,dx| \leq \frac{1}{|\xi|}(\|f'\|_{[a,b]} + 2\|f\|_{[a,b]}).$$

Het rechterlid heeft limiet nul voor $|\xi| \to \infty$. Het resultaat volgt nu door toepassing van de insluitstelling.

We veronderstellen nu dat f continu is. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $g \in C^1([a,b])$ zo dat $\|f - g\|_{[a,b]} < \epsilon/2(b-a)$. Hieruit volgt dat voor alle $\xi \in \mathbb{R}$,

$$|\int_a^b [f(x) - g(x)]e^{i\xi x}\,dx| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \leq (b-a)\|f - g\|_{[a,b]} < \epsilon/2.$$

Volgens het eerste deel van het bewijs is er een $R > 0$ zo dat voor alle ξ met $|\xi| > R$ geldt dat

$$|\int_a^b g(x)e^{i\xi x}\,dx| < \epsilon/2.$$

Nu volgt voor $|\xi| > R$ dat

$$|\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\,dx| \leq |\int_a^b g(x)e^{i\xi x}\,dx| + |\int_a^b [f(x) - g(x)]e^{i\xi x}\,dx| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Tenslotte veronderstellen we nog algemener dat f stuksgewijs continu is. Dan is er een verdeling $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ van het interval $[a,b]$ zo dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ een $f_j \in C([a_{j-1}, a_j])$ bestaat zo dat $f = f_j$ op $]a_{j-1}, a_j[$. Derhalve geldt:

$$\int_a^b f(x)e^{i\xi x}\,dx = \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} f_j(x)e^{i\xi x}\,dx \to 0$$

voor $|\xi| \to \infty$, wegens het tweede deel van het bewijs. □

Gevolg 6.24 *Laat $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, en zij $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stuksgewijs continu. Dan is*

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_a^b f(x)\,\sin(\xi x)\,dx = 0.$$

Bewijs Dit volgt uit het bovenstaande lemma, omdat $\sin(\xi x) = \frac{1}{2i}(e^{i\xi x} - e^{-i\xi x})$. □

Voor de liefhebber: de Dirichlet kern

Definitie 6.25 Laat $a, b \in \mathbb{R}$ zijn met $a < b$. Een functie $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heet stuksgewijs C^1 als er een verdeling verdeling $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ van het interval $[a, b]$ bestaat met de volgende eigenschap. Voor iedere $1 \leq j \leq n$ bestaat een $f_j \in C^1([a_{j-1}, a_j])$ zo dat $f = f_j$ op $]a_{j-1}, a_j[$. $\oslash$

In het vervolg zullen we de notatie $C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gebruiken voor de ruimte van functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met

(a) $f(x + 2\pi) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
(b) f is stuksgewijs C^1 op het interval $[-\pi, \pi]$.

Vanwege de periodiciteit is elke functie $f \in C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ stuksgewijs C^1 op ieder gesloten en begrensd interval.

Voor een functie $f \in C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definiëren de Fourier getransformeerde $\mathcal{F}f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ met de gebruikelijke integraalformule:

$$(\mathcal{F}f)_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx.$$

Bovendien definiëren we voor $l \in \mathbb{N}$ de l-de bijbehorende symmetrische partiële som $s(f)_l$ van de Fourierreeks door

$$s(f)_l(x) = \sum_{k=-l}^{l} c_k e^{ikx}, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

met $c_k = (\mathcal{F}f)_k$.

Lemma 6.26 *Voor iedere $f \in C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt dat*

$$s(f)_l = D_l * f,$$

met $D_l \in C^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ gedefinieerd door

$$D_l(x) = \sum_{k=-l}^{l} e^{ikx}.$$

Bewijs Er geldt dat

$$\begin{aligned} s(f)_l(x) &= \sum_{l=-k}^{k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky}\, dy e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-l}^{l} e^{ik(x-y)}\, dy \\ &= D_l * f(x). \end{aligned}$$

$\square$

De functie D_l wordt ook wel de Dirichlet kern genoemd. Uit zijn definitie volgt direct dat $D_l \in C^{\infty}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat de nulde Fourier coëfficiënt van D_l gelijk is aan 1. Dus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_l(x)\, dx = 1, \qquad (l \in \mathbb{N}). \tag{6.15}$$

Lemma 6.27 *Voor elke $l \in \mathbb{N}$ geldt*

$$D_l(x) = \frac{\sin((l+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

Bewijs Zij $l \in \mathbb{N}$, en zij $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} s_l(x) &= \sum_{k=-l}^{l} e^{ikx} = e^{-ilx} \sum_{k=-l}^{l} e^{i(k+l)x} \\ &= e^{-ilx} \sum_{k=0}^{2l} (e^{ix})^k = e^{-ilx} \frac{1-e^{i(2l+1)x}}{1-e^{-ix}} \\ &= \frac{e^{-i(l+\frac{1}{2})x} - e^{-i(l+\frac{1}{2})x}}{e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de bovenstaande formule. □

Gevolg 6.28 *Laat $g \in C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en $0 < \delta < \pi$. Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} g(y) D_l(y)\, dy = 0.$$

Bewijs Zij $G(y) = g(y)/\sin(y/2)$, dan is G een stuksgewijze C^1-functie op zowel het interval $[-\pi, -\delta]$ als $[\delta, \pi]$. Nu

$$\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} g(y) D_l(y)\, dy = \int_{-\pi}^{-\delta} G(y) \sin(l+\frac{1}{2})y\, dy + \int_{\delta}^{\pi} G(y) \sin(l+\frac{1}{2})y\, dy$$

en het resultaat volgt door toepassing van Gevolg 6.24. □

Gevolg 6.29 *Zij $0 < \delta < 1$. Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^{\delta} D_l(y)\, dy = \lim_{l\to\infty} \int_{-\delta}^{0} D_l(y)\, dy = \pi.$$

Bewijs De functie D_l is even, dus

$$\int_0^{\delta} D_l(y)\, dy = \int_{-\delta}^{0} D_l(y)\, dy = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(y)\, dy.$$

Daarom is het voldoende te bewijzen dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} D_l(y)\, dy = 1.$$

Dit volgt door combinatie van (6.15) met Gevolg 6.28 met $g = 1$. □

Lemma 6.30 *Zij* $0 < \delta < \pi$ *en zij* $g \in C^1([0,\delta])$. *Dan is*

$$\lim_{l\to\infty} \int_0^\delta g(y) D_l(y)\, dy = \pi g(0).$$

Bewijs Definieer de functie $\varphi : [0,\delta] \to \mathbb{C}$ door $\varphi(0) = g'(0)$ en door $g(y) - g(0) = y\varphi(y)$. Dan is φ continu op $[0,\pi]$. Er geldt dat

$$\int_0^\delta g(y) D_l(y)\, dy = g(0) \int_0^\delta D_l(y)\, dy + \int_0^\delta y\varphi(y) D_l(y)\, dy.$$

De eerste integraal achter het gelijkteken heeft limiet $\pi g(0)$ voor $l \to \infty$, wegens Gevolg 6.29. De tweede integraal kunnen we herschrijven als

$$\int_0^\delta \frac{y}{\sin(\frac{1}{2}y)} \varphi(y) \sin((l + \frac{1}{2})y)\, dy.$$

Omdat $y \mapsto y(\sin(\frac{1}{2}y))^{-1}$ uitbreidt tot een continue functie op $[0,\delta]$ convergeert de laatste integraal naar nul voor $l \to \infty$, wegens Gevolg 6.24. Het resultaat volgt. □

Laat $f \in C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt voor elke $x \in \mathbb{R}$ dat de limieten

$$f(x-) := \lim_{h\downarrow 0} f(x-h), \quad \text{en} \quad f(x+) := \lim_{h\downarrow 0} f(x+h)$$

bestaan. Uiteraard geldt dat f continu is in x dan en slechts dan als $f(x+) = f(x-) = f(x)$, in welk geval $\frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) = f(x)$.

Stelling 6.31 *Zij* $f \in C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ *en zij* $x \in \mathbb{R}$. *Dan geldt dat*

$$\lim_{l\to\infty} s(f)_l(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

Bewijs We schrijven $g(y) = f(x+y)$ en merken op dat $g \in C^{st,1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en dat $s(g)_l(0) = D_l * g(0) = D_l * f(x)$. Verder is $f(x+) = g(0+)$ en $f(x-) = g(0-)$. Het is dus voldoende te bewijzen dat

$$\lim_{l\to\infty} s(g)_l(0) = \frac{g(0-) + g(0+)}{2}.$$

Door verschuiving is hiermee het bewijs van de stelling gereduceerd tot het geval dat $x = 0$. We veronderstellen dat $x = 0$.

Kies $0 < \delta < \pi$ zo dat f zowel op $]0,\delta]$ als op $[-\delta,0[$ een C^1-functie is. We definiëren de functie $f_+ : [0,\delta] \to \mathbb{C}$ door

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{voor} \quad x \in]0,\delta], \\ f(0+) & \text{voor} \quad x = 0. \end{cases}$$

Dan is f_+ een C^1-functie op $[0,\delta]$. Op soortgelijke wijze breiden we de functie $f|_{[-\delta,0[}$ uit tot een C^1-functie f_- op $[-\delta,0]$, met $f_-(0) = f(0-)$.

Er geldt dat

$$\int_0^\delta f(-y) D_l(y)\, dy = \int_0^\delta f_-(y) D_l(y)\, dy.$$

Door toepassing van Lemma 6.30 op de tweede integraal leiden we af dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\delta} f(-y) D_l(y)\, dy = \frac{1}{2} f_-(0). \tag{6.16}$$

Op soortgelijke manier concluderen we dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{0} f(-y) D_l(y)\, dy = \frac{1}{2} f_+(0). \tag{6.17}$$

Uit Gevolg 6.28 leiden we af dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} f(-y) D_l(y)\, dy = 0. \tag{6.18}$$

Uit (6.16), (6.17) en (6.18) volgt met de optelregel voor limieten dat

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y) D_l(y)\, dy = \frac{f_-(0) + f_+(0)}{2}.$$

Dit is de gewenste identiteit. □

Voorbeeld 6.32 Lees Voorbeeld 6.19 uit het dictaat. ⊘

Voorbeeld 6.33 Door partiële integratie zien we dat voor $R > 1$ geldt

$$\int_1^R \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_1^R \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \cos x \; = \cos 1 - \frac{1}{R} \cos R - \int_1^R \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Hieruit blijkt door toepassing van het majorantiekenmerk op de laatste integraal dat de limiet van de eerste integraal voor $R \to \infty$ bestaat. Omdat $x \mapsto x^{-1} \sin x$ voortzetbaar is tot een continue functie op $[0, \infty[$, met waarde 1 in $x = 0$, volgt dat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

bestaat.

We kunnen deze limiet berekenen door toepassing van Gevolg 6.29. Hiertoe merken we op dat

$$\begin{aligned} \int_0^{l+\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^1 \frac{\sin((l+\frac{1}{2})x)}{x}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{2}x)}{x}\, D_l(x)\, dx. \end{aligned}$$

De functie $x \mapsto x^{-1}\sin(\frac{1}{2}x)$ is voortzetbaar tot een continue functie $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{C}$, met waarde $\varphi(0) = \frac{1}{2}$. Met Gevolg 6.29 concluderen we dat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{l\to\infty} \int_0^{l+\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx = \varphi(0)\pi = \frac{\pi}{2}.$$

Dit is de bekende waarde die ons op een andere manier al bekend was uit de opgaven. ⊘

Orthonormale stelsels

We beschouwen een complexe lineaire ruimte E, met daarop een **Hermite's inproduct** $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Voor de definitie hiervan verwijzen we naar §6.23 van het dictaat.

Voorbeeld 6.34 De theorie die we nu gaan ontwikkelen is de basis van de theorie der Hilbert-ruimten, een onderwerp uit de functionaal-analyse. Wij zullen deze basistheorie vooral gebruiken voor de ruimte $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die we voorzien van het Hermite'se inproduct

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx. \tag{6.19}$$

$\oslash$

In termen van het Hermite's inproduct definiëren we de afbeelding $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ op E door:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te verifiëren: voor alle $f \in E$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ geldt:

(a) $\|f\| \geq 0$ en $\|f\| = 0 \implies f = 0$;

(b) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.

Het is een algemeenheid dat het inproduct voldoet aan de volgende **ongelijkheid van Cauchy-Schwartz**:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \qquad (f, g \in E).$$

Uit deze ongelijkheid volgt de volgende driehoeksongelijkheid, voor alle $f, g \in E$:

(c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Vanwege de eigenschappen (a) - (c) noemen we $\| \cdot \|$ een **norm** op de ruimte E. In termen van deze norm definiëren we de functie $d : E \times E \to \mathbb{R}$ door

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Het is een algemeenheid dat hierdoor een **metriek** of **afstand** op E gedefinieerd wordt. Dit maakt (E, d) tot een metrische ruimte. Dit betekent dat de in Inleiding Analyse ontwikkelde terminologie van open bollen, open en gesloten verzamelingen, limieten en continuïteit tot onze beschikking staan.

Voorbeeld 6.35 We zullen de norm op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die hoort bij het inproduct (6.19) ook noteren met $\| \cdot \|_2$. Dus, voor $f \in C(\mathbb{R}/2\pi Z)$ geldt dat

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

$\oslash$

Definitie 6.36 Als $f, g \in E$ dan zeggen we dat f **loodrecht** op g staat, notatie $f \perp g$, indien $\langle f, g \rangle = 0$.

Is $V \subset E$ een lineaire deelruimte, en $f \in E$, dan zeggen we dat f loodrecht op V staat, notatie $f \perp V$, indien $f \perp g$ voor alle $g \in V$.

Zijn V, W twee lineaire deelruimten van E, dan zeggen we dat V en W loodrecht op elkaar staan, notatie $V \perp W$, indien $f \perp g$ voor ale $f \in V$ en $g \in W$. $\oslash$

Het volgende lemma staat bekend als de stelling van Pythagoras voor het Hermite'se inproduct.

Lemma 6.37 *Als $f, g \in E$ en $f \perp g$, dan geldt*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Definitie 6.38 Onder een **orthonormaal stelsel** in E verstaan we een afbeelding $K \to E$, $k \mapsto \epsilon_k$ met K een index-verzameling, die voldoet aan de volgende eigenschappen:

(a) Voor alle $k, l \in K$ met $k \neq l$ geldt $\epsilon_k \perp \epsilon_l$.

(b) Voor alle $k \in K$ geldt $\|\epsilon_k\| = 1$.

$\oslash$

Voorbeeld 6.39 Laat $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voorzien zijn van het Hermite'se inproduct (6.19). Neem $K = \mathbb{Z}$, en definieer $\epsilon_k : x \mapsto e^{ikx}$. Dan is $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ een orthonormaal stelsel van functies in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. $\oslash$

In het vervolg veronderstellen we steeds dat $k \mapsto \epsilon_k$, $K \to E$ een orthonormaal stelsel in E is.

Gevolg 6.40 *Is $J \subset K$ een eindig deel, en $\{c_j \mid j \in J\}$ een collectie complexe getallen, dan is*

$$\|\sum_{j\in J} c_j\epsilon_j\|^2 = \sum_{j\in J} |c_j|^2.$$

Bewijs Dit volgt door herhaald toepassen van de stelling van Pythagoras. $\square$

Is $J \subset K$ eindig dan noteren we het lineaire opspansel van de vectoren $\{\epsilon_j \mid j \in J\}$ met E_J. Als $f \in E$, dan schrijven we bovendien

$$f_J = \sum_{j\in J} \langle f, \epsilon_j\rangle \epsilon_j.$$

We merken op dat $f_J \in E_J$ en dat $f - f_J \perp E_J$. Derhalve geldt wegens de stelling van Pythagoras dat

$$\|f\|^2 = \|f_J\|^2 + \|f - f_J\|^2. \tag{6.20}$$

Lemma 6.41 *Zij $f \in E$. Dan geldt voor iedere eindige deelverzameling $J \subset K$ dat*

$$\sum_{j\in J} |\langle f, \epsilon_j\rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Bewijs Uit (6.20) volgt dat

$$\|f\|^2 \geq \|f_J\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle f, \epsilon_j\rangle|^2.$$

$\square$

Op grond van het bovenstaande zouden we graag willen schrijven dat $\sum_{k\in K} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2$. Dit is niet zonder meer mogelijk, omdat K een oneindige verzameling kan zijn. Vandaar eerste de volgende definitie.

Definitie 6.42 Zij $(V, \|\cdot\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. Zij voorts K een verzameling en $v : K \to V, k \mapsto v_k$ een functie. We zeggen dat functie $k \mapsto v_k$ **sommeerbaar** is in V, indien er een $s \in V$ bestaat met de volgende eigenschap.

Voor iedere $\epsilon > 0$ bestaat een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat voor elk eindig deel $J \subset K$ met $J \supset J_0$ geldt:

$$\|s - \sum_{j \in J} v_j\| < \epsilon.$$

$\oslash$

Lemma 6.43 *Veronderstel, met de notatie van de bovenstaande definitie, dat $k \mapsto v_k$ sommeerbaar is. Dan is er precies één $s \in V$ met de bovenstaande eigenschap.*

Bewijs Laat ook t de bovenstaande eigenschap hebben. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een deel J_0 bij s, ϵ als boven, en een deel J_1 bij t, ϵ als boven. Neem $J = J_0 \cup J_1$, dan is J eindig, en

$$\|s - t\| \le \|s - \sum_{j \in J} v_j\| + \|\sum_{j \in J} v_j - t\| < 2\epsilon.$$

Dit geldt voor elke $\epsilon > 0$, dus $\|s - t\| = 0$, dus $s = t$. $\square$

In het vervolg zullen we met

$$s = \sum_{k \in K} v_k$$

(in V) bedoelen dat de functie $k \mapsto v_k$ sommeerbaar is, terwijl $s \in V$ uit Definitie 6.42.

Lemma 6.44 *Zij K een verzameling, en $t : K \to \mathbb{R}$ een afbeelding met $t_k \ge 0$ voor alle $k \in K$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie $k \mapsto t_k$ is sommeerbaar.*

(b) *Er is een $M > 0$ zo dat voor alle eindige $J \subset K$ geldt $\sum_{j \in J} t_j \le M$.*

Bewijs Veronderstel eerst dat (a) geldt, en dat $t = \sum_{k \in K} t_k$. Dan is er een eindig deel $L_0 \subset K$ zo dat voor ieder eindig deel $L \subset K$ met $L \supset L_0$ geldt $|\sum_{l \in L} t_l - t| < 1$, dus ook $|\sum_{l \in L} t_l| \le t + 1$. Zij

$$M = t + 1 + \sum_{l \in L_0} t_l$$

en laat $J \subset K$ een willekeurig eindig deel zijn. Dan geldt

$$\sum_{l \in J} t_j = |\sum_{l \in J \cup L_0} t_j - \sum_{l \in L_0 \setminus J} t_j| \le \sum_{l \in J \cup L_0} t_j + \sum_{l \in L_0 \setminus J} t_j \le M.$$

Dus (b) geldt.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Dan is de verzameling $S \subset [0, \infty[$ bestaande uit alle getallen $\sum_{j \in J} t_j$ met $J \subset K$ eindig naar boven begrensd door M. De verzameling S heeft dus een supremum t. Zij $\epsilon > 0$. Dan is $t - \epsilon$ geen bovengrens van S, dus er is een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat $\sum_{j \in J_0} t_j > t - \epsilon$. Voor elke eindige deelverzameling $J \subset K$ met $J \supset J_0$ geldt nu:

$$t - \epsilon \sum_{j \in J_0} t_j \leq \sum_{j \in J} t_j \leq t.$$

Hieruit volgt dat $\sum_{k \in K} t_k = t$ in de zin van Definitie 6.42. □

Na deze bespreking van het begrip sommeerbaarheid kunnen we het volgende resultaat afleiden, dat bekend staat als de ongelijkheid van Bessel. We veronderstellen dat $(\epsilon_k)_{k \in K}$ een orthonormaal stelsel in E is.

Lemma 6.45 (De ongelijkheid van Bessel) *Voor elke $f \in E$ geldt dat*

$$\sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Definitie 6.46 Het orthonormale stelsel $(\epsilon_k)_{k \in K}$ in E heet **volledig** indien het lineaire opspansel E_K dicht ligt in E. ⊘

We brengen in herinnering dat het dichtliggen van E_K in E betekent dat de afsluiting van E_K ten aanzien van $\| \cdot \|$ gelijk is aan E. Dit betekent precies dat ieder punt van E limietpunt van E_K is. Ofwel, voor iedere $f \in E$ en iedere $\epsilon > 0$ bestaat een $g \in E_K$ zo dat

$$\|f - g\| < \epsilon.$$

We merken op dat er een eindig deel $J \subset K$ en een afbeelding $c : J \to \mathbb{C}$ bestaan zo dat $g = \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j$. De bovenstaande schatting kan dus ook geformuleerd worden als

$$\|f - \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j\| < \epsilon,$$

voor een eindige deelverzameling $J \subset K$ en een $c \in \mathbb{C}^J$.

Stelling 6.47 *De volgende beweringen zijn gelijkwaardig:*

(a) *Het orthonormale stelsel $(\epsilon_k)_{k \in K}$ is volledig.*

(b) *Voor iedere $f \in E$ geldt*

$$f = \sum_{k \in K} \langle f, \epsilon_k \rangle \epsilon_k,$$

in E ten aanzien van de norm $\| \cdot \|$.

(c) *Voor iedere $f \in E$ geldt*

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2.$$

Bewijs We zullem de implicaties '(a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a)' bewijzen.

Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $f \in E$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een g in het lineaire opspansel E_K van de ϵ_k zo dat $\|f - g\| < \epsilon$. Er is een eindig deel $J_0 \subset K$ zo dat $g \in E_{J_0}$. Zij nu $J \subset K$ eindig, met $J \supset J_0$. Schrijf $f_J = \sum_{j \in J} \langle f, \epsilon_j \rangle \epsilon_j$. Dan is $f - f_J \perp g$ en $f - f_J \perp f_J$, dus $f - f_J \perp f_J - g$. Hieruit volgt dat

$$\|f - g\|^2 = \|(f - f_J) + (f_J - g)\|^2 = \|f - f_J\|^2 + \|f_J - g\|^2 \geq \|f - f_J\|^2.$$

We concluderen dat

$$\|f - f_J\| \leq \|f - g\| < \epsilon.$$

Hiermee is aangetoond dat (b) geldt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een eindig deel $J \subset K$ zo dat $\|f - f_J\|^2 < \epsilon$. Hieruit volgt dat

$$\|f_J\|^2 = \|f\|^2 - \|f - f_J^2\| > \|f\|^2 - \epsilon.$$

Dit impliceert dat

$$\|f\|^2 - \epsilon \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 \leq \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

We concluderen dat (c) geldt.

Veronderstel tenslotte dat (c) geldt, en dat $f \in E$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een eindig deel $J \subset K$ zo dat

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 \geq \|f\|^2 - \epsilon^2,$$

dus $\|f_J\|^2 > \|f\|^2 - \epsilon^2$. We concluderen dat

$$\|f_J - f\|^2 = \|f\|^2 - \|f_J\|^2 < \epsilon^2,$$

dus $\|f_J - f\| < \epsilon$. Aangezien $f_J \in E_J \subset E_K$ is hiermee aangetoond dat f tot de afsluiting van E_K behoort. Aangezien dit voor willekeurige $f \in E$ geldt, concluderen we (a). $\square$

Deze in algemeenheid ontwikkelde theorie gaan we toepassen op $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, voorzien van het Hermite'se inproduct (6.19). We nemen $K = \mathbb{Z}$ en voor $k \in \mathbb{Z}$ definiëren we de functie $\epsilon_k \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ door $\epsilon_k(x) = e^{ikx}$. We hebben reeds gezien dat het stelsel $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ orthonormaal is. Merk op dat voor elke $f \in E$ geldt dat

$$\langle f, \epsilon_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx = (\mathcal{F} f)_k.$$

In het volgende lemma worden supnorm en kwadraatnorm op E vergeleken.

Lemma 6.48 *Voor alle $f \in E$ geldt $\|f\|_2 \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$.*

Bewijs Zij $f \in E$. Dan is

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_{\mathbb{R}}^2 \, dx = \|f\|_{\mathbb{R}}^2.$$

$\square$

Lemma 6.49 *Het orthonormale stelsel $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ is volledig.*

Bewijs Veronderstel dat $f \in E$. Laat $\epsilon > 0$. Dan is er een $0 < r < 1$ zo dat

$$\|f - f_r\|_{\mathbb{R}} < \epsilon/2.$$

We brengen in herinnering dat

$$f_r = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\langle f, \epsilon_k\rangle\epsilon_k \in E.$$

Zij $J = \{-l, \dots, l-1, l\}$. Dan geldt dat

$$\|f_r - f_{rJ}\|_{\mathbb{R}} \leq \sum_{|k|>l} r^{|k|}|\langle f, \epsilon_k\rangle| \leq \|f\|_{\mathbb{R}} \sum_{|k|>l} r^{|k|} = \frac{2r^{l+1}}{1-r}\|f_r\|_{\mathbb{R}}.$$

Door l voldoende groot te kiezen bereiken we dat

$$\|f_r - f_{rJ}\|_{\mathbb{R}} < \epsilon/2.$$

Hieruit volgt dat

$$\|f - f_{rJ}\|_{\mathbb{R}} \leq \|f - f_r\|_{\mathbb{R}} + \|f_r - f_{rJ}\|_{\mathbb{R}} < \epsilon,$$

dus ook

$$\|f - f_{rJ}\|_2 < \epsilon.$$

Aangezien $f_{rJ} \in E_J \subset E_K$, is hiermee bewezen dat f een limietpunt van E_K is. De ruimte E_K ligt dus dicht in E. $\square$

Door toepassing van Stelling 6.47 concluderen we nu dat het volgende geldt.

Stelling 6.50 *Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan is*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)_k e^{ikx}$$

met convergentie ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_2$.

Bovendien geldt de volgende identiteit van Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\mathcal{F}f)_k|^2.$$

In het vervolg zullen we door limietovergang laten zien dat de bovenstaande stelling algemener waar is voor iedere lokaal Riemann-integreerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die periodiek is met periode 2π. De ruimte van deze functies zullen we noteren met $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Ter voorbereiding maken we een aantal opmerkingen. Allereerst laat het Hermite'se inproduct op $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zich met dezelfde integraalformule voortzetten tot een Hermite'se bilineaire vorm op $\mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ die positief semidefiniet is. Hiermee bedoelen we dat $\langle f, f\rangle \geq 0$, maar het is mogelijk dat $\langle f, f\rangle = 0$ terwijl $f \neq 0$. Een voorbeeld van een functie met de laatste eigenschap is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(2k\pi) = 1$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$, terwijl $f(x) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$. We zetten de norm $\|\cdot\|_2$ voort tot een afbeelding $\|\cdot\|_2 : \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to [0, \infty[$ die de bekende eigenschappen van een norm heeft, met uitzondering van de eigenschap $\|f\|_2 = 0 \implies f = 0$. Een dergelijke afbeelding heet ook wel een **seminorm** op $\mathcal{R}$. Tenslotte merken we op dat voor $f, g \in \mathcal{R}$ met $f \perp g$ geldt dat $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$.

Het volgende lemma dient ook ter voorbereiding.

Lemma 6.51 *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een Riemann-integreerbare functie. Dan is er voor iedere $\epsilon > 0$ een continue functie $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ met $\|g\|_{[a,b]} \leq \|f\|_{[a,b]}$ en zo dat*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx < \epsilon.$$

Bewijs Voor $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann-integreerbaar schrijven we

$$\|\varphi\|_1 := \int_a^b |\varphi(x)| \, dx.$$

We merken op dat $\| \cdot \|_1$ voldoet aan de driehoeksongelijkheid.

We behandelen eerst het speciale geval waarin f gelijk is aan de karakteristieke functie $1_{[c,d]}$ van een deelinterval $[c, d] \subset [a, b]$. Dus, $f(x) = 1$ voor $x \in [c, d]$, en $f(x) = 0$ voor $x \in [a, b] \setminus [c, d]$. Zij $\epsilon > 0$. We definiëren de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g = 1$ op $[c, d]$, door $g = 0$ buiten $[c - \epsilon/2, d + \epsilon/2]$ en door

$$g(x) = \begin{cases} 2(x - c + \epsilon/2)/\epsilon & \text{als} \quad c - \epsilon/2 \leq x < c, \\ 2(d + \epsilon/2 - x)/\epsilon & \text{als} \quad d < x \leq d + \epsilon/2. \end{cases}$$

Dan is g continu, en er geldt dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{[a,b]}$. Verder geldt:

$$\|f - g\|_1 \leq \int_{c-\epsilon/2}^{c} 2(x - c + \epsilon/2)/\epsilon \, dx + \int_d^{d+\epsilon/2} 2(x + \epsilon/2 - x)/\epsilon \, dx = \epsilon/2 < \epsilon.$$

De stelling is dus waar voor $f = 1_{[c,d]}$. Zij nu $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ een willekeurige Riemann-integreerbare functie, en zij $M = \|f\|_{[a,b]}$. Zij $\epsilon > 0$. Dan is er een verdeling $V = \{x_0 < \ldots < x_n\}$ van het interval $[a, b]$ zo dat

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}) < \epsilon/2.$$

Hierin staat $\mathrm{var}_{I(j)} f$ voor de variatie van f over het j-de deelinterval $I(j) = [x_{j-1}, x_j]$:

$$\mathrm{var}_{I(j)} f = \sup_{x,y \in I(j)} |f(x) - f(y)|.$$

Kies $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, dan is $|f(x) - f(\xi_j)| \leq \mathrm{var}_{I(j)} f$ voor alle $x \in I(j)$, dus

$$\int_a^b |f(x) - f(\xi_j)| 1_{I(j)}(x) \, dx \leq \mathrm{var}_{I(j)}(x_j - x_{j-1}).$$

Zij $s = \sum_j f(\xi_j) 1_{I(j)}$, dan is s Riemann-integreerbaar, en

$$\|f - s\|_1 \leq \sum_j \|(f - f(\xi_j)) 1_{I(j)}\|_1 < \epsilon/2.$$

Voor iedere j is er een continue functie $g_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ met $\|g\|_{[a,b]} \leq 1$, zo dat

$$\|g_j - 1_{I(j)}\|_1 \leq \epsilon/(2Mn + 1).$$

Definieer $g = \sum_j f(\xi_j) g_j$. Dan is g continu, $\|g\|_{[a,b]} \leq \|f\|_{[a,b]}$ en

$$\|s - g\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)| \|1_{I(j)} - g_j\|_1 \leq Mn\epsilon/(2Mn+1) < \epsilon/2.$$

Er volgt dat

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - s\|_1 + \|s - g\|_1 \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

Lemma 6.52 *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $\epsilon > 0$. Dan is er een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en*

$$\|f - g\|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \epsilon.$$

Bewijs Er bestaat een $h \in C([-\pi, \pi])$ met $\|h\|_{[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ zo dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - h(x)|\, dx < \pi\epsilon.$$

Hierbij bestaat een $g \in C([-\pi, \pi])$ met $\|g\|_{[-\pi,\pi]} \leq \|f\|_\infty$, en met $g(-\pi) = g(\pi)$ zo dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - g(x)|\, dx < \pi\epsilon.$$

De functie g laat zich uniek voortzetten tot een functie $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Wegens de bovenstaande schattingen geldt voor deze voortzetting dat $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en

$$\|f - g\|_1 < \epsilon.$$

□

Gevolg 6.53 *Laat $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en zij $\epsilon > 0$. Dan bestaat er een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zo dat*

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

Bewijs Er bestaat een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\|g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}}$ en $\|f - g\|_1 < \epsilon^2/(2\|f\|_{\mathbb{R}} + 1)$. Hiervoor geldt:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\|f\|_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= 2\|f\|_{\mathbb{R}} \|f - g\|_1 < \epsilon^2. \end{aligned}$$

□

Stelling 6.54 *Zij $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan gelden de uitspraken van Stelling 6.50.*

Bewijs Voor elke eindige deelverzameling $J \subset \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\|f\|_2^2 = \|f_J\|_2^2 + \|f - f_J\|_2^2,$$

dus in het bijzonder

$$\|f_J\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Zij $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dan geldt dat $\|g_J - f_J\|_2 \leq \|g - f\|_2$, dus

$$\|f - f_J\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - g_J\|_2 + \|g_J - f_J\| \leq 2\|f - g\|_2 + \|g - g_J\|.$$

Er bestaat een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met $\|f - g\|_2 < \epsilon/4$. Hiervoor geldt dus

$$\|f - f_J\|_2 \leq \epsilon/2 + \|g - g_J\|_2.$$

Vanwege de geldigheid van de stelling voor g bestaat er een eindig deel $J_0 \subset \mathbb{Z}$ zo dat voor alle eindige $J \subset \mathbb{Z}$ met $J \supset J_0$ geldt: $\|g - g_J\|_2 < \epsilon/2$. Voor al dergelijke J geldt dus

$$\|f - f_J\|_2 < \epsilon. \tag{6.21}$$

Hieruit volgt dat

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\mathcal{F}f)_k \epsilon_k,$$

in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ten aanzien van de norm $\|\cdot\|_2$.

Uit de schatting (6.21) volgt ook dat

$$\|f_J\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|f - f_J\|_2^2 > \|f\|_2^2 - \epsilon^2.$$

Hieruit concluderen we de gelijkheid van Parseval:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |(\mathcal{F}f)_k|^2 = \|f\|_2^2.$$

□